

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

## **ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ**

### **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**«Економетрика: економіко-математичні методи»**

Запоріжжя, 2024

*Рекомендовано до друку рішенням вченої ради  
факультету економіки та бізнесу  
(протокол № 5 від «10» грудня 2024 р.)*

**Рецензенти:**

- Спірінцев Д.В.** - кандидат технічних наук, завідувач кафедри математики і фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького.
- Тебенко В.М.** - кандидат економічних наук, доцент кафедри економіки і бізнесу Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного.

**Кравець О.В.** Економіко-математичні методи та моделі: конспект лекцій. Запоріжжя: ТДАТУ, 2024. 111 с.

Конспект лекцій містить теоретичний матеріал, контрольні запитання, тести для самоконтролю до кожної теми, перелік рекомендованої літератури. Конспект складено з метою допомогти здобувачам вищої освіти під час опанування тем з дисципліни «Економетрика: економіко-математичні методи». Матеріали конспекту лекцій можуть бути використані здобувачами вищої освіти в процесі підготовки до практичних занять та іспиту з дисципліни. Конспект лекцій є коротким викладом базових тем з дисципліни, який допоможе у стислий проміжок часу опанувати цей освітній компонент.

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів зі спеціальності 073 «Менеджмент» за ОПП «Менеджмент».

УДК 330.45

© Кравець О.В., 2024

© Таврійський державний  
агротехнологічний університет, 2024

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Передмова</b>                                                                                                                  | 5  |
| <b><u>Змістовний модуль 1</u></b> «Загальні поняття моделювання, створення моделей оптимізації виробничої структури підприємства» | 7  |
| <b><u>Тема 1.</u></b> Загальні поняття моделювання соціально-економічних систем                                                   | 7  |
| 1. Соціально-економічні системи, методи їх дослідження та моделювання                                                             | 7  |
| 2. Етапи економіко-математичного моделювання                                                                                      | 9  |
| 3. Класифікація економіко-математичних методів та моделей                                                                         | 14 |
| Контрольні питання                                                                                                                | 16 |
| Тести для самоконтролю                                                                                                            | 16 |
| <b><u>Тема 2.</u></b> Економіко-математична модель задачі оптимізації управління виробничими процесами підприємства.              | 21 |
| 1. Принцип оптимальності у плануванні створення раціональної системи управління підприємством                                     | 21 |
| 2. Загальний запис економіко - математичної моделі управління виробничими процесами та класифікація задач лінійного програмування | 22 |
| 3. Форми запису задач лінійного програмування.                                                                                    | 24 |
| 4. Приклад запису задачі та економічна інтерпретація елементів математичної моделі.                                               | 27 |
| Контрольні питання                                                                                                                | 29 |
| Тести для самоконтролю                                                                                                            | 29 |
| <b><u>Тема 3.</u></b> Оптимізація виробничих процесів за допомогою геометричного методу розв’язку задач лінійного програмування   | 36 |
| 1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування                                                                        | 36 |
| 2. Загальний алгоритм рішення задач графічним методом                                                                             | 40 |
| 3. Приклад рішення задачі                                                                                                         | 41 |
| Контрольні питання                                                                                                                | 43 |
| Тести для самоконтролю                                                                                                            | 44 |
| <b><u>Змістовний модуль 2</u></b> «Методи оптимізації, аналіз, обґрунтування та прийняття управлінських рішень »                  | 47 |

|                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b><u>Тема 4.</u></b> Пошук оптимального рішення, загальне поняття симплекс методу.                                                                 | 47  |
| 1. Поняття симплекс методу.                                                                                                                         | 47  |
| 2. Створення та обґрунтування економіко-математичної моделі оптимізації виробничого процесу                                                         | 48  |
| 3. Запис матриці задачі, поняття симплексної таблиці.                                                                                               | 51  |
| Контрольні питання                                                                                                                                  | 53  |
| Тести для самоконтролю                                                                                                                              | 53  |
| <b><u>Тема 5.</u></b> Пошук оптимального рішення, загальний алгоритм та економічний зміст математичних розрахунків.                                 | 59  |
| 1. Загальний алгоритм, пошуку оптимального рішення економічних задач                                                                                | 59  |
| 2. Приклад рішення задачі та економічний зміст математичних розрахунків                                                                             | 63  |
| Контрольні питання                                                                                                                                  | 80  |
| Тести для самоконтролю                                                                                                                              | 80  |
| <b><u>Тема 6.</u></b> Пошук оптимального рішення економічних задач пов'язаних з логістикою перевезень, загальна постановка задачі побудова матриці. | 85  |
| 1. Загальна постановка та математична модель задачі                                                                                                 | 85  |
| 2. Поняття закритого та відкритого типу задачі                                                                                                      | 87  |
| 3. Побудова матриці задачі, приклад та алгоритм рішення                                                                                             | 89  |
| Контрольні питання                                                                                                                                  | 91  |
| Тести для самоконтролю                                                                                                                              | 92  |
| <b><u>Тема 7.</u></b> Пошук оптимального рішення економічних задач пов'язаних з логістикою перевезень, методи найменшої вартості та потенціалів.    | 96  |
| 1. Запис задачі у математичній формі, побудова системи обмежень                                                                                     | 96  |
| 2. Поняття методу найменшої вартості, побудова опорного плану                                                                                       | 98  |
| 3. Метод потенціалів, загальний алгоритм рішення.                                                                                                   | 101 |
| 4. Приклад застосування методу, при плануванні забезпечення сировиною підприємств.                                                                  | 102 |
| Контрольні питання                                                                                                                                  | 108 |
| Тести для самоконтролю                                                                                                                              | 108 |
| Рекомендована література та інформаційні ресурси                                                                                                    | 111 |

## Передмова

Застосування математичного апарату в управлінні ґрунтується на засвоєнні необхідної бази математичних знань. Економіко-математичні методи є одним із методологічних інструментів у професійній діяльності менеджерів, економістів-аналітиків, підприємців, фінансистів, управлінців усіх рівнів та інших фахівців економічних спеціальностей, який допомагає їм якісно виконувати власні функціональні обов'язки.

Математичну модель можна представити як внутрішньо-замкнуту систему математичних співвідношень без протиріч, яка служить дієвим інструментом відтворення певного класу якісних або кількісних функціональних характеристик, властивих економічному процесу чи явищу, що вивчається. Вона розвиває наші уявлення про закономірності та взаємозв'язки економічних процесів і допомагає формуванню наукового мислення та навичок порівняльного аналізу на новому, більш високому рівні.

Тому засвоєння математичних методів і інструментарію наукових досліджень дасть можливість майбутньому фахівцю сформувані необхідні компоненти мислення: компетентність, світогляд і культуру, які будуть потрібні як у теоретичному плані, так і в плані орієнтації в професійній практичній діяльності.

У конспекті лекцій «Економіко-математичні методи та моделі» розкриваються основні елементи застосування математичного апарату при формуванні та прийнятті управлінських рішень зокрема:

- загальні відомості про побудову економіко-математичних моделей;
- способи оцінки параметрів економіко-математичних моделей;
- основні поняття економіко-математичного моделювання;
- класифікація економіко-математичних моделей;
- основні моделі розв'язання оптимізаційних завдань в економіці;
- основні види моделей математичного програмування та правила їх застосування.

За підсумком засвоєння викладеного матеріалу здобувачі вищої освіти

повинні уміти самостійно витрушувати наступні завдання:

- проводити розрахунки параметрів економіко-математичних моделей;
- підбирати модель для розв'язання конкретних оптимізаційних завдань;
- знаходити розв'язки виробничих завдань графічним та симплексним методами;
- знаходити розв'язки виробничих задач пов'язаних із транспортними перевезеннями.

Матеріал конспекту структурований та поданий у доступній формі, що сприятиме ефективному засвоєнню знань. Конспект лекцій забезпечує комплексну підтримку здобувачів вищої освіти під час самостійного опрацювання тем лекційного матеріалу, що дозволяє у свою чергу підвищити якість отриманих знань.

## Тема 1

### Загальні поняття моделювання соціально-економічних систем

**Мета:** засвоєння теоретичних засад моделювання соціально-економічних систем та етапів побудови економіко-математичних моделей.

#### *План викладання і засвоєння матеріалу:*

1. Соціально-економічні системи, методи їх дослідження та моделювання.
2. Етапи економіко-математичного моделювання
3. Класифікація економіко-математичних методів та моделей

**Література** {[1] с.8-20, [6] 10-25, [8] с.28-40, [9] 15-35, [11] 18-40, [12] 25-95, }

#### *1. Соціально-економічні системи, методи їх дослідження та моделювання.*

Під соціально-економічною системою розуміють складну імовірнісну динамічну систему, що охоплює процеси виробництва, обміну, розподілу й споживання матеріальних і інших благ. Вона відноситься до класу кібернетичних систем, тобто систем керованих. Розглянемо насамперед поняття, пов'язані з такими системами й методами їхнього дослідження.

**Системою** називається комплекс взаємозалежних елементів разом з відносинами між елементами й між їхніми атрибутами.

Основним методом дослідження систем є **метод моделювання**, тобто спосіб теоретичного аналізу й практичної дії, спрямований на розробку й використання моделей.

**Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є:**

- 1) аналіз економічних об'єктів і процесів;
- 2) економічне прогнозування, передбачення розвитку економічних процесів;
- 3) вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарської ієрархії.

**Модель** - це концентроване вираження найбільш істотних взаємозв'язків поведінки керованої системи в математичній формі.

Модель дозволяє імітувати поведінку системи в широкому діапазоні умов, що змінюються, включаючи і такі, які у реальному житті спостерігати важко, або,

які рідко зустрічаються, чи пов'язані з великими витратами і ризиком. Побудова такої моделі виключає необхідність виконання натуральних експериментів, які, як відомо, вимагають великих витрат часу і коштів. Моделі різноманітних виробничих ситуацій дозволяють дослідити велике число варіантів розвитку систем, що розглядаються, і обрати найкращий (оптимальний), з точки зору досягнення поставленої мети.

**При створенні оптимальної моделі виробничої структури в будь-якому сільськогосподарському підприємстві здебільшого ставляться такі завдання:**

- визначення оптимальної структури наявних площ(поголів'я тварин);
- оцінка отримання очікуваної врожайності ( продуктивності тварин);
- оцінка економічного ефекту, одержаного від капітальних вкладень;
- вирівнювання зайнятості робочої сили;
- визначення планової собівартості продукції, що виробляється;
- рівномірне використання протягом року основних засобів виробництва і праці ( збалансованість “піків”);
- прискорення обігу капіталу на створення (формування) основних засобів виробництва.

