

*Гавриленко Е.А., канд. техн. наук, доц.
Таврический государственный агротехнологический университет
Найдыш А.В., д-р техн. наук., проф.
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого
Холодняк Ю.В., аспирант
Таврический государственный агротехнологический университет*

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ КРИВЫХ ПО ЗАДАНЫМ УСЛОВИЯМ

eagavrilenko@mail.ru

Рассматривается задача формирования дискретно представленных кривых с последующей их стыковкой с заданным порядком гладкости. Методика основана на формировании кривой по отдельным монотонным участкам, с последующей их стыковкой. Порядок гладкости обвода обеспечивается геометрическими характеристиками предварительно сформированной эволюты.

***Ключевые слова:** дискретно представленная кривая, дискретно представленная эволюта, порядок гладкости, монотонное изменение кривизны, центр кривизны.*

Геометрическое моделирование дискретно представленных поверхностей является одной из важных задач машиностроения, архитектуры, строительства. Модель поверхности может быть сформирована как каркас, состоящий из дискретно представленных кривых (ДПК).

Под ДПК мы подразумеваем кривую линию, представленную упорядоченным множеством принадлежащих ей точек, которое будем называть точечным рядом. Кроме исходного точечного ряда в определитель ДПК могут входить геометрические характеристики кривой. Соблюдение этих характеристик необходимо обеспечить в процессе моделирования.

Разрабатываемый метод моделирования плоской ДПК ориентирован, прежде всего, на формирование каркасов динамических поверхностей. Функциональное назначение динамических поверхностей – взаимодействие со средой. Эксплуатационные свойства таких поверхностей определяются характеристиками потока среды, возникающего в пограничном слое вдоль поверхности.

Функциональные качества поверхности обеспечиваются геометрическими характеристиками элементов модели. Задача метода – формирование ДПК, характеристики которой обеспечат высокие динамические качества поверхности.

К таким характеристикам относятся:

- закономерный характер изменения значений кривизны вдоль кривой;
- стыковка участков кривой с порядком гладкости не ниже второго.

Под закономерным изменением кривизны будем подразумевать монотонное возрастание или убывание её значений на участках ДПК, где расположение исходных узлов позволяет это обеспечить.

Предлагается общая схема формирования кривой.

1. ДПК разбивается на выпуклые и вогнутые участки.
2. Полученные участки разбиваются на участки, вдоль которых значения кривизны изменяются монотонно. Такие участки ДПК будем называть монотонными.
3. Монотонные участки формируются отдельно с последующей стыковкой.

Таким образом, основой метода являются алгоритмы формирования ДПК с монотонным изменением кривизны.

Монотонные участки ДПК формируются в процессе сгущений исходного точечного ряда. В результате мы не получаем непрерывную кривую линию. Мы получаем новый точечный ряд, состоящий из сколь угодно большого количества узлов. При этом расположение узлов должно обеспечивать возможность выполнения условий задачи.

Так как моделируемая кривая представлена дискретно и не определена однозначно, то и значение радиусов кривизны в узлах ДПК однозначно определить мы не можем. Поэтому, для решения задачи мы используем принципы вариативного дискретного геометрического моделирования [3]. Вариативный подход предусматривает выбор конкретных решений из области возможных по условиям задачи.

Нами разработан алгоритм, который позволяет:

1. Определить область возможного расположения центров кривизны формируемой кривой, соответствующих узлам исходного точечного ряда.
2. Назначить положение центров кривизны внутри этих областей. Конкретное положение центра кривизны определяет положение нормали, касательной и радиуса кривизны в узлах исходной ДПК. В результате мы получаем новую ДПК, представленную тем же исходным рядом, но в узлах которой назначены положения касательных и значения радиусов кривизны.
3. Точки сгущения, назначаемые между исходными узлами, определяются с учетом положений центров кривизны в исходных узлах.

Область возможного положения центров кривизны определяется исходя из условий взаимного расположения соприкасающихся окружностей, определённых в произвольных точках кривой линии, вдоль которой кривизна изменяется монотонно. На рисунке 1 исходная область i -го центра кривизны – закрашенный треугольник. Будем называть его треугольник центра кривизны или ТЦК.

