УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНЕНИХ КРИВИХ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Малкіна В.М., д.т.н.,
Тітова О.В., к.т.н.
Таврійський державний агротехнологічний університет
Тел.: (0619) 42-68-62

Анотація **– пропонується спосіб побудови інтерполяційного поліному для дискретно представленої функції із заданими позиційними і інтегральними властивостями на основі методу адаптивного ортонормування поліномів.**

Ключові слова **– інтегральні властивості, метрика простору, інтерполяційний поліном.**

Постановка проблеми. При розв'язанні прикладних задач виникає необхідність моделювання дискретно представлених кривих і поверхонь, які задовольняють деяким умовам диференціального або інтегрального характеру. Для побудови інтерполяційної моделі, яка задовольняє диференціальним характеристикам, може бути застосований відомий метод Ерміта [1], однак випадок з інтегральними умовами зустрічається рідше. Таким чином, виникає необхідність розробки нових способів конструювання моделюючих поверхонь із заданими та інтегральними властивостями.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [3], [4] запропоновано метод побудови інтерполяційних поверхонь і кривих ліній із заданими диференціальними властивостями для функції, що представлена таблицею своїх значень. В рамках цього методу можна розробити алгоритм для конструювання геометричних моделей за наперед заданими позиційними і інтегральними характеристиками.

Формулювання цілей статті. Метою досліджень є розробка способу побудови інтерполяційного полінома із заданими позиційними і інтегральними властивостями для дискретно представленої функції на основі методу адаптивного ортонормування поліномів.

Основна частина.

Постановка задачі. Для функції $F = F(x)$, яка задана таблицею своїх значень (x_i, F_i), $i = 0,1,2,...n$, на деякій області Ω необхідно побудувати такий інтерполяційний поліном $\Phi = \Phi(\tilde{o})$, для якого виконуються умови:

$$\Phi(x_i) = F(x_i), \quad i = \overline{0,n}, \tag{1}$$

$$\int_{\Omega_j} \Phi(x)dx = \int_{\Omega_j} F(x)dx = C_j, \; 1 \le j \le m, \tag{2}$$

де Ω_j –деякі однозв'язні області, $\Omega_j \subset \Omega$, $C_j = const$, m - кількість інтегральних умов задачі. Згідно до вимог задачі, метрику пропонується побудувати у вигляді (рис. 1)

$$\rho(f,g) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\Omega_j}|f(x)|dx - \int_{\Omega_j}|g(x)|dx\right)^2}\;. \tag{3}$$

Тобто, значення функцій $f(x)$ è $g(x)$ в заданих точках, а також площі відповідних криволінійних трапецій, співпадають.

Слід зазначити, що побудована метрика є коректною, тому що забезпечує виконання всіх відповідних аксіом метрики[1].

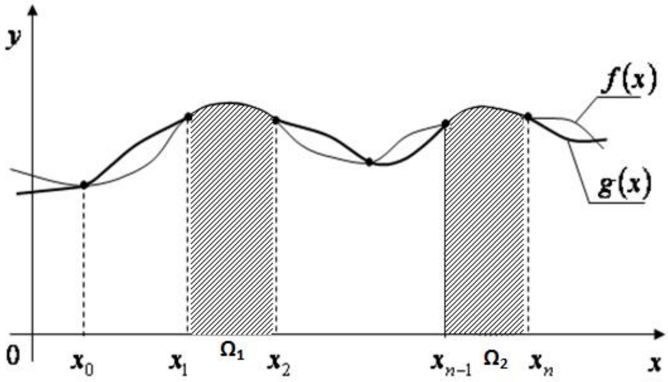

Рис. 1. Геометрична інтерпретація $\rho(f,g)$

Відповідно до обраної метрики, скалярний добуток визначається у вигляді

$$(f,g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot g(x_i) + \sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_j}|f(x)|dx \cdot \int_{\Omega_j}|g(x)|dx\,. \tag{4}$$

Алгоритм побудови інтерполяційного поліному із заданими інтегральними властивостями здійснюємо в рамках загального методу адаптивного ортонормування поліномів [2, 4] і складається з наступних етапів:

1. Визначити метрику простору розв'язків і скалярний добуток відповідно до критерію наближення, який випливає з умов задачі у вигляді (2), (3).

2. Визначити базисний набір лінійно незалежних функцій $\varphi_j(x,y)$, $\left(j = 0,1,\ldots,N^*\right)$.

3. Побудувати ортонормований набір функцій $\tilde{\varphi}_j(x,y)$, $\left(j = 0,1,\ldots,N^*\right)$, для чого провести процес ортогоналізації за формулами Грама-Шмідта на базі адаптивного скалярного добутку, який визначено в пункті 1 алгоритму.

4. Побудувати інтерполяційну поверхню у вигляді лінійного поліному ступеня N шляхом розкладання за ортонормованими поліномами $\tilde{\varphi}_j(x,y)$, $(j=0,1,...,N^*)$

$$\Phi_N(x,y)=\sum_{j=0}^{N^*} b_j\tilde{\varphi}_j(x,y),$$

де $b_j=(\tilde{\varphi}_j,z)$ – коефіцієнти в розкладанні дискретно представленої функції $z=z(x,y)$ за ортонормованим базисом $\tilde{\varphi}_j(x,y)$, $(j=0,1,...,N^*)$.