**В кінцевому підсумку, побудова і запровадження такої моделі повинна забезпечити отримання максимального економічного ефекту, зокрема, максимізація виробництва продукції при найменших виробничих витратах і максимально раціональному використанню наявних грошових та трудових ресурсів господарства .**

*В умовах ринкової економіки моделювання економічних процесів займає особливе місце, оскільки натуральний експеримент вимагає великих капіталовкладень та витрат часу.* Водночас відзначимо, що в сільському господарстві, враховуючи особливості цієї галузі, він часто буває взагалі неможливим. У такому випадку створення обґрунтованої економічної моделі стає єдиним способом отримання реальної інформації про поведінку об'єкта .

На основі економіко-математичних моделей розвитку виробництва



визначається склад і розмір основних і допоміжних галузей господарювання, розмір площ, обсяги виробництва продукції, економічні показники - прибуток, рівень рентабельності і інші. Основними критеріями оптимальності виробничої структури є максимізація прибутку, рівня рентабельності, мінімізація собівартості, матеріальних, грошових, трудових витрат на випуск основної продукції.

**Побудова економіко-математичної моделі дозволяє створити раціональну виробничу структуру підприємства в умовах непостійності соціально-економічних чинників, таких як інфляція, попит на продукцію, погодні умови та інші.**

## *2. Етапи економіко-математичного моделювання*

Оптимізація виробничих процесів у сільськогосподарських підприємствах, як правило, повинна виконуватись за наступною схемою:

1. Постановка задачі і обґрунтування критеріїв оптимальності.
2. Визначення переліку змінних і обмежень.
3. Збір інформації і розробка техніко-економічних коефіцієнтів і констант.
4. Побудова моделі і її математичне вираження.
5. Перенесення інформації на ЕОМ та її рішення.
6. Аналіз результатів рішення, коректування моделі, повторне рішення задачі на ЕОМ за коректованою моделлю.
7. Економічний аналіз різноманітних варіантів і вибір проекту плану.

В конкретних умовах в залежності від характеру задачі послідовність етапів моделювання економічних процесів може змінюватися. Так, часто після другого етапу – визначення переліку змінних і обмежень рекомендується математичний запис моделі. Потім йде третій і четвертий етапи. Однак для кращого розуміння і засвоєння сутності розглядуваних в моделі умов, виражених у вигляді обмежень, спочатку доцільно їх розглянути в розвернутому вигляді, а потім у вигляді математичних символів і індексів. Така послідовність дозволяє краще зрозуміти логіку математичного запису моделі.

**Постановка задачі і обґрунтування критеріїв оптимальності.** Найбільш відповідальним моментом в математичному моделюванні економічних процесів являється правильна постановка задачі.

**Постановка задачі передбачає** чітке економічне формулювання, яке включає ціль рішення, встановлення планового періоду, з'ясування відомих параметрів об'єкта і те кількісне значення яке необхідно визначити, його виробничо-економічні зв'язки, а також багато чинників та умов, які відображають процес моделювання.

Ціль рішення задачі визначається кількісно конкретним показником, який називається **критерієм оптимальності**. Він повинен відповідати економічній сутності задачі, яка вирішується. При цьому необхідний глибокий якісний аналіз сутності задачі і чітка постановка цілі її рішення.

Оскільки задачі мають велику кількість можливих рішень, необхідний критерій, який би дозволяв вибрати із цієї кількості найкращий варіант. Вибір найкращого варіанта математично забезпечується знаходженням екстремального значення деякого економічного показника, який представлений в цільовій функції, при цьому сама функція повинна бути лінійною.

Вибір критеріїв оптимальності повинен бути розумним з теоретичних позицій, які відповідають народногосподарським інтересам, задовольняти потреби практичного планування і відповідати потребам математичного методу рішення задачі.

Істотною математичною потребою являється умова невід'ємності змінних, оскільки шукані величини (наприклад, посівні площі) являються реальними позитивними величинами.

**Визначення переліку змінних і обмежень.** Основні елементи базової економіко-математичної моделі. Базова модель включає наступні елементи: змінні, обмеження, коефіцієнти змінних в обмеженнях моделі і цільової функції, об'ємні показники обмежень.

В постановці задачі повинно бути чітко визначено, що являється невідомим, які змінні величини і їх числове значення необхідно знайти в процесі рішення.

**По-перше**, перелік змінних величин повинен відображувати характер, основний зміст економічного процесу моделювання.

**По-друге**, число і склад змінних в кожній моделі визначаються обчислювальними можливостями програм і конкретної ЕОМ, на якій передбачається здійснити рішення задачі. Чим більша потужність ЕОМ, тим більша кількість змінних (і обмежень) можливо включити в задачу.

**По-третє**, кількість змінних залежить від вибору планового періоду (довгостроковий, середньостроковий, теперішній), який здійснює значний вплив на ступінь їх деталізації. Чим ближче період, на який складається модель, тим більша деталізація змінних. Наприклад, при складанні моделі оптимізації виробничої структури сільськогосподарського підприємства на теперішній період доцільно в якості змінних у рослинництві вводять сільськогосподарські культури не групою (зернові, технічні і так далі), а по видам – ячмінь, пшениця, овес, гречка і так далі;

**По-четверте**, кількість змінних залежить від того, наскільки детально в моделі повинні бути представлені слідуючи признаки: вид продукції; направлення її використання; технологія виробництва; ступінь інтенсивності; способи, канали і терміни виробництва і реалізації продукції.

*За економічним значенням в процесі моделювання всі змінні класифікуються на основні і допоміжні.*

**Основні змінні** визначають сільськогосподарські культури, мінеральні добрива, тобто ті величини, які визначають основний зміст процесу моделювання в кожному конкретному випадку, види діяльності, розміри яких треба визначити.

**Допоміжні змінні** залучають для полегшення математичного формулювання умов, визначення розрахункових величин (об'ємів виробництва, показників ефективності і так далі).

При математичній реалізації задач для перетворення нерівностей в рівняння вводяться додаткові змінні, які використовуються при аналізі проміжних рішень і оптимального варіанта.

Для кожної змінної встановлюють конкретну одиницю виміру (га, ц і т.д.). При цьому керуються наступними вимогами.

1. Доцільно обирати однакові одиниці виміру по однотипним групам змінних. Так, якщо розміри виробництва продукції рослинництва прийнято виміряти в гектарах посіву, то треба, щоб продукція ні одної із галузей рослинництва не вимірялася в центнерах;

2. Одиниці виміру не повинні утруднювати аналіз оптимального рішення і викликати додаткові розрахунки.

3. Техніко-економічні коефіцієнти недоцільно представляти дуже великими або дуже малими.

Після встановлення складу змінних визначають систему обмежень моделі, які відображають умови реалізації задачі. Обмеження, які представлені у вигляді лінійних нерівностей і рівнянь, відображають організаційно-економічні і технологічні умови і вимоги, які характеризують дане виробництво. Від їх складу і змісту в значному ступені залежить прийнятність результатів. Вони повинні достатньо повно відображувати взаємозв'язки процесу моделювання. Від їх кількості залежить максимальне число видів (способів) діяльності, які зможуть увійти в оптимальний план.

Основні обмеження відображають головні, найбільш істотні умови задачі. Вони накладаються на всі або більшість змінних моделі. До основних відносять обмеження по використанню виробничих ресурсів (землі, робочої сили, добрив, фінансових ресурсів і так далі).

Додаткові обмеження накладаються на невелику кількість змінних величин або окремі змінні. Зазвичай вони формуються у вигляді нерівностей.

Допоміжні обмеження вводять для полегшення розробки числової моделі, забезпечення правильного формулювання економічних вимог.

***Збір інформації і розробка техніко-економічних коефіцієнтів.*** Значним етапом моделювання являється збір і обробка вихідної інформації. В залежності від задачі і об'єкта, по якому ця задача повинна бути побудована, необхідно визначити характер і об'єм інформації, джерела її збору і методи обробки.

**Джерелами інформації служать річні звіти, виробничо-фінансові і перспективні плани, плани організаційно-господарського устрою, данні первинного обліку сільськогосподарських підприємств, технологічні карти по вирощуванню і збору сільськогосподарських культур, а також різноманітні нормативні довідники.**

Метою переробки вихідної інформації являється розробка і обґрунтування системи техніко-економічних характеристик об'єкта або процесу. Для будь-якої моделі ці характеристики формуються у вигляді техніко-економічних коефіцієнтів, коефіцієнтів цільової функції і констант або об'ємних показників ресурсів або продуктів.

Техніко-економічні коефіцієнти представляють собою основну частину вхідної інформації, яка надходить в модель як в змінному, так і незмінному вигляді. Наприклад, розрахована врожайність в одному випадку може вводиться в модель без змін, а в другому – за вирахуванням відходів.

Коефіцієнти можна розділити на три групи: питомі нормативи витрат або виходу продукції; коефіцієнти пропорційності; коефіцієнти зв'язку.

Питомі нормативи витрат або виходу продукції представляють собою техніко-економічну характеристику видів діяльності. По економічному змісту виділяють коефіцієнти, які характеризують витрати  $i$ -го ресурсу на одиницю  $j$ -го виду діяльності і коефіцієнти виходу.

Питомі коефіцієнти витрат і виходу розраховуються на основі нормативних довідників, технологічних карт, з використанням методів математичної статистики та іншими способами. Від їх достовірності залежить результат рішення задачі.

Коефіцієнти пропорційності – це коефіцієнти при змінних в тих обмеженнях, які передбачають відповідні пропорції між залежними змінними.

Економічний зміст коефіцієнтів в цільовій функції визначається характером критеріїв оптимальності. Числове значення критеріїв оптимальності частіше за все обчислюється як сума добутків коефіцієнтів цільової функції і значень змінних.

### ***Побудова моделі і її математичне вираження.***

**Модель можна відобразити розвернутою у вигляді системи нерівностей і рівнянь.** Але при достатньо великому числі змінних і обмежень таке вираження громіздке, зменшує огляд і затрудняє читання. Для більш компактного вираження використовують загальноприйняту систему умовних позначень змінних величин, техніко-економічних коефіцієнтів, констант і коефіцієнтів при змінних в цільовій функції.