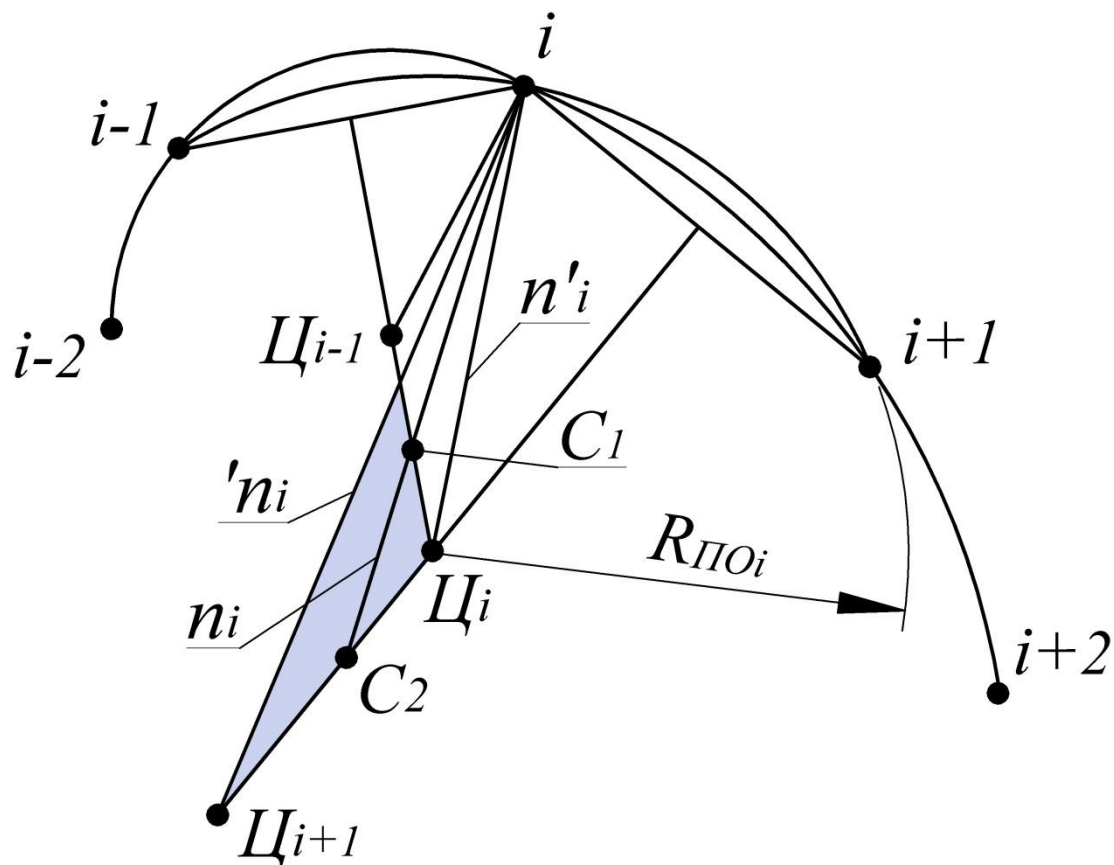


Рис. 1. Исходная область расположения i -го центра кривизны

В данном случае ТЦК определяется исходя из условия монотонного возрастания радиусов кривизны вдоль кривой, интерполирующей пять последовательных исходных узлов ($i-2 \dots i+2$). Вершины ТЦК – точки $Ц_i$, $Ц_{i+1}$ (или $Ц_{i-1}$) являются центрами прилегающих окружностей (ПО), проходящих через три последовательные точки ряда.

Для любой кривой линии, отвечающей условию задачи, центр кривизны, соответствующий i -му узлу, располагается внутри i -го ТЦК.

Угол с вершиной в точке i , стороны которого проходят через вершины ТЦК, определяет сектор возможного положения нормали (n_i). Если нормаль совпадает с границей сектора, то единственно возможное положение центра кривизны вершина ТЦК – точка $Ц_i$ или $Ц_{i+1}$, соответственно. При промежуточном положении нормали получаем диапазон возможного положения центра кривизны. На рисунке это отрезок $[C_1; C_2]$.

Необходимое условие формирования кривой с монотонным изменением кривизны – назначение центра кривизны на отрезке нормали, расположенном внутри ТЦК.

Назначив исходные центры кривизны, получаем новый точечный ряд, на основе которого формируется дискретно представленная эволюта (ДПЭ).

Под ДПЭ подразумевается эволюта формируемой кривой, представленная точечным рядом центров кривизны и накладываемыми на неё геометрическими условиями.

