

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

УДК 514.18

Є.А. ГАВРИЛЕНКО¹, Ю.В. ХОЛОДНЯК¹, В.І. МЕЖУЄВ²

¹Таврійський державний агротехнологічний університет

²Бердянський державний педагогічний університет

**ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТІ РОЗТАШУВАННЯ ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ ПРИ
МОДЕЛЮВАННІ ОБВОДУ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ГЛАДКОСТІ**

У роботі розглядається задача призначення положення точки перегину при моделюванні дискретно представленої кривої другого порядку гладкості. Положення особливої точки та характеристик, що їй відповідають, визначаються всередині наперед визначених діапазонів, які враховують область можливого розв'язку задачі.

Ключові слова: дискретно представлена крива, точка перегину, порядок гладкості, нормаль, дотична

E.A. GAVRILENKO¹, YU.V. KHOLODNYAK¹, V.I. MEZHUEV²

¹Tavria State Agrotechnological University

²Berdyansk State Pedagogical University

**DETERMINATION OF THE REGION OF POSITION OF INFLECTION POINT AT
MODELING OF THE SECOND ORDER CONTOUR**

Annotation

The problem of appointment of inflection points position at modelling of discretely represented curve (DRC) second-order of smoothness is considered in this article.

The problem is solved taking into account provisions of the normals, tangents and curvature radiuses which are appointed at the starting points of the curve. Position of the inflection point and the characteristics that correspond to it, are determined within the ranges which take into account the area of possible solutions of the problem.

The following steps of appointment of the inflection point location are proposed in the work: definition of pre-region of the inflection point location; clarification of the region with take into account the characteristics of curve, which appointed at the points that limit portion of DRC; appointment of position of the inflection point and the tangent which passes through it.

Further, the problem is reduced to the formation of a convex and concave portions of KDP which are joined at the inflection point with the second order of smoothness.

The results which are obtained in this work can be used for modelling of curves of the second order of smoothness with the regular change of curvature. The resulting curves can be used as framework elements at modelling of surfaces, which interact with the medium (e.g., gas, liquid).

Keywords: discretely represented curve, inflection point, order of smoothness, normal, tangent

Постановка проблеми. Моделювання кривої, яка задана упорядкованою множиною точок, що їй належать, (дискретно представлена крива або ДПК) передбачає дискретне представлення як вихідних даних, так і результату моделювання. Геометричні характеристики ДПК не визначені однозначно на усіх етапах моделювання. Задача забезпечення заданих положень дотичних та значень радіусів кривини у точках ДПК (формування ДПК другого порядку гладкості) може бути вирішена наступним чином.

- Визначаються ділянки ДПК, на яких вихідний точковий ряд дозволяє сформувати криву, уздовж якої значення радіусів кривини монотонно зростають або убують.

- Визначається область можливого розташування дотичних та діапазони можливих значень радіусів кривини у вихідних точках, при яких задача формування монотонної кривої має розв'язок.

- Призначаються конкретні характеристики ДПК у вихідних точках та визначається область можливого розташування монотонної кривої, що їм відповідає.

У процесі послідовних згущень точкового ряду (збільшення кількості вузлів, що представляють криву) діапазони можливих, за умовами задачі, значень диференціально-геометричних характеристик у точках ДПК зменшуються.

Алгоритм згущення забезпечує прямування діапазонів до призначених значень.

Задачу формування ДПК другого порядку гладкості будемо вважати вирішеною, якщо область можливого розташування її точок та діапазони можливих значень її характеристик не перевищують заданих значень.

Визначення закономірності зміни диференціально-геометричних характеристик ДПК та контроль отримуваних у результаті моделювання діапазонів їх можливих значень – необхідна умова дискретного геометричного моделювання одновимірних обводів другого порядку гладкості.

Моделювання кривих із закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик доцільно виконувати по наступним етапам:

1) вихідна крива розбивається на опуклі та увігнуті ділянки, які моделюються окремо;

2) формуються ділянки кривої, що містять точки зміни опуклості та увігнутості.

Задача формування ділянки, що містить точку перегину, полягає у забезпеченні стиковки опуклої та увігнутої ділянки кривої з прямою лінією – дотичною до обводу у цій точці. При формуванні обводу другого порядку гладкості необхідно забезпечити монотонне зростання радіусів кривини, значення яких прямує до нескінченності при наближенні до точки перегину.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] запропоновано спосіб аналізу вихідного точкового ряду з метою визначення ділянок, на основі яких може бути сформована монотонна ДПК. На першому етапі аналізу точковий ряд розбивається на опуклі та увігнуті ділянки кривої. Для цього визначається напрям обходу кожних із трьох послідовних точок вихідної ДПК: для опуклої кривої – за стрілкою годинника, для увігнутої – проти. Отримані опуклі та увігнуті ДПК із урахуванням співвідношення радіусів прилягаючих кіл розбиваються на ділянки з монотонним зростанням або убуттям радіусів кривини. Прилягаючі кола визначаються проходженням через три послідовні точки вихідної ДПК. Уздовж ДПК з монотонним зростанням радіусів кривини радіуси прилягаючих кіл зростають монотонно.