Після того як розраховані всі техніко-економічні коефіцієнти, коефіцієнти цільової функції і констант, приступають до побудови моделі в вигляді системи лінійних співвідношень або таблиці. **Для побудови доцільно спочатку записати всі обмеження у вигляді системи лінійних нерівностей і рівнянь, а потім вже будувати матрицю.**

### ***3. Класифікація економіко-математичних методів та моделей***

Розглянемо питання класифікації економіко-математичних методів. Ці методи, являють собою **комплекс економіко-математичних дисциплін**, відповідно в складі економіко-математичних методів можливо виділити наступні розділи:

1)**економічна кібернетика:** системний аналіз економіки, теорія економічної інформації й теорія керуючих систем;

2)**математична статистика:** дисперсійний аналіз, кореляційний аналіз, регресійний аналіз, багатомірний статистичний аналіз, факторний аналіз, теорія індексів і ін.;

3)**математична економія (економетрія):** теорія економічного росту, теорія виробничих функцій, міжгалузеві баланси, національні рахунки, аналіз попиту й споживання, регіональний і просторовий аналіз, глобальне моделювання й ін.;

4)**методи прийняття оптимальних рішень,** методи галузей і границь, програмно-цільові методи планування й керування, теорію й методи керування запасами, теорію масового обслуговування, теорію ігор, теорію й методи

прийняття рішень, теорію розкладів, *лінійне програмування*, *нелінійне програмування*, динамічне програмування, дискретне (цілочислове) програмування, дрібно-лінійне програмування, параметричне програмування, стохастичне програмування, геометричне програмування;

5) **методи експериментального вивчення економічних явищ.** До них відносять, як правило, *математичні методи аналізу й планування економічних експериментів*, *ділові ігри*, *методи експертних оцінок*, розроблені для оцінки явищ, що не піддаються безпосередньому виміру.

Перейдемо тепер до питань *класифікації економіко-математичних моделей*, інакше кажучи, математичних моделей соціально-економічних систем і процесів.

Класифікаційні ознаки **економіко-математичних моделей**:

**1. По загальному цільовому призначенню** економіко-математичні моделі діляться на

- **теоретико-аналітичні**, використовувані при вивченні загальних властивостей і закономірностей економічних процесів,
- **прикладні**, застосовувані в рішенні конкретних економічних завдань аналізу, прогнозування й керування.

**2. По ступені агрегування об'єктів** моделювання моделі розділяються :

- **макроекономічні**
- **мікроекономічні.**

**3. По конкретному призначенню:**

- **балансові** моделі, що виражають вимогу відповідності наявності ресурсів і їхнього використання;
- **трендові** моделі, у яких розвиток економічної системи відбивається через тренд (тривалу тенденцію) її основних показників;
- **оптимізаційні** моделі, призначені для вибору найкращого варіанта з певного числа варіантів виробництва, розподілу або споживання;
- **імітаційні** моделі, призначені для використання в процесі машинної імітації досліджуваних систем або процесів і др.

- 4. По типу інформації**, використовуваної в моделі, економіко-математичні моделі діляться на :
- *аналітичні*, (побудовані на апріорній інформації)
  - *ідентифіковані*, побудовані на апостеріорній інформації.
- 5. По обліку фактора часу** моделі підрозділяються на
- *статичні*, у яких всі залежності віднесені до одного моменту часу
  - *динамічні*, що описують економічні системи в розвитку.
- 6. По обліку фактора невизначеності** моделі розпадаються на
- *детерміновані*, якщо в них результати на виході однозначно визначаються керуючими впливами,
  - *стохастичні* (імовірнісні), якщо при завданні на вході моделі певної сукупності значень на її виході можуть виходити різні результати залежно від дії випадкового фактора.

### **Контрольні питання**

1. Дайте визначення системи.
2. Що є практичними завданнями економіко-математичного моделювання
3. Дайте визначення моделі та головних завдань її створення у с.-г. підприємствах.
4. Яка головна мета створення економіко-математичних моделей.
5. Надайте характеристику етапів економіко-математичного моделювання.
6. Економічна інтерпретація основних та допоміжних змінних моделі.
7. Які розділи економіко-математичних методів вам відомі
8. Назвіть класифікаційні ознаки економіко-математичних моделей

### **Тести для самоконтролю**

1. Системою називають:
  - а. комплекс взаємозалежних між собою елементів



- b. концентроване вираження найбільш істотних взаємозв'язків представлене у математичній формі
- c. найбільш економічно-ефективний виробничий план
- d. створена оптимальна виробнича структура

2. Математична модель :

- a. концентроване вираження найбільш істотних взаємозв'язків представлене у математичній формі
- b. комплекс взаємозалежних між собою елементів представлений у вигляді математичної формули
- c. найбільш економічно-ефективний виробничий план розрахований за допомогою математичного апарату
- d. усі відповіді вірні

3. Оптимізація структури посівних площ, це:

- a. одне із головних завдань оптимізації виробничої структури с-г підприємства
- b. комплекс заходів спрямований на отримання додаткового прибутку у с-г підприємстві
- c. найбільш економічно-ефективний виробничий план с-г підприємства розрахований за допомогою математичного апарату
- d. усі відповіді вірні

4. При створенні оптимальної моделі виробничої структури у промисловому підприємстві одним із головних завдань є:

- a. визначення кількості виробництва товару за видами
- b. комплекс заходів спрямований на отримання додаткового прибутку
- c. визначення кількості ресурсу який залишиться у процесі виробництва
- d. визначення оптимальної структури управлінського апарату

5. Впровадження у виробництво результатів розрахунку економіко-математичної моделі в кінцевому підсумку повинно забезпечити:
- a. максимізацію виробництва продукції при найменших витратах і максимально раціональному використанню наявних ресурсів підприємства
  - b. максимізацію реалізації продукції при найменших витратах і максимальному отриманні виручки
  - c. мінімізацію витрат пов'язаних з промисловим виробництвом та реалізацією продукції, що призведе до збільшення прибутку.
  - d. повної відповіді не має
6. Постановка задачі і обґрунтування критеріїв оптимальності не можливе без:
- a. визначення переліку змінних і обмежень.
  - b. збору та обробки інформації
  - c. побудови цільової функції
  - d. усі відповіді не вірні.
7. Визначення переліку змінних і обмежень не можливе без:
- a. постановки задачі і обґрунтування критеріїв оптимальності
  - b. збору та обробки інформації
  - c. побудови цільової функції
  - d. усі відповіді не вірні.
8. Постановка задачі передбачає :
- a. чітке економічне формулювання, яке включає ціль рішення
  - b. збір та обробка інформації для рішення задачі
  - c. побудова цільової функції
  - d. усі відповіді не вірні.
9. Критерій оптимальності є :
- a. достатньою умовою рішення економіко-математичної задачі

- b. необхідною умовою рішення економіко-математичної задачі
- c. необхідною та достатньою умовою рішення економіко-математичної задачі
- d. усі відповіді не вірні.

10. Система нерівностей є :

- a. необхідною умовою рішення економіко-математичної задачі
- b. достатньою умовою рішення економіко-математичної задачі
- c. необхідною та достатньою умовою рішення економіко-математичної задачі
- d. усі відповіді не вірні.

11. Основні змінні економіко-математичної задачі визначають :

- a. площу с-г культур, поголів'я тварин, кількість деталей, що виробляються
- b. залишок ресурсу у процесі виробництва
- c. Показники економічної ефективності виробництва
- d. Техніко-економічні показники економіко-математичної задачі

12. Додаткові (допоміжні) змінні економіко-математичної задачі визначають :

- a. залишок ресурсу у процесі виробництва
- b. площу с-г культур, поголів'я тварин, кількість деталей, що виробляються
- c. показники економічної ефективності виробництва
- d. техніко-економічні показники економіко-математичної задачі

13. До якої класифікаційні ознаки відносять **теоретико-аналітичні** економіко-математичні моделі

- a. ступень агрегування об'єктів
- b. загальне цільове призначення
- c. тип інформації
- d. облік фактору невизначеності

14. За типу інформації, економіко-математичні моделі поділяються на

- a. аналітичні, ідентифіковані
- b. детерміновані, стохастичні
- c. балансові, трендові
- d. макроекономічні, мікроекономічні

15. До якої класифікаційні ознаки відносять *імітаційні* економіко-математичні моделі

- a. ступень агрегування об'єктів
- b. конкретне призначення
- c. тип інформації
- d. облік фактору невизначеності

## Тема 2.

### Економіко-математична модель задачі оптимізації управління виробничими процесами підприємства.

**Мета:** засвоєння засад побудови моделі задачі оптимізації управління виробничими процесами підприємства та економічна інтерпретація елементів математичної моделі.

#### *План викладання і засвоєння матеріалу:*

1. Принцип оптимальності у плануванні створення раціональної системи управління підприємством
2. Загальний запис економіко - математичної моделі управління виробничими процесами та класифікація задач лінійного програмування
3. Форми запису задач лінійного програмування.
4. Приклад запису задачі та економічна інтерпретація елементів математичної моделі.

**Література** {[2] с.108-120, [6] 100-125, [7] с.118-140, [11] 90-150, [12] 125-203, }

#### *1. Принцип оптимальності у плануванні створення раціональної системи управління підприємством*

Необхідною умовою використання оптимального підходу до планування й керування (принципу оптимальності) є гнучкість, альтернативність виробничо-господарських ситуацій, в умовах яких доводиться приймати планово-управлінські рішення. Саме такі ситуації, як правило, і становлять повсякденну практику господарюючого суб'єкта (вибір виробничої програми, прикріплення до постачальників, маршрутизація, розкрій матеріалів, готування сумішей і т.д.).

Суть принципу оптимальності складається в прагненні вибрати таке планово-управлінське рішення  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , де  $x_j$ ,  $(j = \overline{1, n})$  - його компонента, що щонайкраще враховувало б внутрішні можливості й зовнішні умови виробничої діяльності господарюючого суб'єкта.

Слову «щонайкраще» тут означають вибір деякого **критерію оптимальності**, тобто деякого економічного показника, що дозволяє порівнювати ефективність тих або інших планово-управлінських рішень. Традиційні критерії оптимальності: «максимум прибутку», «мінімум витрат», «максимум рентабельності» і ін.

