УДК 514.182

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ СІТКОЮ ЧЕБИШЕВА ПОВЕРХНІ, ЗАДАНОЇ УПОРЯДКОВАНИМ КАРКАСОМ ТОЧОК

Мацулевич О.Є., к.т.н.*
Таврійський державний агротехнологічний університет
Залевський С.В., к.т.н.,
Литвиненко П.Л., к.т.н.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Тел. (044) 454-94-46

***Анотація* – пропонується спосіб оцінки точності нанесення моделі сітки Чебишева за рахунок знаходження відстаней від вузлів сітки до точок основ перпендикулярів апроксимуючої поверхні.**

***Ключові слова* – сітка Чебишева, функціонал, точність.**

Постановка проблеми. Необхідність оцінки точності побудови чебишевської сітки, як такої, що моделює положення тканини на поверхні.

Аналіз осанніх досліджень. В роботі [1] пропонується спосіб вибору максимально допустимої величини сторони чарунки чебишевської сітки в залежності від властивостей поверхні і заданого значення найменшого кута тканини, який допускається при деформації і не приводить до утворення складок. Це дозволяє гарантовано знаходити вузли сітки, але не дає можливості оцінювати відхилення точок від апроксимуючої поверхні.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є оцінка точності моделі сітки Чебишева, шляхом визначення відстаней від знайдених вузлів сітки до точок основ перпендикулярів, проведених до апроксимуючої поверхні.

Основна частина. Нехай маємо поверхню, задану каркасом точок. Для побудови на ній моделі сітки Чебишева і подальшого отримання викрійки цієї поверхні апроксимуємо її поверхнею, заданою рівнянням $F(x,y,z)=0$. Знайдемо максимально допустиму величину сторони чарунки сітки за формулою

$$L = 2R_{кр} \cdot cos\frac{\alpha_{кр}}{2} ,$$

де L - максимально допустима довжина чарунки чебишевської сітки, α - критичне значення мережного кута чарунки, $R_{кр}$- мінімальна нормальна кривина поверхні в точці M_{ij} [2, 3].

Виберемо початкову точку $M_{0,0}$ і вектор $\overline{a_{0,0}}$ напрямку побудови [2, 3].

При покритті поверхні моделлю чебишевської сітки вузли M_{ij} чарунки не попадають точно на поверхню F. Для оцінки і корегування розташування знайдених точок пропонується наступне.

Нехай знайдена вузлова точка M має координати x_M, y_M, z_M. Необхідно знайти відстань від точки M до поверхні і координати основи перпендикуляра, опущеного з точки до поверхні. Позначимо $x_0 - x_M = \Delta x = u_1$, $y_0 - y_M = \Delta y = u_2$, $z_0 - z_M = \Delta z = u_3$, де x_0, y_0, z_0 - невідомі координати основи перпендикуляра, проведеного із точки M до поверхні. Відстань d від точки M до поверхні будемо шукати як величину, яка дає мінімум функціоналу $\Phi = (x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 + (z_0 - z_M)^2$ при рівнянні зв'язку $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. На першому етапі за первісні значення аргументів у рівнянні зв'язку виберемо координати x_M, y_M, z_M точки M. Тому приріст аргументів буде $dx = u_1, dy = u_2, dz = u_3$.

Розкладемо функцію $F(x,y,z) = 0$ в ряд Тейлора в околі точки M, обмежившись першими степенями приростів:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = F(x_M, y_M, z_M) + F_x'(x_M, y_M, z_M)u_1 + F_y'(x_M, y_M, z_M)u_2 + \\ + F_z'(x_M, y_M, z_M)u_3 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Позначимо $F(x_M, y_M, z_M) = \delta, F_x' = a, F_y' = b, F_z' = c$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + \delta = 0 \quad (2)$$

Користуючись методом умовного екстремуму, складемо функціонал

$$\Phi_1 = (x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2 + (z_0 - z_M)^2 - 2\lambda F(x,y,z)$$

Диференціюємо по u_1, u_2, u_3 і прирівнюємо похідні до нуля.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} = 2u_1 - 2\lambda\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} = 2u_2 - 2\lambda\frac{\partial F}{\partial u_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_3} = 2u_3 - 2\lambda\frac{\partial F}{\partial u_3} = 0$$

бо, $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z} = 1.$

Підставимо замість $\frac{\partial F}{\partial u_1},\frac{\partial F}{\partial u_2},\frac{\partial F}{\partial u_3}$ її зачення, знайдені диференціюванням по u_1,u_2,u_3 рівняння (2). Одержимо систему рівнянь:

$$u_1-\lambda a=0, u_2-\lambda b=0, u_3-\lambda c=0.$$

Звідси маємо

$$u_1=\lambda a,\; u_2=\lambda b,\; u_3=\lambda c.$$

Підставимо в (1):

$$\lambda a^2+\lambda b^2+\lambda c^2+\delta=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=-\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2}$$