На рис.2 наведено приклад побудованої запропонованим способом інтерполяційної кривої *y=Φ(x)*, за умови, що крива проходить крізь точки:

(-0,65; 2), (-0,6; 0,23), (-0,5; 0,36), (-0,25; 1), (-0,1; 2,5), (0,05; 2), (0,1; 2), (0,125; 3) і $\int_{-0,6}^{-0,2}\Phi(x)dx=1$, $\int_{-0,1}^{0}\Phi(x)dx=0,3$.

Рівняння побудованого інтерполяційного поліному має вигляд $\Phi(\mathrm{x})=5687,52\mathrm{x}^2-1091,28\cdot 10^2\mathrm{x}^6-3488,02\cdot 10^2\mathrm{x}^7+2,90-1892,27\cdot 10^2\mathrm{x}^9-$
$-4250,27\cdot 10^2\mathrm{x}^8-154,58\mathrm{x}^2+1183,49\mathrm{x}^3+10056,3\mathrm{x}^4-14,55\mathrm{x}.$

На рис. 3 зображено графік поверхні $z=\Phi(x,y)$, яка проходить крізь точки:

(0,5; 0; 0,5), (0,05; 0,1; 3), (0,75; 1; 9), (0; 1; 8), (0,6; 0,25; 5), (0,6; 5/6; 6), (1; 0,75; 7), (2/3; 0,5; 8), за умови, що $\int_0^1\int_0^1\Phi(x,y)dxdy=1$ і має вигляд

$\Phi(x,y)=-148,14y+133,39y^2+275,30xy+346.86x^2-168,38xy^2-165,86x^3+$
$+22,75-167,47x-139,97x^2y.$

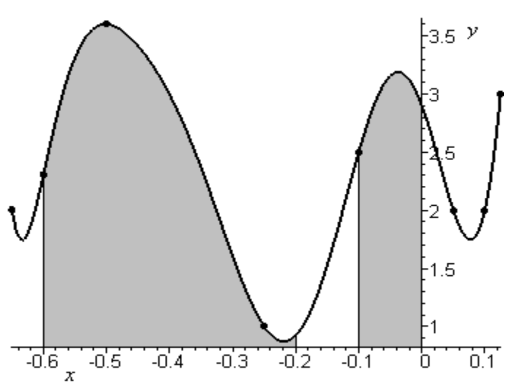

Рис. 2. Графік кривої $y=\Phi(x)$

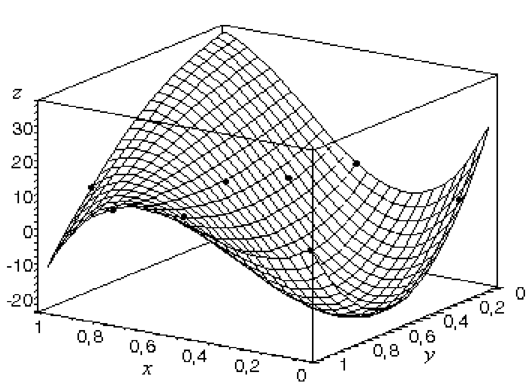

Рис. 3. Графік кривої $\mathrm{z}=\Phi(x,y)$

Висновок. У статті запропоновано спосіб побудови інтерполяційного полінома для дискретно представленої функції, яка задовольняє заданим інтегральним характеристикам на основі адаптивного ортонормування поліномів. Наведено тестові приклади розв'язку задач побудови таких інтерполяційних кривих і поверхонь. Наведений спосіб дозволяє розв'язувати прикладні задачі, моделі яких можуть бути описані інтегральними рівняннями.

Література

1. *Березин И.С.* Методы вычислений / *И.С. Березин, Н.П. Жидков* – М.: Гос. издательство физико-математической литературы, 1962. – Т.1. – 464 с.
2. *Малкина В.М.* Геометрическое моделирование поверхностей на основе специальных систем ортонормированных полиномов: Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелитополь: ТГАТА, 1999. – 182 с.
3. *Найдиш А.В.* Геометричне моделювання поверхонь з дискретно заданими диференціальними властивостями [*Найдиш А.В., Малкіна В.М. ,Осадчук О.В.*] // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Херсон: ХПТУ. – 2005. – Вип. 2 (22). – С. 219-222.
4. *Тітова О.В.* Геометричне моделювання дискретно представлених поверхонь на основі адаптивного ортонормування поліномів: Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – 185 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРТЕНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ КРИВЫХ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ С ЗАДАННЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Малкина В.М., Титова О.В.

Аннотация **- предлагается способ построения интерполяционного полинома для дискретно представленной функции с заданными позиционными и интегральными свойствами на основе метода адаптивного ортонормирования полиномов.**

THE CONSTRUCTION OF INTERPOLATIVE SURFACES AND CURVES WITH THE SET INTEGRAL PROPERTIES

V. Malkina, O. Titova

Summary

The way of construction of an interpolant with the given integral singularities for the tabular function with the help of a special orthonormalized set of polynoms is offered.