

УДК 514.18

## ТОЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЛОСКИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ КРИВЫХ

Гавриленко Е.А., к.т.н.,

Холодняк Ю.В.\* , аспирант

*Таврический государственный агротехнологический университет*

тел. (0619) 42-68-62

**Аннотация** – абсолютная погрешность дискретной интерполяции определяется как максимальное расстояние от хорд сопровождающей ломаной линии до границ области возможного расположения дискретно представленной кривой. Область расположения дискретно представленной кривой определяется исходя из ее геометрических характеристик, накладываемых на кривую условиями задачи.

**Ключевые слова** – дискретно представленная кривая (ДПК), метод сгущения, монотонное изменение кривизны, область расположения дискретно представленной кривой.

*Постановка проблемы.* Модель поверхности сложной формы, как правило, формируется на основе каркаса, элементами которого являются кривые линии. Функциональные свойства таких поверхностей обеспечивают заданные дифференциально-геометрические характеристики линейных элементов модели.

Дискретное геометрическое моделирование предполагает задание поверхности точечным массивом, а линейных элементов модели – точечным рядом или дискретно представленной кривой (ДПК). ДПК формируется методом сгущения, предполагающего определение промежуточных точек (точек сгущения) для исходного точечного ряда. Результатом моделирования ДПК является сопровождающая ломаная линия (СЛЛ), состоящая из прямолинейных отрезков, соединяющих узлы сгущенного точечного ряда.

Оценка точности, с которой СЛЛ представляет искомое решение, является обязательным этапом формирования ДПК по заданным условиям. Такая оценка может быть сделана исходя из свойств формируемой кривой, которые необходимо обеспечить в процессе моделирования.

---

\* Научный руководитель – к.т.н., доц. Гавриленко Е.А.

© Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В.

*Анализ предыдущих исследований.* В работах [1, 2] определяется область возможного расположения центров кривизны, соответствующих точкам ДПК с монотонным изменением кривизны. Для  $i$ -й точки эта область ограничена крайними из возможных по условиям задачи положениями нормали в точке  $i$  и перпендикулярами к хордам СЛЛ  $[i-1, i]$ ,  $[i, i+1]$ , проходящими через середины указанных хорд. Область определяется исходя из условия монотонного возрастания или убывания значений кривизны вдоль всего участка ДПК, на котором исходный точечный ряд позволяет это обеспечить. Назначение радиусов кривизны исходя из расположения соответствующих центров кривизны в пределах области их возможного расположения для всех точек ДПК, получаемой в процессе последовательных сгущений, – необходимое условие обеспечения заданной динамики изменения кривизны вдоль формируемого обвода.

Задача определения области расположения монотонной ДПК решена в [3]. Область определяется для каждого участка ДПК, ограниченного последовательными точками ряда, исходя из направления возрастания кривизны и радиусов соприкасающихся окружностей, соответствующих граничным точкам. Границами области являются коробовые линии окружностей, состоящие из двух дуг. Назначение точек сгущения внутри указанной области – обязательное условие формирования ДПК с монотонным изменением кривизны.

Способ формирования ДПК второго порядка гладкости с монотонным изменением кривизны предложен в [4]. Кривая формируется на основе цепочки базисных треугольников, которые ограничены касательными, проходящими через соседние точки, и хордами, соединяющими эти очки. В работе определены условия, при выполнении которых на любом шаге сгущения кривая может быть сформирована из дуг кривых Безье, свойства которых отвечают условиям задачи.

*Формулирование целей статьи.* Целью статьи является определение абсолютной погрешности дискретной интерполяции плоской ДПК исходя из заданных характеристик обвода

*Основная часть.* Алгоритмы формирования одномерных обводов разрабатываются исходя из свойств моделируемой кривой. Это может быть порядок гладкости обвода, фиксированные характеристики в его узлах, характер изменения значений кривизны вдоль кривой. Основной характеристикой плоских ДПК, формируемой нашими методами, является закономерное изменение радиусов кривизны вдоль кривой.

Под закономерным изменением кривизны вдоль формируемого обвода будем понимать, что обвод содержит минимальное по условиям задачи количество особых точек: точек перегиба и точек смены возрастания вдоль кривой значений кривизны.

Обвод формируется по участкам, вдоль которых значения кривизны монотонно возрастают или убывают, с последующей их стыковкой.

Рассмотрим, как характеристики обвода ограничивают область возможного расположения его выпуклого участка.

При назначенных положениях касательных в точках исходной ДПК, область ее возможного расположения на участке  $(i, i+1)$  – базисный треугольник  $(BT_i)$ , ограниченный касательными к ДПК в точках  $i$  и  $i+1$  ( $t_i$ ) и хордой  $[i, i+1]$  (рис. 1).