Слова «ураховувало б внутрішні можливості й зовнішні **умови виробничої діяльності**» означають, що на вибір планово-управлінського рішення (поводження) накладається ряд умов, тобто вибір  $\bar{X}$  здійснюється з деякої області можливих (припустимих) рішень  $D$ ; цю область називають також областю визначення задачі.

## *2. Загальний запис економіко - математичної моделі управління виробничими процесами та класифікація задач лінійного програмування*

Таким чином, реалізувати на практиці принцип оптимальності в плануванні й керуванні - це значить вирішити екстремальну задачу виду:

$$\max(\min) f(\bar{X}), \quad (2.1)$$

$$\bar{X} \in D, \quad (2.2)$$

де  $f(\bar{X})$  – математичний запис критерію оптимальності – цільова функція.

Задачу умовної оптимізації (2.1), (2.2) звичайно записують у вигляді:  
Знайти максимум або мінімум функції

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
 &\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_1, \\
 &\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_2, \\
 &\dots \\
 &\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_m,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$$(x_j \geq 0, j = \overline{1, n}). \tag{2.5}$$

Умова (2.5) необов'язково, але його завжди при необхідності можна домогтися. Позначення  $\{<, =, >\}$  говорить про те, що в конкретному обмеженні можливий один зі знаків:  $<, =$  або  $>$ .

**Більше компактний запис:**

$$\left\{ \max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n), \right. \tag{2.6}$$

$$\left\{ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i = \overline{1, m}, \right. \tag{2.7}$$

$$\left\{ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \right. \tag{2.8}$$

**Задача (2.6)-(2.8) - математична модель задачі, в основі побудови якої лежать принципи оптимальності й системності.**

**Вектор  $\bar{X}$  (набір змінних  $x_j, j = \overline{1, n}$ ) називається припустимим рішенням задачі, якщо він задовольняє необхідним умовам задачі (умовам системи обмежень). Якщо,  $\bar{X}$  (припустиме рішення), задовольняє також і достатнім умовам (умовам цільової функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ), то таке рішення задачі називається оптимальним.**

Задачі оптимального програмування в найбільш загальному виді класифікують за наступними ознаками.

**1. За характері взаємозв'язку між змінними:**

- а) лінійні;
- б) нелінійні.

а) всі функціональні зв'язки в системі обмежень і функція мети - лінійні функції;

б) наявність нелінійності хоча б в одному зі згаданих елементів.

**2. За характері зміни змінних:**

- а) безперервні;

б) дискретні.

а) значення кожної з керуючих змінних можуть заповнювати суцільно деяку область дійсних чисел;

б) всі або хоча б одна змінна можуть приймати тільки цілочислові значення.

### **3. За обліку фактору часу:**

а) статичні;

б) динамічні.

а) моделювання й прийняття рішень здійснюються незалежно від часу елементів моделі

б) необхідно враховувати фактор часу.

### **4. За наявності інформації про змінні:**

а) задачі в умовах повної визначеності (детерміновані);

б) задачі в умовах неповної інформації;

в) задачі в умовах невизначеності.

а) всі елементи визначені

б) окремі елементи є ймовірнісними величинами,

в) можна зробити припущення про можливий результат (на основі прогнозів, або припущень) – елементи є ймовірнісними.

### **5. За числу критеріїв оцінки альтернатив (критеріїв оптимальності):**

а) прості, однокритеріальні задачі;

б) складні, багатокритеріальні задачі.

## **3. *Форми запису задач лінійного програмування***

Загальною задачею ЛП називається задача, що має на меті визначити максимальне (мінімальне) значення функції:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.9)$$



при умовах 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}) \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \quad (k \leq m) \quad (2.11)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n) \quad (2.12)$$

де  $a_{ij}, b_i, c_j$  – задані постійні величини.

Функція (2.9) називається **цільовою функцією** задачі, умови (2.10) – (2.12) – обмеженнями даної задачі.

**Стандартної (або симетричної)** задачею лінійного програмування називається задача, що має на меті визначити *max* або *min* функції  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при виконанні умов (2.10) і (2.12), де  $k = m, l = n$ , тобто

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (2.13)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2.14)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2.15)$$

**Канонічної (або основний)** задачею ЛП називається задача, що має на меті визначити *max* або *min* функції  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при виконанні умов (2.11) і (2.12), де  $k = 0, l = n$ , тобто

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

**Сукупність чисел**  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що задовольняє обмеженням (2.10) - (2.12), називається припустимим **рішенням** (або планом).

**План**  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , при якому цільова функція (2.9) приймає своє  $\max$  ( $\min$ ) значення, називається **оптимальним**.

Значення цільової функції при плані  $X$  позначаємо  $F(X)$ . Отже  $F(X) \leq F(X^*)_{\max}$  ( $F(X) \geq F(X^*)_{\min}$ ).

*Стандартна та канонічна задача є еквівалентними. Тобто з однієї форми можна шляхом деяких перетворень одержати іншу.* І якщо маємо спосіб рішення однієї із задач, то можна знайти оптимальний план інших.

**Для того, щоб перейти від однієї форми задачі ЛП до іншої, потрібно:**

- 1) Перейти від задачі  $\min$  до задачі  $\max$
- 2) Перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки
- 3) Замінити змінні, які не підкоряються умовам незаперечності.

1. Коли потрібно знайти  $\min F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна **перейти** до знаходження **максимуму функції**

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = -F(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n, \quad \text{оскільки}$$

$$\min F = -\max(-F)$$

2. Обмеження-нерівності вихідної задачі, що мають вид  $\leq$ , можна перетворити в обмеження-рівності **додаванням** до його **лівої частини додаткової змінної**.

**Обмеження виду  $\geq$**  перетворюють у обмеження-рівності шляхом **віднімання** з його лівої частини додаткової змінної.

**Тобто обмеження-нерівності**

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$  перетворюють в обмеження

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i;$$

обмеження

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$  приводяться до обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i, \text{ де } x_{n+1} \geq 0.$$

Для перетворення обмежень типу  $\leq$  у тип  $\geq$  необхідно помножити праву та ліву частину обмеження на -1, та навпаки :

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i \end{cases}$$

*Число додаткових змінних при перетворенні обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей дорівнює числу самих нерівностей.*

*Додаткові змінні мають цілком певний економічний зміст.*

*4. Приклад запису задачі та економічна інтерпретація елементів математичної моделі.*

*Приклад задачі ЛП. Для виготовлення деталей виду А, В и С використається чотири різних станки. Витрати часу на обробку кожної деталі та загальний фонд часу можливої роботи кожного станку наведемо у таблиці.*

Таблиця

| Тип устаткування | Витрати часу на обробку одного виробу (станко-год) |   |   | Загальний фонд робочого часу обладнання (год) |
|------------------|----------------------------------------------------|---|---|-----------------------------------------------|
|                  | А                                                  | В | С |                                               |
| I                | 2                                                  | 4 | 5 | 120                                           |

|                |    |    |    |     |
|----------------|----|----|----|-----|
| II             | 1  | 8  | 6  | 280 |
| III            | 7  | 4  | 5  | 240 |
| IV             | 4  | 6  | 7  | 360 |
| Прибуток (грн) | 10 | 14 | 12 |     |

Потрібно визначити, скільки деталей кожного виду треба виготовити підприємству, щоб отримати максимальним прибуток.

*Складемо систему нерівностей, та запишемо критерій оптимальності задачі.*

Позначмо:

$x_1$  - кількість деталей виду А,

$x_2$  - В,

$x_3$  - С.

Тоді, відповідно, для виробництва такої кількості деталей потрібно  $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$  станко-годин I-шого станка.

З урахуванням загального фонду робочого часу цього встаткування отримаємо :

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$$

Міркуючи аналогічно, одержимо систему обмежень

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360$$

При цьому, тому що кількість вироблених виробів є величина позитивна, те  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ .

Прибуток від реалізації  $x_1$  виробів А,  $x_2$  виробів У и  $x_3$  виробів З ми дістанемо прибуток

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

Таким чином, одержуємо наступну систему обмежень та критерій оптимальності:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

*Приведемо розглянуту задачу до канонічного виду:*

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 120 \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_5 = 280 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_6 = 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_7 = 360 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Відповідно  $x_4$  – кількість невикористаного часу 1-го станку;

.....

$x_7$  - кількість невикористаного часу 4-го станку

### **Контрольні питання**

1. Що таке принцип оптимальності у створенні оптимального плану.?
2. Загальний запис математичної моделі, обґрунтуйте показники.
3. Які ознаки класифікації задач лінійного програмування Вам відомі ?
4. Дайте характеристику ознакам: задач лінійного програмування: **за** характером взаємозв'язку між змінними
5. Дайте характеристику ознакам: задач лінійного програмування **за** характером зміни змінних

6. Дайте характеристику ознакам: задач лінійного програмування **за** характером обліку фактору часу
7. Дайте характеристику ознакам: задач лінійного програмування за числом критеріїв оптимальності
8. Що таке симетричний вид задачі лінійного програмування ?
9. Як привести задачу до симетричного виду?
- 10.. Які типи обмежень Вам відомі ?