Значення радіуса кривини та положення дотичної у точці ДПК однозначно визначаються положенням відповідного центра кривини. Для ДПК, уздовж якої радіуси кривини зростають, область розташування центра кривини, що відповідає точці i (рис. 1) обмежена граничними, із можливих за умовами задачі, положеннями нормалі (n_i, n_i') та перпендикулярами до відповідних хорд супровідної ламаної лінії, що проходять через їх середини [2]. На рис. 1 це зафарбований трикутник.

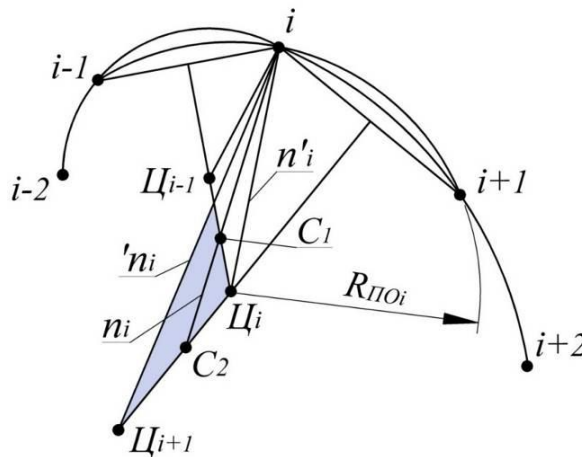


Рис. 1. Вихідна область розташування i -го центра кривини

Граничні положення нормалі визначаються проходженням через центри прилягаючих кіл (ПК):

- точка C_{i+1} – центр ПК($i, i+1, i+2$) (коло, що проходить через точки $i, i+1, i+2$) або точка C_{i-1} – центр ПК($i-2, i-1, i$) визначають нормаль в положенні n_i ;
- точка C_i – центр ПК($i-1, i, i+1$) визначає нормаль в положенні n_i' .

Нормалі до ДПК, призначені у вихідних точках (n_i), центри кривини, призначені на цих нормалях (C_i), та хорди, що з'єднують центри кривини, обмежують ланцюг базисних трикутників (BT^n) – базисні трикутники нормалей (рис. 2).

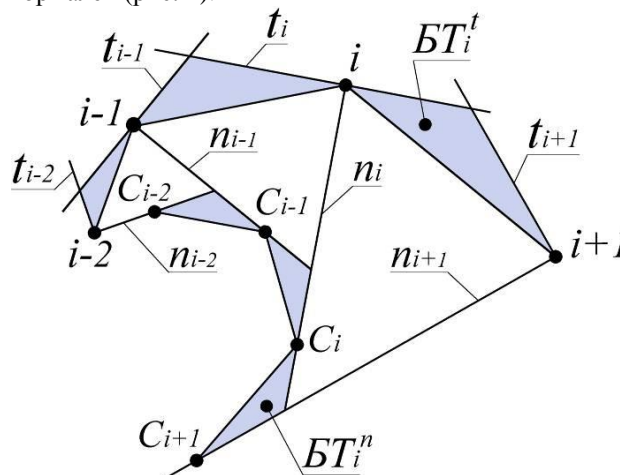


Рис. 2. Базисні трикутники нормалей

Дотичні до ДПК, призначені у вихідних точках, (t_i) та хорди супровідної ламаної лінії, що з'єднують ці точки, визначають базисні трикутники дотичних (BT^t).

ДПК другого порядку гладкості із монотонною зміною кривини може бути задана еволютою, що формується на основі ланцюга BT^n [3], або може формуватися на основі ланцюга BT^t [4, 5].

Формулювання цілей статті. Метою статті є визначення області можливого розташування точки перегину ДПК другого порядку гладкості та призначення положень дотичної та нормалі, що відповідають цій точці.

Основна частина. Нехай ДПК задана координатами точок та визначено опуклу та увігнуту ділянки – ..., $i-1, i$ та $i+1, i+2, \dots$ відповідно [1]. Позначимо дотичні до кривої, що призначені у точках i та $i+1$ як t_i та t_{i+1} , нормалі – n_i та n_{i+1} , а радіуси кривини – R_i та R_{i+1} відповідно.