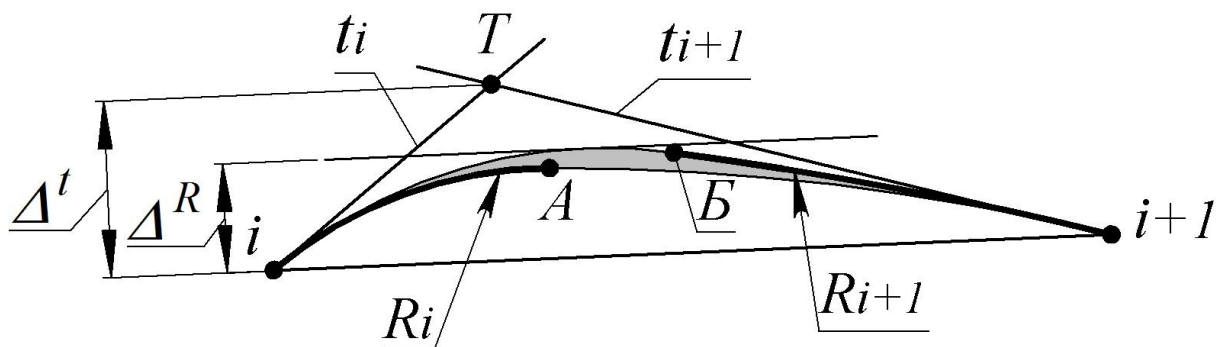


Рис. 1.

Назначение точек сгущения ( $ic_2$ ) внутри исходных БТ, а затем и внутри БТ, формируемых в процессе моделирования обеспечивает первый порядок гладкости формируемой ДПК.

Все выпуклые кривые линии, отвечающие условиям задачи (первый порядок гладкости, касание с назначенными касательными прямыми в исходных точках) располагаются внутри цепочки исходных БТ. Максимальное расстояние от хорды СЛЛ до вершины соответствующего БТ ( $\Delta^t$ ) будем рассматривать как абсолютную максимальную погрешность дискретной интерполяции ДПК первого порядка гладкости, первого порядка фиксации сопровождающей ломаной линией.

Увеличение порядка гладкости без наложения требований к закономерности изменения радиусов кривизны не позволяет уточнить область возможного расположения кривой. Уточнить указанную область позволяет условие монотонного изменения радиусов кривизны вдоль ДПК [3].

Для участка ДПК  $(i, i+1)$ , вдоль которого значения радиусов кривизны монотонно возрастают (рис. 1):

- нижняя граница области расположения кривой состоит из дуги  $(i - A)$   $i$ -й соприкасающейся окружности и дуги  $(A - i+1)$  окружности, определяемой точкой  $i+1$ , касательной к ДПК в этой точке ( $t_{i+1}$ ) и

касанием с  $i$ -й соприкасающейся окружностью;

- верхняя граница сформирована дугой  $(i+1 - B)$   $i+1$ -й соприкасающейся окружности и дугой  $(i - B)$  окружности, определяемой точкой  $i$ , касательной  $ti$  и касанием с  $i$ -й соприкасающейся окружностью.

Область расположения монотонной кривой определяется положением касательных прямых и радиусами соприкасающихся окружностей ( $R_i$ ), назначенных в точках ДПК.

Максимальное расстояние от хорды СЛЛ до верхней границы соответствующей области расположения кривой ( $\Delta^R$ ) будем рассматривать как абсолютное отклонение СЛЛ от искомого решения при моделировании ДПК с монотонным изменением кривизны. При дискретной интерполяции обвода с монотонным изменением кривизны, в исходных узлах которого радиусы соприкасающихся окружностей не заданы, область расположения кривой оценивается исходя из крайних возможных, по условиям задачи, значений фиксированных характеристик. Эти характеристики определяются исходя из равенства нулю или бесконечности радиусов кривизны в первой и последней точках, ограничивающих монотонную ДПК [3].

Точность, с которой точечный ряд представляет именно ту кривую линию, на которой назначены исходные точки, можно оценить значением  $\Delta^R$ , определенным для исходной СЛЛ. При такой постановке задачи повысить точность возможно только за счет уплотнения исходных данных.

Как правило, при решении практических задач, необходимо сформировать точечный ряд, представляющий любую кривую линию, свойства которой отвечают условиям задачи. Алгоритм моделирования такой кривой обеспечивает наличие области возможного расположения точки сгущения на каждом участке ДПК, получаемой после каждого шага сгущения. Результатом моделирования является СЛЛ, для которой максимальное отклонение от искомого решения не превышает заданной точности формирования ДПК:

$$\Delta_{max}^R \leq \varepsilon.$$

Другой вариант обеспечения заданной точности формирования ДПК предполагает контроль ширины области возможного расположения кривой –  $\delta_i$  (рис. 2).