### **Тести для самоконтролю**

1. Необхідними умовами економіко-математичної моделі задачі є:
  - a. система обмежень математичної моделі
  - b. критерій оптимальності математичної моделі
  - c. отримання максимального прибутку підприємством
  - d. скорочення витрат при виробництві продукції
2. Суть принципу оптимальності при рішенні економіко-математичної задачі полягає у:
  - a. прагненні вибрати таке планово-управлінське рішення, яке найкраще враховувало би зовнішні умови та внутрішні можливості підприємства
  - b. прагненні вибрати таке планово-управлінське рішення, яке найкраще задовольняло виробничу структуру підприємства
  - c. прагненні вибрати таке планово-управлінське рішення, яке найкраще дозволяло забезпечити безпечні умови праці на підприємстві
  - d. прагненні вибрати таке планово-управлінське рішення, яке дозволяло виробляти продукцію у підприємстві
3. Достатніми умовами економіко-математичної моделі задачі є:
  - a. критерій оптимальності математичної моделі
  - b. система обмежень математичної моделі

- c. отримання максимального прибутку підприємством
- d. скорочення витрат при виробництві продукції

4. Припустимим рішенням економіко-математичної задачі є:

- a. Рішення, що задовольняє необхідним умовам задачі
- b. Рішення, що задовольняє достатнім умовам задачі
- c. Рішення, що задовольняє необхідним та достатнім умовам задачі
- d. Будь яке рішення задачі

5. Оптимальним рішенням економіко-математичної задачі є:

- a. Рішення, що задовольняє необхідним та достатнім умовам задачі
- b. Рішення, що задовольняє необхідним умовам задачі
- c. Рішення, що задовольняє достатнім умовам задачі
- d. Будь яке рішення задачі

6. За характером взаємозв'язку між змінними економіко-математичні задачі поділяються на:

- a. лінійні та нелінійні
- b. статичні та динамічні
- c. безперервні та дискретні
- d. прості та складні

7. За характером зміни змінних економіко-математичні задачі поділяються на:

- a. безперервні та дискретні
- b. лінійні та нелінійні
- c. статичні та динамічні
- d. прості та складні

8. За наявністю інформації про змінні економіко-математичні задачі поділяються на:

- a. задачі в умовах повної визначеності, задачі в умовах неповної інформації, задачі в умовах невизначеності
- b. безперервні та дискретні
- c. Задачі лінійного виду, задачі не лінійного
- d. задачі з єдиним критерієм оптимальності, задачі з багатьма критеріями

9. За числом критеріїв оптимальності економіко-математичні задачі поділяються на:

- a. прості та складні
- b. безперервні та дискретні
- c. лінійні та нелінійні
- d. статичні та динамічні

10. За обліком фактору часу економіко-математичні задачі поділяються на:

- a. статичні та динамічні
- b. прості та складні
- c. безперервні та дискретні
- d. лінійні та нелінійні

11.  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  це:

- a. загальний запис системи обмежень задачі
- b. загальний запис цільової функції задачі
- c. загальний запис математичної моделі задачі
- d. загальний запис достатніх умов задачі

12.  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  це:

- a. загальний запис цільової функції задачі



- b. загальний запис системи обмежень задачі
- c. загальний запис математичної моделі задачі
- d. загальний запис необхідних умов задачі

13. у  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  коефіцієнт  $a_{ij}$  це:

- a. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- c. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

14. у  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  коефіцієнт  $b_i$  це:

- a. загальний запис обсягу наявних ресурсів
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- c. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- d. загальний запис змінної математичної моделі задачі

15. у  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  коефіцієнт  $c_j$  це:

- a. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- c. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

16. у  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  коефіцієнт  $x_j$  це:

- a. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- c. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень

d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

17. Система обмежень задачі має симетричний вигляд якщо:

- a. якщо усі типи обмеження мають однаковий тип
- b. якщо можливо перейти від обмеження типу « $\geq$ » до обмеження типу « $\leq$ »
- c. якщо система має рішення
- d. якщо система не має рішення

18. Система обмежень задачі має канонічний вигляд якщо:

- a. якщо усі обмеження мають тип « $=$ »
- b. якщо усі типи обмеження мають однаковий тип
- c. якщо можливо перейти від обмеження типу « $\geq$ » до обмеження типу « $\leq$ »
- d. якщо система має рішення

19. Обмеження  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$  має аналогічний математичний зміст :

- a.  $-a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i$
- b.  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq -b_i$
- c.  $-a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \leq b_i$
- d.  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$

20. Для перетворення обмеження типу (ліва частина  $\geq$  права частина) у тип « $=$ » необхідно:

- a. вести у ліву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «-»
- b. вести у праву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «-»
- c. вести у ліву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «+»
- d. помножити праву і ліву частину обмеження на «-1»

21. Для перетворення обмеження типу (ліва частина  $\leq$  права частина) у тип « $\Rightarrow$ » необхідно:

- a. вести у ліву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «+»
- b. вести у праву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «+»
- c. вести у ліву частину обмеження додаткову змінну зі знаком «-»
- d. помножити праву і ліву частину обмеження на «-1»

22. При перетворенні задачі у канонічний вид кількість додаткових змінних рівно :

- a. кількості нерівностей у системі обмежень
- b. кількості рівнянь у системі обмежень
- c. кількості основних змінних задачі
- d. кількості стовбців матриці задачі

### Тема 3

## Оптимізація виробничих процесів за допомогою геометричного методу розв'язку задач лінійного програмування.

**Мета:** засвоєння засад геометричного методу розв'язку задач лінійного програмування та загального алгоритму рішення.

### План викладання і засвоєння матеріалу:

1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування
2. Загальний алгоритм рішення задач графічним методом
3. Приклад рішення задачі.

**Література** {[1] с.125-140, [6] 130-150, [7] с.180-210, [10] 190-250, [12] 225-280, }

#### 1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Розглянемо основну задачу ЛП:  $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$  при умовах

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Розглянемо вектора  $P_j$ , складені з коефіцієнтів при змінних  $x_j$  у системі обмежень

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и. } P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

План  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається **опорним планом** основної ЗЛП, якщо система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  лінійно незалежна.

Нагадаємо, що **система векторів лінійно незалежна, якщо визначник, складений з координат цієї системи векторів відмінний від 0**, тобто система має рішення.

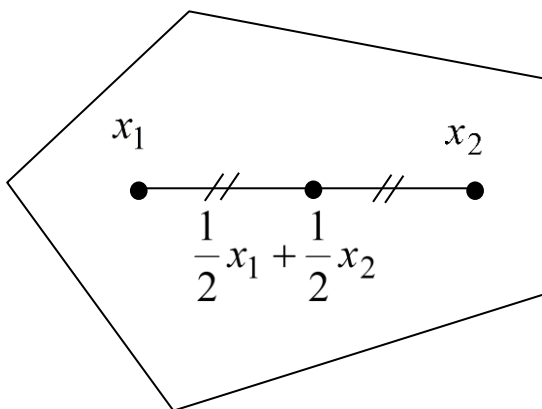
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Відповідно кількість векторів  $P_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) дорівнює  $n$ , а максимальна кількість лінійно незалежних елементів дорівнює  $m$ .

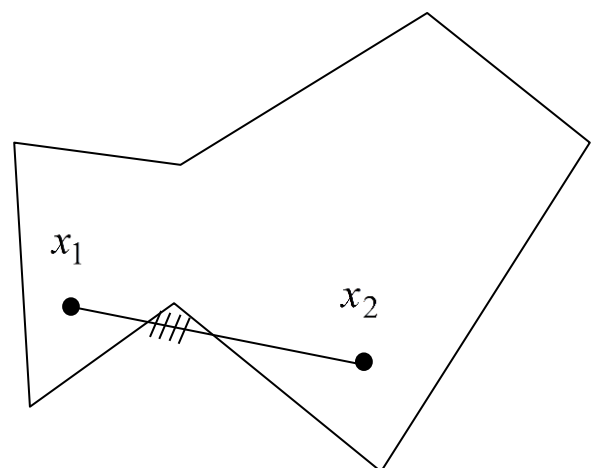
**Опорний план називається невиродженим**, якщо він містить рівно  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ . У протилежному випадку він є **виродженим**.

Для наглядного зображення (на площині) геометричного змісту ЗЛП розглянемо випадок з **двома** невідомими:  $x_1$  і  $x_2$ .

Множина називається **опуклою**, якщо будь-яка **точка, будь-якого відрізка що її належить, належать даній множині**  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , де  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ .



Опукла множина на площині



Неопукла множина на площині

*Теорема 1: Множина планів ЗЛП є опуклою, (якщо вона не пуста).*

**Непуста множина** планів основний ЗЛП називається **багатогранником рішень**, а **кутова точка багатогранника рішень** називається його **вершиною**.

*Теорема 2: Якщо ЗЛП має оптимальний план, то max (min) значення цільова функція задачі приймає в одній з вершин багатогранника рішень.*

*Теорема 3: Якщо max(min) значення цільова функція задачі приймає більш, ніж в одній вершині, то вона приймає max (min) у будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин (відрізком) вид*

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , де  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $x_1$  і  $x_2$  – вершини.

**Відповідно до тверджень (теорем), можливо зробити висновок, що**

**Непуста множина планів ОЗЛП утворюють опуклий багатогранник**

- *Кожна вершина цього багатогранника утворюють опорний план.*
- *В одній з вершин багатогранника значення цільової функції є максимальним (мінімальним) (за умови, що функція обмежена зверху на множині планів).*
- *Якщо max (min) значення - цільова функція приймає більш, ніж в одній вершині, то це значення вона приймає в будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці вершини багатогранника.*

Знайдемо рішення задачі у випадку, коли  $n = 2$ :