Остаточно

$$x_0=x_M-a\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2},\; y_0=y_M-b\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2}, z_0=z_M-c\frac{\delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

Відстань d від точки M до поверхні, тобто вістань між точками $N(x_0,y_0,z_0)$ і $M(x_M,y_M,z_M)$ запишеться у вигляді

$$d=\frac{\delta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{3}$$

Очевидно, обчислені координати основи перпендикуляра і відстань d не є точними. Будемо вважати їх першими наближеннями $x_0^{(1)},y_0^{(1)},z_0^{(1)},d^{(1)}$ до шуканих величин. Тоді розглядаючи точку $N^{(1)}(x_0^{(1)},y_0^{(1)},z_0^{(1)})$, як точку близьку до поверхні, і, повторюючи наведені вище міркування, знаходимо друге наближення $x_0^{(2)},y_0^{(2)},z_0^{(2)},d^{(2)}$ і т.д. Послідовність точок $N^{(1)}(x_0^{(1)},y_0^{(1)},z_0^{(1)})$, $N^{(2)}(x_0^{(2)},y_0^{(2)},z_0^{(2)})$, … , $N^{(n)}(x_0^{(n)},y_0^{(n)},z_0^{(n)})$ сходиться до деякої точки N, яку можна з певною точністю вважати шуканою основою перпендикуляра. Дійсно точка $N^{(1)}$, знайдена із умови мінімума квадрата відстаней від точки M до точок поверхні , розміщена ближче до поверхні ніж точка M , точка $N^{(2)}$ - ближче ніж точка $N^{(1)}$ і т.д. На n- тому кроці відстань точки $N^{(n)}$ від поверхні буде менше деякого, наперед заданого, ε. Внаслідок неперервності функції $F(x,y,z)$ точка $N^{(n)}$ буде задовільняти рівняння $F(x,y,z)=0$, тобто буде належати поверхні. Відстань від точки M до точки N дорівнює сумі $d=d^{(1)}+d^{(2)}+...+d^{(n)}$. Ітераційний процес закінчується як тільки $d^{(n)}-d^{(n-1)}\le\varepsilon$. Але в дійсності гранична точка N не є справжньою основою перпендикуляра і буде відрізнятися від неї тим більше, чим більша відстань від точки M до поверхні. Дійсно, точка $N^{(1)}$ обчислюєтьсґ як точка на нормалі до поверхні рівня $F(x,y,z)=\delta$, яка не є нормаллю до поверхні $F(x,y,z)=0$ за винятком окремих випадків. Наприклад, поверхня $F(x,y,z)=0$ є сферою або площиною, тобто в цьому випадку поверхня рівня $F(x,y,z)=\delta$ є одночасною еквідистантною поверхнею.

В загальному випадку поверхня рівня не є еквідистантною заданій і тільки якщо точка M розміщена поблизу поверхні $F(x,y,z)=0$ поверхню рівня можна вважати наближеною до еквідистантної і відстань від точки до поверхні може бути знайдена з будь-якою наперед заданою точністю.

Висновки. Запропоновано спосіб оцінки відхилення вузлів моделі сітки Чебишева від апроксимуючої поверхні. Це дозволить корегувати вибір довжини сторони чарунки для дотримання заданної точності побудови моделі сітки.

Література

1. *Ванін В.В.* Вибір довжини сторони чарунки сітки Чебишева в залежності від властивостей тканини і поверхні. / В.В. Ванін, С.В. Залевський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — Вип. 79 — К.: КНУБА, 2008. — С.16-19.
2. *Залевський С.В.* Геометричне моделювання тканинних наповнювачів текстолітових конструкцій технічних виробів /С.В. Залевський//: автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук // КНУБА. — К.: 2011. — 23с.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, т.4,ч.2, /В.И. Смирнов// Физматгиз.-Москва:1958.-ст.158-308.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЕТКОЙ ЧЕБЫШЕВА ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАНОЙ УПОРЯДОЧЕННЫМ КАРКАСОМ ТОЧЕК

А.Е. Мацулевич, С.В. Залевский, П.Л. Литвиненко

Аннотация

Предлагается способ оценки точности нанесения модели сетки Чебышева за счет нахождения расстояний от узлов сетки до точек оснований перпендикуляров аппроксимирующей поверхности.

ESTIMATION OF ACCURACY MODELING SURFACE USING CHEBYSHEV'S GRID GIVEN ORDERLY FRAMEWORK POINTS

A. Matsulevich, S. Zalevsky, P. Litvinenko

Summary

Provides a method to evaluate and adjust the precision drawing model Chebyshev's grid by finding the distances from the nodes of the grid points to the surface normal of the approximating surface