Для ДПЭ, эвольвентой которой является монотонная ДПК, эти условия следующие.

1. Эволюта представляет собой выпуклую кривую линию.
2. Эволюта касается нормалей к ДПК в соответствующих центрах кривизны.
3. Длина эволюты равна разности значений радиусов кривизны ДПК, в граничных точках.

Нормали к ДПК, назначенные в исходных узлах, центры кривизны, назначенные на этих нормалях (C_i) и хорды, соединяющие центры кривизны составляют цепочку базисных треугольников (рис.2).

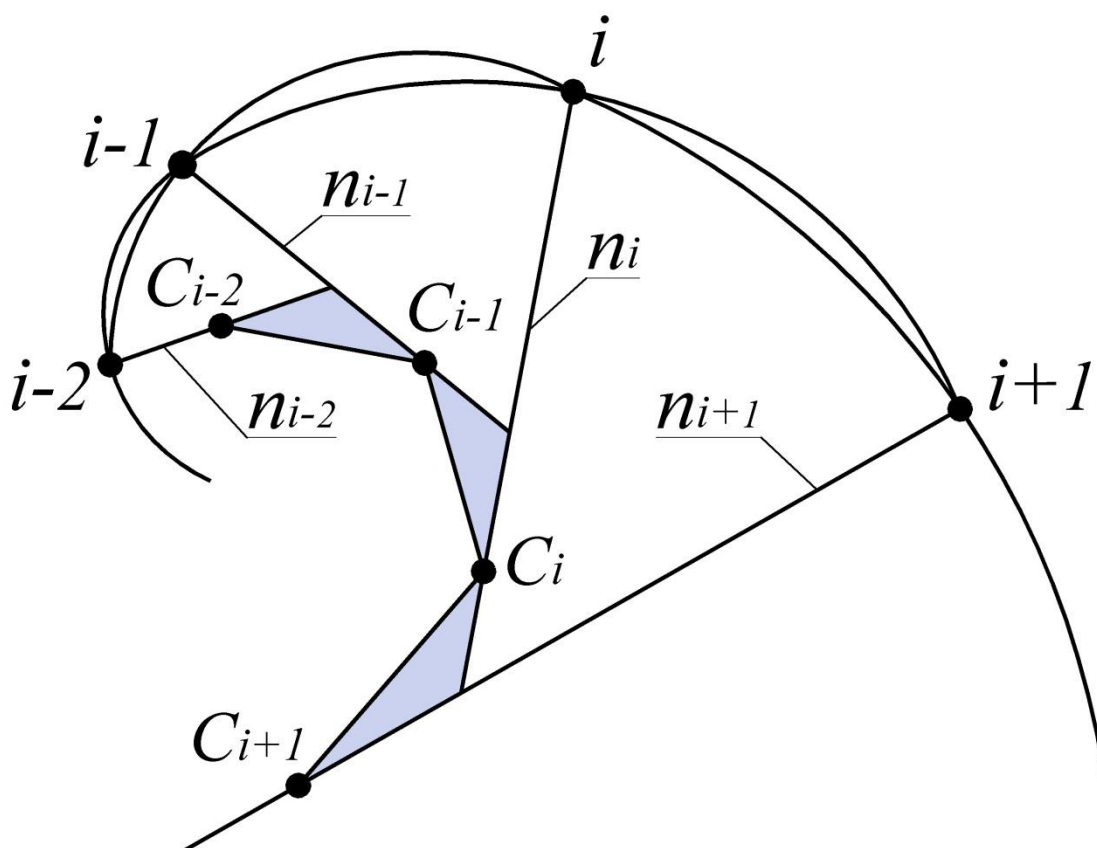


Рис. 2. Базисные треугольники, определяющие эволюту кривой

ДПЭ формируется вариативно по отдельным участкам, каждый из которых расположен внутри одного из базисных треугольников. Сгущение ДПЭ и ДПК заключается в

последовательном определении положения нормали и центра кривизны, соответствующих точке сгущения, а затем и самой точки сгущения. Положение каждого из указанных элементов назначается внутри предварительно определенного диапазона, учитывающего область возможного решения задачи [2].

В результате каждого сгущения внутри исходных базисных треугольников образуется два новых треугольника. Алгоритм сгущения отслеживает формирование цепочки базисных треугольников, параметры которых обеспечивают выполнение требований к ДПЭ. В процессе последовательных сгущений получаем сколь угодно большое количество узлов, задающих гладкую ДПЭ заданной длины.