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

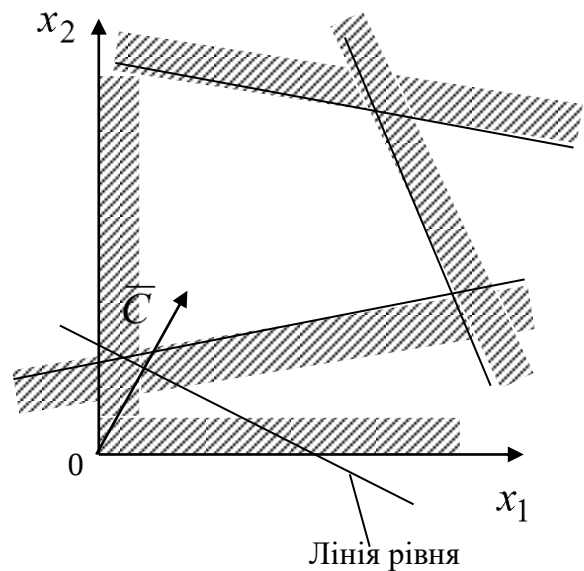
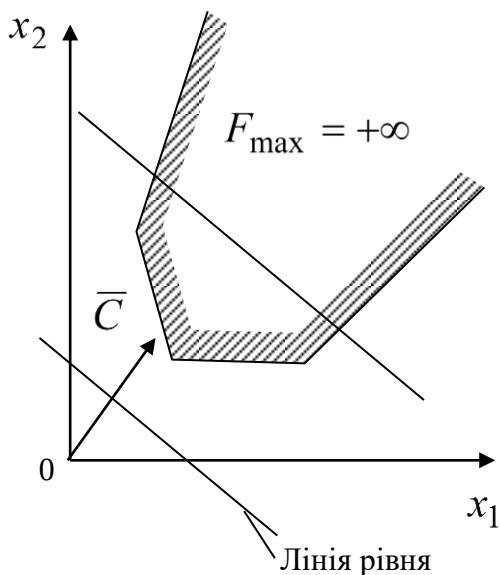
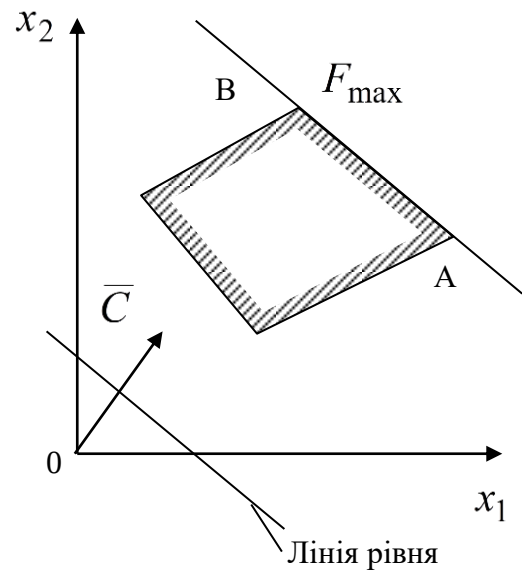
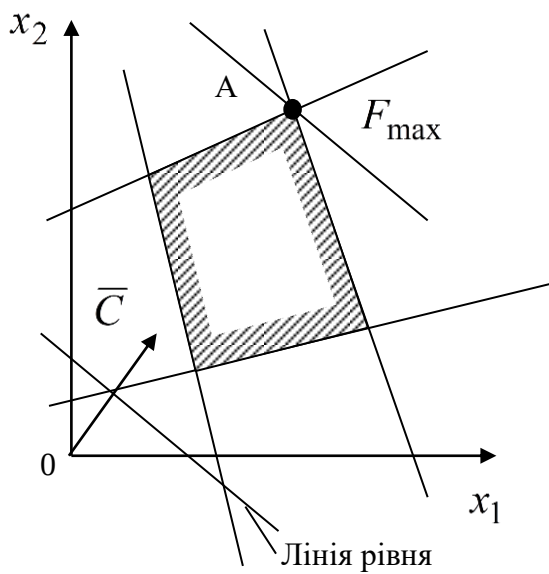
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i & (i = \overline{1, k}) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2) \end{cases} \quad (2)$$

Кожній з нерівностей (2) відповідає напівплощина, границею якої є пряма  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ),  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Якщо система нерівностей **сумісна**, то вона утворює опуклий багатогранник, що у плоскому випадку називається **багатокутником рішень**.

Сторони багатокутника лежать на зазначених прямих. Таким чином, необхідно знайти вершину багатокутника, у якій цільова функція  $F(x_1, x_2) \rightarrow \max$ .

Для визначення даної вершини побудуємо пряму  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  ( $h = \text{const}$ ) – рівня прямої), що проходить через багатокутник рішень. Будемо пересувати її в напрямку вектора  $\vec{C} = (c_1; c_2)$  доти, поки вона не пройде через останню її загальну точку з багатокутником рішень. Координати цієї точки й визначають оптимальний план задачі.



Відзначимо, що для знаходження  $F_{\min}$  лінію рівня  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  необхідно пересувати убік вектора  $-\bar{c} = \{-\bar{c}_1, -\bar{c}_2\}$ .

## *2. Загальний алгоритм рішення задач графічним методом*

### **Загальний алгоритм:**

1. Будують прямі, рівняння яких одержують шляхом приведення задачі до канонічного виду.
2. Знаходять напівплощини, обумовлені кожним з обмежень.
3. Знаходять багатокутник рішень.
4. Будують вектор  $\vec{C} = \{c_1; c_2\}$ .
5. Будують пряму  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ , що проходить через багатокутник рішень.
6. Пересувають пряму  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  в напрямку вектора  $\vec{C}$ . У результаті знаходять точку (або відрізок), у якій цільова функція приймає max значення.
7. Визначаємо координати цієї точки та обчислюємо значення цільової функції в цій т.  $F_{\max(\min)}$ .

## *3. Приклад рішення задачі*

**Постановка задачі.** Підприємство виробляє деталі двох видів А та В, на виробництво яких потрібне сировина трьох видів I, II, III. Необхідно оптимізувати номенклатуру випуску продукції за умови отримання підприємством максимального прибутку.

Наведемо у таблиці 1 норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду й прибуток від реалізації кожної з деталей А, В.

Позначимо:



$x_1$  – кількість випущеного виробу А.

$x_2$  – кількість випущеного виробу В.

Таблиця 1

## Нормативні показники витрат та прибутку

| Види сировини           | Норми витрати на один виріб |    | Загальна кількість сировини |
|-------------------------|-----------------------------|----|-----------------------------|
|                         | А                           | В  |                             |
| I                       | 12                          | 4  | 300                         |
| II                      | 4                           | 4  | 120                         |
| III                     | 3                           | 12 | 252                         |
| Прибуток від реалізації | 30                          | 40 | $\rightarrow \max$          |

Запишемо задачу у математичній формі за допомогою системи нерівностей.

$$F = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Визначмо координати точок та побудуємо функції, визначимо напівплощини, що задовольняють необхідним умовам системи обмежень (результати побудови зобразимо на рисунку).

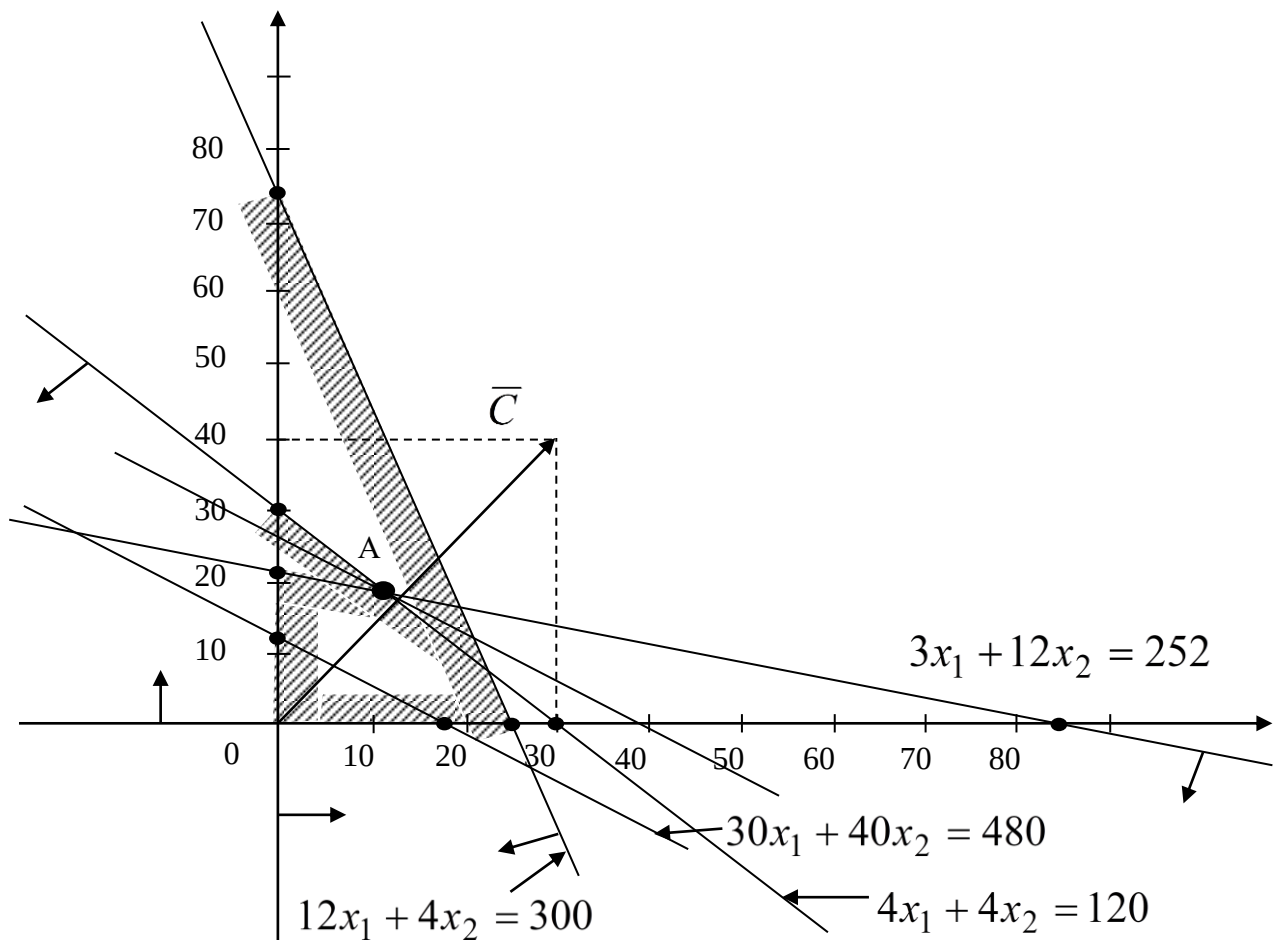
$$12x_1 + 4x_2 = 300 \leftarrow \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{300}{4} = 75 & (0;75) \\ x_2 = 0 & x_1 = 300/12 = 25 & (25;0) \end{cases}$$

$$4x_1 + 4x_2 = 120 \leftarrow \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{120}{4} = 30 & (0;30) \\ & & (30;0) \end{cases}$$

$$3x_1 + 12x_2 = 252 \leftarrow \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{252}{12} = 21 & (0;21) \\ x_2 = 0 & x_1 = \frac{252}{3} = 84 & (84;0) \end{cases}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



$30x_1 + 40x_2 = 480$  – (рівняння цілющої функції (лінія рівня)) – будь-яка точка цієї прямої визначає такий план, при якому прибуток дорівнює 480 грн.

$$\vec{C} = \{30;40\}$$

$$30x_1 + 40x_2 = h = 480$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{480}{40} = 12 \quad (0;12)$$

$$x_2 = 0 \quad x_1 = \frac{480}{30} = 16 \quad (16;0)$$

Рухаючи пряму рівня паралельно прямій  $30x_1 + 40x_2 = 480$  уздовж вектора  $\vec{C}$  одержуємо точку А, координати цієї точки  $(x_1, x_2)$  й визначають оптимальний план.