Поставлена задача має розв'язок при виконанні наступних умов:

1) значення радіусів кривини на опуклій та увігнутій ділянці збільшуються у напрямку точки перегину;

2) стичні кола, що проходять через точки i та $i+1$ (CK_i та CK_{i+1}) не перетинаються;

3) положення дотичних t_i та t_{i+1} , що визначають ділянку ДПК $i \dots i+1$, мають забезпечити виконання умови: точка перетину t_i з CK_{i+1} (K_i) та точка перетину t_{i+1} з CK_i (K_{i+1}) розташовані по різні боки від хорди $[i, i+1]$ (рис. 3).

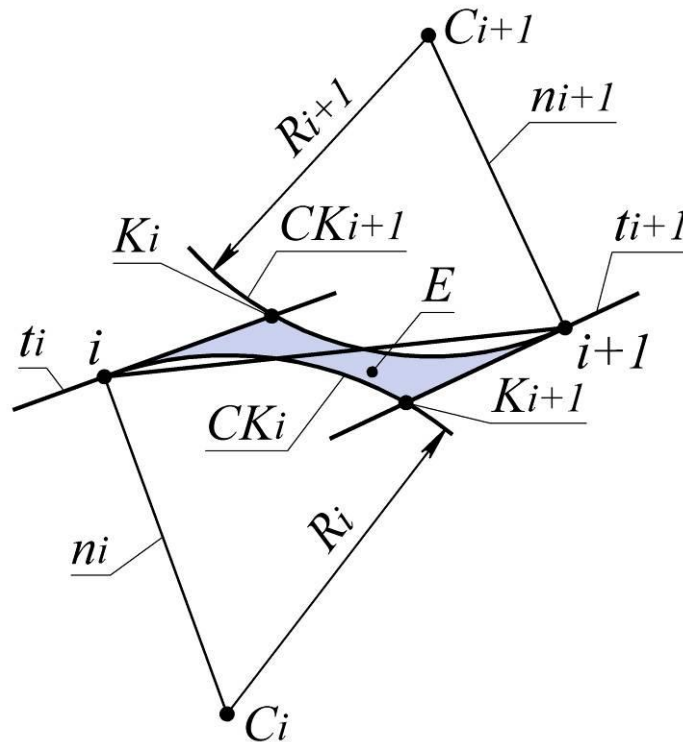


Рис. 3. Визначення області розташування точки перегину

Вказані умови визначають в першому наближенні область можливого розташування точки перегину (точка E). Ця область обмежена дотичними t_i , t_{i+1} та дугами CK_i , CK_{i+1} .

Після призначення положення дотичної до кривої у точці E (t_E) задача зводиться до стиковки ділянок кривої з дотичною.

Визначимо діапазон можливого розташування дотичної t_E та нормалі n_E . Діапазоном положення нормалі n_E є кут α (рис. 4), сторонами якого є:

- пряма n'_E , що проходить через центри кривини ДПК в точках i та $i+1$ (C_i та C_{i+1});
- пряма $'n_E$, яка перпендикулярна до прямої AB , що дотична одночасно до CK_i та CK_{i+1} .

Відповідно діапазон положень дотичної t_E обмежений прямою $'t_E \equiv AB$ та прямою t'_E , яка перпендикулярна до прямої $(C_i; C_{i+1})$.

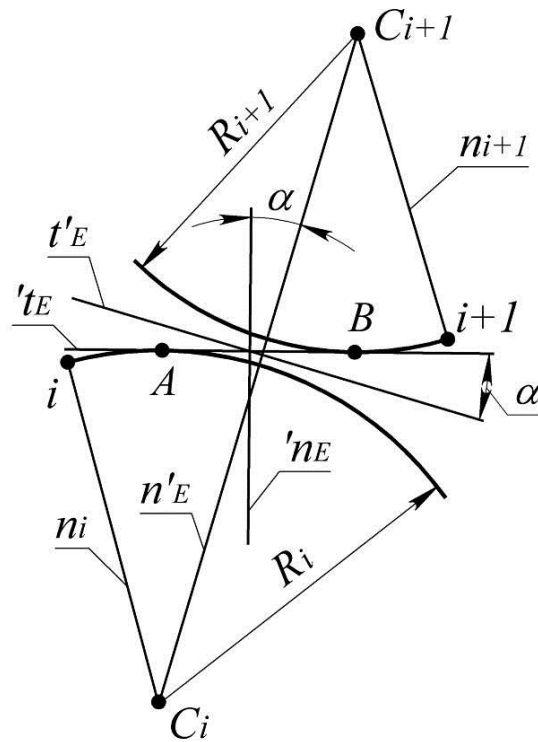


Рис. 4. Визначення діапазонів характеристик, що відповідають точці перегину

Після призначення напрямку нормалі n_E (дотичної t_E) уточнюється діапазон можливого розташування нормалі. Уточнений діапазон обмежений положеннями $'n_E$ та n'_E , при яких нормаль ДПК проходить через центри кривини C_i та C_{i+1} відповідно (рис. 5). При цьому положення дотичної t_E обмежене прямими $'t_E$ та t'_E , дотичними до СК i та СК $i+1$ відповідно.