Исходный точечный ряд сгущается до тех пор, пока максимальная ширина области станет меньше заданной точности формирования кривой:

$$\delta_{max} \leq \varepsilon.$$

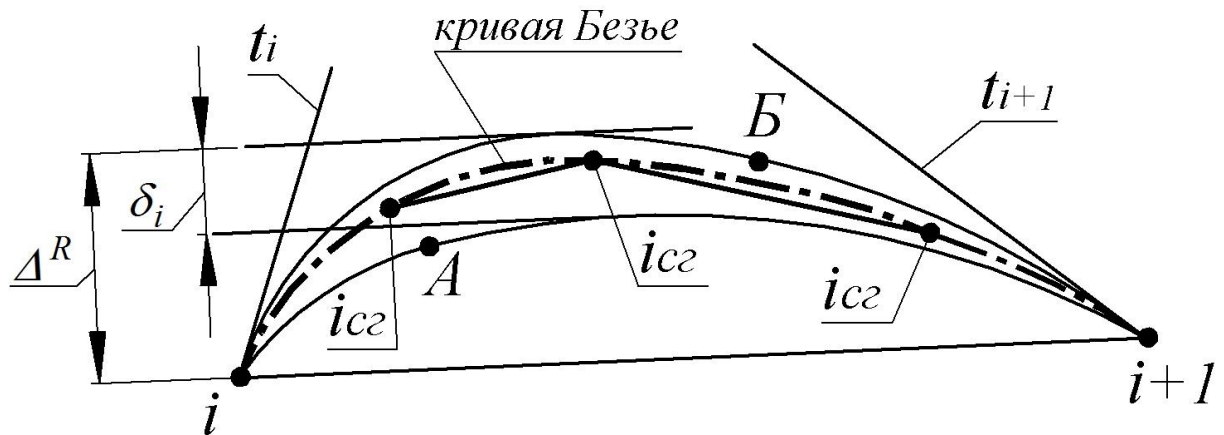


Рис. 2.

После этого каждый участок ДПК формируется дугой непрерывной кривой линии, свойства которой отвечают условиям задачи. Разработанный нами метод формирования ДПК на основе базисных треугольников [4] позволяет формировать участки ДПК дугами кривых Безье, состыкованных со вторым порядком гладкости. При этом обеспечивается монотонное изменение значений кривизны вдоль ДПК. На каждой дуге кривой Безье назначаются точки сгущения. Положение точек сгущения обеспечивает расположение полученных хорд СЛЛ внутри области расположения кривой без пересечения ее границ. Полученная СЛЛ с заданной точностью представляет формируемую кривую.

*Выводы.* Предложенные способы оценки максимальной абсолютной погрешности дискретной интерполяции позволяют обеспечить заданную точность моделирования ДПК. Результатом моделирования является СЛЛ, максимальное отклонение которой от искомого решения не превышает заданной величины. Отклонение оценивается максимальным расстоянием от звена СЛЛ до границ области возможного расположения кривой. Границы области определяются фиксированными характеристиками, назначенными в узлах обвода и принятой динамикой их изменения вдоль ДПК.

#### Литература

1. Гавриленко Є.А. Визначення положення центрів кривини дискретно представлені кривої / Є.А. Гавриленко // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 5 (76) - С. 81-87.
2. Гавриленко Є.А. Визначення діапазонів положення нормалей у вузлах ДПК з монотонною зміною кривини / Є.А. Гавриленко, В.В. Гнатушенко, В.М. Щербина // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 5

(82)

С. 43-47.

3. *Найдиш А.В.* Розрахунок граничних значень геометричних характеристик при дискретному геометричному моделюванні монотонної кривої / А.В. Найдиш, Є.А. Гавриленко, В.Ф. Ялпачик // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь, 2012. – Вип. 12, т. 5. – С. 192-196.
4. *Холодняк Ю.В.* Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю.В. Холодняк, Є.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / КНУБА. – К., 2013. – Вип. 91. – С. 488-492.

### ТОЧНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ПЛОСКИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ

Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк

**Анотація** – абсолютна похибка дискретної інтерполяції визначається як максимальна відстань від хорд супровідної ламаної лінії до границь області можливого розташування дискретно представленої кривої. Область розташування дискретно представленої кривої визначається виходячи з її геометричних характеристик, що накладаються на криву умовами задачі.

### ACCURACY OF DISCRETE INTERPOLATION OF FLAT DISCRETELY REPRESENTED CURVES

Yu. Kholodnyak, Eu. Gavrilenko

#### *Summary*

The absolute accuracy of discrete interpolation defined as the maximum distance from the chords of accompanying polylines to the border of area of possible locations of discretely represented curve. The area of location of discretely represented curve is determined based on its geometric characteristics, which are superimposed on the curve by conditions of the problem.