Знаходимо ці координати вирішуючи систему рівнянь, які визначають прями - сторони багатокутника.

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 = 252 & x_1^* = 12 & x_2^* = 18 \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 \end{cases}$$

$F(x_1^*, x_2^*) = F(12,18) = 1080$  – max прибуток, 12 виробів А, 18 виробів В.

### **Контрольні питання**

1. При якій умові система векторів є лінійно незалежна?
2. При якій умові опорний план називається не виродженим ?
3. Непуста множина планів основної ЗЛП називається ?
4. Якщо непушта множина планів основної ЗЛП утворює опуклий багатогранник що це означає?
5. Що називається багатокутником рішень?

6. Як знайти вершину багатокутника, у якій цільова функція  $F(x_1, x_2) \rightarrow \max$ .
7. У який бік необхідно пересувати лінію рівня  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ , для знаходження  $F_{\min}$
8. Які етапи загального алгоритму рішення Вам відомі

### Тести для самоконтролю

1. План  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається **опорним планом** основної ЗЛП, якщо
  - a. система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  лінійно незалежна
  - b. система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  відмінна від «0»
  - c. система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  не вироджена
  - d. система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  вироджена
2. Система векторів  $P_1, P_2, \dots, P_n$  лінійно незалежна, якщо
  - a. визначник, складений з координат цієї системи векторів відмінний від «0»
  - b. визначник, складений з координат цієї системи векторів дорівнює «0»
  - c. якщо віна містить рівно  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - d. будь-яка точка, будь-якого відрізка що її належить, належать даній системі
3. Опорний план системи, де  $P_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) дорівнює  $n$ , а максимальна кількість лінійно незалежних елементів дорівнює  $m$ , називається *не виродженим*, якщо
  - a. він містить рівно  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .

- b. він містить більше ніж  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - c. він містить менше ніж  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - d. у випадках b та c
4. Опорний план системи, де  $P_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) дорівнює  $n$ , а максимальна кількість лінійно незалежних елементів дорівнює  $m$ , називається *виродженим*, якщо
- a. він містить рівно  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - b. він містить більше ніж  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - c. він містить менше ніж  $m$  коефіцієнтів при невідомих  $x_j$ .
  - d. у випадках b та c
5. Непуста множина планів основний ЗЛП називається
- a. багатогранником рішень
  - b. кутова точка
  - c. вершиною багатогранника рішень
  - d. твердження b та c
6. Якщо ЗЛП має оптимальний план, то  $\max$  ( $\min$ ) значення цільова функція задачі приймає
- a. в одній з вершин багатогранника рішень
  - b. в усіх з вершина багатогранника рішень
  - c. в жодній із вершина багатогранника рішень
  - d. багатогранник рішень не має відношення до оптимального плану
7. При рішення задач ЛП графічним методом на першому етапі
- a. Будують прямі, рівняння яких одержують шляхом приведення задачі до канонічного виду.

- b. Знаходять напівплощини, обумовлені кожним з обмежень.
  - c. Знаходять багатокутник рішень.
  - d. Будують вектор  $\vec{C} = \{c_1; c_2\}$ .
8. При рішення задач ЛП графічним методом на завершальному етапі
- a. Будують вектор  $\vec{C} = \{c_1; c_2\}$ .
  - b. Будують пряму  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ , що проходить через багатокутник рішень.
  - c. Пересувають пряму  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  в напрямку вектора  $\vec{C}$ . У результаті знаходять точку (або відрізок), у якій цільова функція приймає max значення.
  - d. Визначаємо координати цієї точки та обчислюємо значення цільової функції в цій т.  $F_{max(min)}$ .

## Тема 4

### Пошук оптимального рішення, загальне поняття симплекс методу.

**Мета:** засвоєння засад використання симплекс методу, підготовка до рішення, формалізація даних та створення матриці задачі

#### **План викладання і засвоєння матеріалу:**

1. Поняття симплекс методу.
2. Створення та обґрунтування економіко-математичної моделі оптимізації виробничого процесу.
3. Запис матриці задачі, поняття симплексної таблиці.

**Література** {[2] с.145-160, [3] 135-145, [5] с.120-150, [7] 250-280, [12] 240-290, }

#### *1. Поняття симплекс методу.*

**Симплекс-метод** рішення економіко-математичних задач заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при цьому значення цільової функції зростає (або спадає) за умови, що дана задача має оптимальний план і кожний її опорний план не вироджений.

**Для рішення задач симплексом-методом** її необхідно привести задачу до канонічного виду, шляхом вводу додаткових змінних.

Створимо та обґрунтуємо економіко математичну модель задачі, за допомогою запису її у загальному вигляді.

#### Постановка задачі.

Підприємству необхідно оптимізувати виробничу структуру за умови оптимального використання власних виробничих ресурсів та отримання максимального економічного ефекту від виробництва продукції.

Тобто - *потрібно знайти оптимальне планово управлінське рішення за умови виконання необхідних та достатніх вимог.*

Збір інформації

*Позначимо :*

$$a_{ij}, b_i, c_j \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) , \text{ де}$$

$a_{ij}$  - техніко - економічні коефіцієнти системи обмежень (наприклад, витрати сировини на одиницю продукції, що виробляється)

$b_i$  - загальний обсяг ресурсів (сировини) виду  $i$ .

$c_j$  - техніко - економічні коефіцієнти критерію оптимальності (наприклад, прибуток отриманий із одиниці продукції, що виробляється виду  $j$  )

Прийmemo до уваги, що загальна кількість видів продукції що виробляється буде рівна -  $n$ , а загальна кількість видів сировини рівна -  $m$ , причому  $m < n$ . Також, загальний обсяг ресурсів (сировини) виду  $i$  більше нуля -  $b_i > 0$ .

Визначення переліку змінних та обмежень.

*Позначимо:*

$x_j$  - кількість продукції виду  $j$ , що необхідно виробити підприємству, де  $j$  знаходиться у інтервалі від 1 до  $n$  - ( $j = \overline{1, n}$ ) – **основні змінні задачі**.

$x_{n+i}$  - залишок сировини виду  $i$ , де  $i$  знаходиться у інтервалі від 1 до  $m$  - ( $i = \overline{1, m}$ ) - **додаткові змінні задачі**.

*Визначимо систему обмежень.*

Зрозуміло, що загальна кількість змінних буде дорівнювати  $n + m$ , де  $n$  - кількість основних змінних, а  $m$  – кількість додаткових змінних. Отже **кількість обмежень задачі** буде дорівнювати  $m$ .

2. *Створення та обґрунтування економіко-математичної моделі оптимізації виробничого процесу*

Побудова математичної моделі.



Відповідно постановки задачі, та вихідної інформації **критерій оптимальності прийме вигляд:**

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

Враховуючи те що техніко-економічні коефіцієнти цільової функції, що знаходяться при додаткових змінних рівні «0», оскільки вони не впливають на фінансовий результат поточного виробничого процесу, їх запис у математичній формі критерію оптимальності не є обов'язковим.

Відповідно накладених умов задачі (оптимальне використання власних виробничих ресурсів) **система обмежень прийме вигляд :**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Для рішення задачі необхідно привести її до канонічного виду. Відповідно, шляхом вводу додаткових змінних запишемо задачу у канонічній формі, де  $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m})$  додаткові змінні.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Змінна  $x_{n+1}$  має **коефіцієнт, рівний 1** і входить до складу тільки одного рівняння (першого). Аналогічно, змінні  $x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{n+m}$ .

Назвемо змінну, що входить до складу **тільки одного рівняння** та має коефіцієнт **1 базисною**.

Отже змінні  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  є **базисними**.

Інші змінні  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називаються **вільними**.

Відповідно у **кожну нерівність** було додано по **одній** додатковій (базисній) змінній, **отже кількість базисних змінних дорівнює кількості обмежень**.

Для визначення змінних, які є базисними, розглянемо систему векторів  $P$ , що складаються з коефіцієнтів  $a_{ij}$  - коефіцієнти при  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  у системі обмежень, тобто, запишемо у вигляді матриці відповідні коефіцієнти (коефіцієнти додаткових змінних)

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & a_{1,n+k} & a_{1,n+m} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} & a_{2,n+k} & a_{2,n+m} \\ a_{k,n+1} & a_{k,n+2} & a_{k,n+k} & a_{k,n+m} \\ a_{m,n+1} & a_{m,n+2} & a_{m,n+k} & a_{m,n+m} \end{pmatrix}, \text{ коефіцієнти при змінних } X_m = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+k} \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

або у вигляді **лінійно не залежних векторів**

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{m,n+1} \end{pmatrix}, \dots, P_k = \begin{pmatrix} a_{1,n+k} \\ a_{2,n+k} \\ \dots \\ a_{m,n+k} \end{pmatrix}, \dots, P_m = \begin{pmatrix} a_{1,n+m} \\ a_{2,n+m} \\ \dots \\ a_{m,n+m} \end{pmatrix}$$

Якщо змінні  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, \dots, x_{n+m}$  є **базисними**, то кожна із них присутня лише в одному із обмежень, відповідно **коефіцієнт перед додатковою змінною обмеження дорівнює «1»** (див. запис канонічного виду системи обмежень). Зрозуміло, що інші змінні **які не записані у канонічній формі** обмежень у кожному із рівнянь також **присутні, але з коефіцієнтом «0»**.

Отже отримаємо:

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & a_{1,n+k} & a_{1,n+m} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} & a_{2,n+k} & a_{2,n+m} \\ a_{k,n+1} & a_{k,n+2} & a_{k,n+k} & a_{k,n+m} \\ a_{m,n+1} & a_{m,n+2} & a_{m,n+k} & a_{m,n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

або у вигляді **лінійно не залежних векторів**

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{m,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P_k = \begin{pmatrix} a_{1,n+k} \\ a_{2,n+k} \\ \dots \\ a_{m,n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P_m = \begin{pmatrix} a_{1,n+m} \\ a_{2,n+m} \\ \dots \\ a_{m,n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 3. Запис матриці задачі, поняття симплексної таблиці

Загальна матриця задачі у такому випадку прийме вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m,j} & a_{m,n} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Побудуємо 1-шу симплексну таблицю.