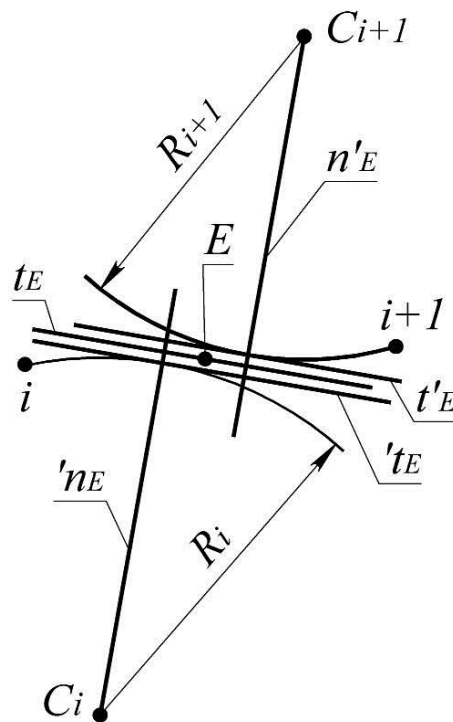


Рис. 5. Уточнення області розташування точки перегину

Отже, уточнена область можливого розташування точки E обмежена граничними положеннями нормалі n_E ($'n_E$, n'_E) та дотичної t_E ($'t_E$, t'_E). У випадку призначення граничних положень

нормалі n_E (дотичної t_E) монотонні ділянки кривої \dots, i, E та $E, i+1, \dots$ можуть бути зістиковані із першим порядком гладкості. Призначення точки перегину всередині отриманої області є необхідною умовою формування ДПК другого порядку гладкості із закономірною зміною кривини.

Після визначення положення точки E діапазони можливого розташування n_E та t_E уточнюються виходячи із умови проходження через точку перегину. Діапазоном положень нормалі n_E є кут, обмежений прямими, що проходять через точки C_i та C_{i+1} . Відповідно область розташування дотичної t_E визначається прямими, дотичними до стичних кіл $СК_i$ та $СК_{i+1}$. Остаточне положення n_E та t_E призначається всередині отриманих діапазонів.

Після призначення положення точки перегину, нормалі n_E , дотичної t_E та радіуса кривини $R_E = \infty$ ділянки кривої \dots, i, E та $E, i+1, \dots$ моделюються окремо. При цьому гілки еволюти, що відповідають ділянкам кривої, асимптотично наближуються до нормалі n_E .

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновано спосіб визначення області розташування точки перегину дискретно представлені кривої другого порядку гладкості. Спосіб передбачає проведення аналізу вихідного точкового ряду. У результаті аналізу визначаються опуклі та увігнуті ділянки ДПК, ділянки, які містять точки перегину, та ділянки, уздовж яких радіуси кривини монотонно зростають або убивають. Задача розв'язується із урахуванням положень нормалей, дотичних та значень радіусів кривини, призначених у вихідних вузлах ДПК. Положення дотичних, нормалей та значення радіусів кривини у вихідних точках призначається виходячи із прийнятої закономірності зміни кривини уздовж кривої. Призначення точки перегину всередині визначеної області є необхідною умовою моделювання ДПК другого порядку гладкості із закономірною зміною радіусів кривини. Задачу подальших досліджень є розробка алгоритму моделювання ДПК на ділянці, що містить точку перегину, який забезпечує зростання радіусів кривини від R_i до $R_E = \infty$ на ділянці i, E та від R_{i+1} до $R_E = \infty$ на ділянці $E, i+1$. Це дасть можливість формувати ДПК другого порядку гладкості на основі довільного точкового ряду.

Література

1. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны: дис. канд. техн. наук / Е.А. Гавриленко. – Мелітополь, 2004. – 182 с.
2. Гавриленко Є.А. Визначення положення центрів кривини дискретно представлені кривої / Є.А. Гавриленко // Системні технології / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 5 (76). – Дніпропетровськ, 2011. – С. 81-87.
3. Гавриленко Е.А. Формирование плоских обводов заданного порядка гладкости / Е.А. Гавриленко // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90.– С. 74-78.
4. Холодняк Ю.В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представлені кривої / Ю.В. Холодняк, Є.А. Гавриленко // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91.– С. 292-297.
5. Холодняк Ю.В. Формування ділянки дискретно представлені кривої з монотонною зміною кривини / Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Вип. 4, Т.57. – С. 211-216.