Вариативный подход к формированию ДПК позволяет повышать порядок гладкости моделируемого обвода. Повышение порядка гладкости основано на условии касания монотонных кривых линий, который на единицу превышает порядок касания их эволют [1]. Моделирование ДПК с порядком гладкости выше второго основан на формировании не только эволюты ДПК (ДПЭ-1) но и эволют высших порядков (ДПЭ-2, ДПЭ-3) – эволюты к эволюте (рис. 3).

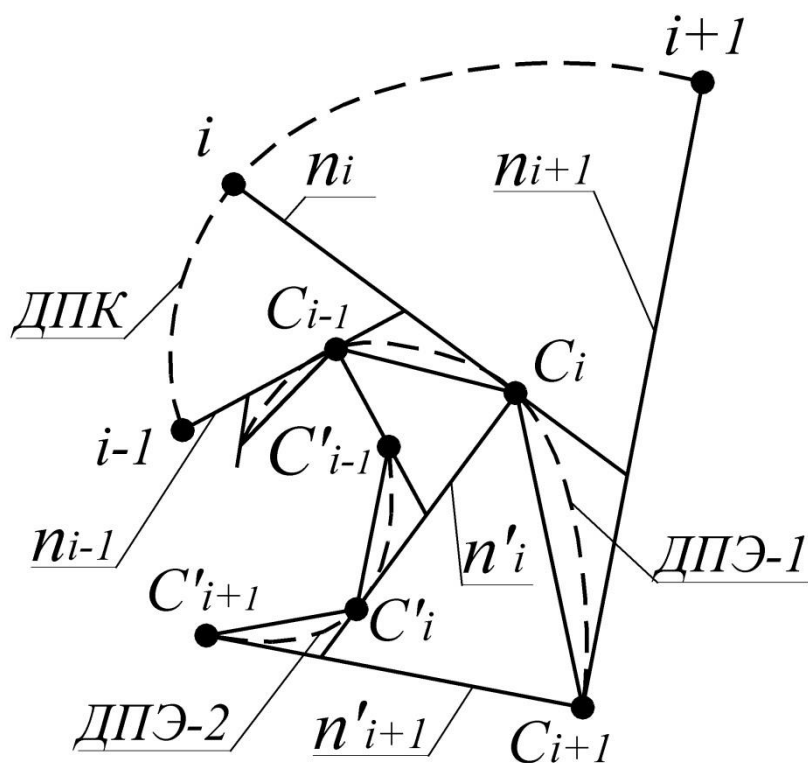


Рис. 3. Формирование кривой с использованием эволют высших порядков

Порядок гладкости ДПК и эволют обеспечивается качеством стыковки участков, определяемых базисными треугольниками, которые позволяют формировать кривую с

монотонным изменением кривизны. Задача повышения гладкости обвода сводится к обеспечению первого порядка гладкости эволюты высшего порядка.

В результате исследований, представленных в статье, предложен метод, позволяющий формировать ДПК произвольной конфигурации, состоящую из монотонных участков заданного порядка гладкости. Метод основан на формировании эволюты ДПК.

Предлагаемый метод позволяет для любой плоской ДПК:

- определить закономерность изменения положения нормалей и значений кривизны вдоль кривой;
- определить область возможных, по условиям задачи, значений кривизны и положений нормалей в узлах ДПК;
- назначить конкретные характеристики в исходных узлах и моделировать кривую по заданным геометрическим условиям.

Перспективой дальнейших исследований является использование предложенного метода для моделирования дискретно представленных поверхностей (ДПП). Моделирование ДПП требует решения задач прикладного характера:

- определение точки пересечения ДПК, расположенных в пересекающихся плоскостях;
- определение точки пересечения ДПК с прямой линией;
- назначение согласованных характеристик для различных семейств ДПК, образующих каркас ДПП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. М.: Изд-во ВЗПИ, 1965. 364 с.
2. Гавриленко Е.А. Определение положения точки сгущения при моделировании монотонной дискретно представленной кривой / Прикладная геометрия и инженерная графика // Труды Таврического государственного агротехнологического университета – Вып. 4, Т.53. Мелитополь: Изд-во ТГАТУ, 2012. С. 29-33.
3. Найдыш В.М. Дискретная интерполяция. Мелитополь: Изд-во Люкс, 2008. 250 с.