Перша симплексна таблиця

| $i$      | Базисні змінні | Обсяг ресурсу | $x_1$    | $x_2$    | ...      | $x_j$    | ... | $x_n$    | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | ...      | $x_{n+m}$ |
|----------|----------------|---------------|----------|----------|----------|----------|-----|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| 1        | $x_{n+1}$      | $b_1$         | $a_{11}$ | $a_{12}$ |          | $a_{1j}$ |     | $a_{1n}$ | 1         | 0         |          | 0         |
| 2        | $x_{n+2}$      | $b_2$         | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\vdots$ | $a_{2j}$ |     | $a_{2n}$ | 0         | 1         | $\vdots$ | 0         |
| $\vdots$ | $\vdots$       | $\vdots$      | $\vdots$ | $\vdots$ |          | $\vdots$ |     | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$  |          | $\vdots$  |
| $m$      | $x_{n+m}$      | $b_m$         | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ |          | $a_{mj}$ |     | $a_{mn}$ | 0         | 0         |          | 1         |
| $m+1$    |                | F(x)          | $-c_1$   | $-c_2$   | ...      | $-c_j$   |     | $-c_n$   | 0         | 0         | ...      | 0         |

- 1) У стовпці «базисні змінні» записують , змінні які є припустимим рішенням поточного плану.
- 2) У стовпцях  $x_1, x_2, \dots, x_n$  коефіцієнти  $a_{ij}$  при змінних в обмеженнях задачі
- 3) У стовпцях  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$  записують коефіцієнти додаткових змінних задачі
- 4) У стовпці  $b_i$  записують **обсяги ресурсу**  $b_i$ , у системі обмежень.
- 5) У  $(m + 1)$ -й рядку записують значення коефіцієнтів цільової функції з протилежним знаком.
- 6) Значення цільової функції (в опорному плані – 0, далі розраховується за формулами)

### **Контрольні питання**

1. Поняття симплекс методу.
2. Запис математичної моделі
3. Загальний алгоритм рішення задачі симплекс методом
4. Які змінні є базисними ?
5. Які змінні називаються вільними?
6. Які коефіцієнти мають базисні змінні?
7. Як називаються додаткові змінні.?
8. Яка умова повинна виконуватись, для висновку про оптимальність рішення.?
9. Побудова першої симплексної таблиці,
10. Економічна інтерпретація коефіцієнтів таблиці.

### **Тести для самоконтролю**

1. При перетворенні задачі у канонічний вид кількість додаткових змінних рівно :
  - а. кількості нерівностей у системі обмежень

- b. кількості рівнянь у системі обмежень
- c. кількості основних змінних задачі
- d. кількості стовбців матриці задачі

2. Кількість стовбців матриці задачі рівно :

- a. кількості основних та додаткових змінних задачі
- b. кількості рівнянь та нерівностей у системі обмежень задачі
- c. кількості тільки основних змінних задачі
- d. кількості тільки додаткових змінних задачі

3. Кількість рядків матриці задачі рівно :

- a. кількості рівнянь та нерівностей у системі обмежень задачі
- b. кількості основних та додаткових змінних задачі
- c. кількості тільки основних змінних задачі
- d. кількості тільки додаткових змінних задачі

4. У системі 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases},$$

базисними змінними є:

- a.  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$
- b.  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- c.  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$
- d.  $b_1, b_2, \dots, b_m$

5. Змінна  $X_{n+1}$  має коефіцієнт:
- a. рівний «1» і входить до складу тільки одного першого рівняння
  - b. рівний «0» і входить до складу тільки одного першого рівняння
  - c. рівний «1» і входить до складу усіх рівнянь системи
  - d. рівний «0» і входить до складу усіх рівнянь системи
6. Змінні  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  виступають як
- a. базисні
  - b. основні
  - c. вільні
  - d. головні
7. Змінні  $X_1, X_2, \dots, X_n$  називаються
- a. базисні
  - b. додаткові
  - c. вільні
  - d. головні
8. Кількість базисних змінних дорівнює
- a. кількості обмежень
  - b. кількості основних змінних
  - c. кількості вільних змінних
  - d. вірно у твердженні b та c
9. У стовпці 1-шої симплексної таблиці «базисні змінні» записують
- a. змінні які є припустимим рішенням поточного плану
  - b. основні змінні поточного плану

- c. вільні змінні поточного плану
  - d. техніко-економічні коефіцієнти системи обмежень
10. У стовпцях 1-шої симплексної таблиці  $x_1, x_2, \dots, x_n$  коефіцієнти  $a_{ij}$
- a. змінні які є припустимим рішенням поточного плану
  - b. основні змінні поточного плану
  - c. вільні змінні поточного плану
  - d. техніко-економічні коефіцієнти системи обмежень
11. У стовпцях 1-шої симплексної таблиці  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$  записують
- a. змінні які є припустимим рішенням поточного плану
  - b. вільні змінні поточного плану
  - c. техніко-економічні коефіцієнти системи обмежень
  - d. коефіцієнти додаткових змінних задачі
12. У стовпці 1-шої симплексної таблиці  $b_i$  записують
- a. змінні які є припустимим рішенням поточного плану
  - b. обсяги ресурсу
  - c. техніко-економічні коефіцієнти системи обмежень
  - d. коефіцієнти додаткових змінних задачі
13. У  $(m + 1)$ -му рядку 1-шої симплексної таблиці записують
- a. змінні які є припустимим рішенням поточного плану
  - b. обсяги ресурсу
  - c. техніко-економічні коефіцієнти системи обмежень
  - d. коефіцієнти цільової функції з протилежним знаком



14.  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  це:

- a. загальний запис системи обмежень задачі
- b. загальний запис цільової функції задачі
- c. загальний запис математичної моделі задачі
- d. загальний запис достатніх умов задачі

15.  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  це:

- a. загальний запис цільової функції задачі
- b. загальний запис системи обмежень задачі
- c. загальний запис математичної моделі задачі
- d. загальний запис необхідних умов задачі

16. у  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  коефіцієнт  $a_{ij}$  це:

- a. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- c. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

17. у  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j [\leq = \geq] b_i, (i = 1 \dots m)$  коефіцієнт  $b_i$  це:

- a. загальний запис обсягу наявних ресурсів
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- c. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- d. загальний запис змінної математичної моделі задачі

18.  $y \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  коефіцієнт  $c_j$  це:

- a. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- c. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

19.  $y \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \left[ \frac{\max}{\min} \right]$  коефіцієнт  $x_j$  це:

- a. загальний запис змінної математичної моделі задачі
- b. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту цільової функції
- c. загальний запис техніко-економічного коефіцієнту системи обмежень
- d. загальний запис обсягу наявних ресурсів

## Тема 5

### Пошук оптимального рішення, загальний алгоритм та економічний зміст математичних розрахунків.

**Мета:** засвоєння засад пошуку оптимального рішення алгоритму та економічного змісту математичних розрахунків

#### **План викладання і засвоєння матеріалу:**

1. Загальний алгоритм, пошуку оптимального рішення економічних задач.
2. Приклад рішення задачі та економічний зміст математичних розрахунків.

**Література** {[1] с.135-153, [3] 145-165, [5] с.140-170, [7] 270-320, [12] 250-310, }

1. *Загальний алгоритм, пошуку оптимального рішення економічних задач.*

**Алгоритм рішення задачі** починається з перевірки плану на оптимальність. Відповідно після заповнення першої таблиці **отримують опорний план, який** перевіряють на оптимальність. Для цього переглядаємо елементи  $(m + 1)$ -й рядка, першої симплексної таблиці (лекція 4).

#### **Можливі варіанти:**

- 1) Всі елементи  $(m + 1)$  рядка  $c_j \geq 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) - План є оптимальним.
- 2) Декілька елементів  $(m + 1)$  рядка  $c_j < 0$  Існує декілька рішень (множина планів.)
- 3) Один елемент  $(m + 1)$  рядка  $c_j < 0$ . Існує єдине рішення (єдино можлива ітерація, що може призвести до оптимальності)

У випадку 2 і 3 переходимо до наступної симплексної таблиці, шляхом перерахунку, алгоритм якого наступний:

1. Визначення **ключового елементу** :

**а) визначимо ключовий стовбець.**

**Ключовим стовбцем** буде відповідний стовбець симплексної таблиці у якому коефіцієнт  $(m+1)$  (індексного) рядка має найбільше по модулю значення.

$$|\Delta_k| = \max_{j=m+1;n} |C_j|.$$

Приймемо що елемент  $c_k$  – задовольняє вище наведеному твердженню, отже стовпець « $x_k$ » вважаємо ключовим.

**б) визначимо ключовий рядок.**

Для цього необхідно елементи рядка  $b_i$  (**обсяги обмежень**) поділити на відповідні елементи **ключового стовбця**. (*ділити на 0 та від'ємні значення НЕМОЖНА*). Найменша частка від ділення і вказує на **ключовий рядок**.

$$\Theta_r = b_i / a_{ik}, \quad \min_{i=1,m} \Theta_i = \Theta_r - \text{ключовий рядок.}$$

Елемент що відповідає ключовому рядку та ключовому стовбцю і є **КЛЮЧОВИМ** елементом.

Отже, елемент  $a_{rk}$ , що знаходиться у стовпці  $k$  й рядку  $r$ . Елемент  $a_{rk}$  називається **КЛЮЧОВИМ**.

Визначення елементів наступної таблиці:

а) Визначення *елементу початкового рядка* наступної таблиці.

Для цього необхідно, відповідний елемент *ключового рядка попередньої таблиці РОЗДІЛИТИ* на *ключовий елемент* попередньої таблиці.

$$\begin{aligned} a'_{rj} &= a_{rj} / a_{rk} & j &= \overline{1, n} \\ a'_{ik} &= a_{ik} / a_{rk} & i &= \overline{1, m} \\ b'_r &= b_r / a_{rk} \end{aligned}, \text{ де}$$

$a'_{rj}, \dots, a'_{i,k}, \dots, b'_r$  - елементу початкового рядка наступної таблиці

б) Визначення елементів наступної таблиці.

Для цього необхідно, ВІД відповідного елементу попередньої таблиці ВІДНЯТИ **добуток** (відповідного елементу ключового стовбця попередньої таблиці ТА елементу початкового рядка наступної таблиці у відповідному стовбці).

$$b'_i = b_i - \frac{b_r}{a_{rk}} a_{ik} \quad (i \neq r)$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik} \quad (i \neq r)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \Delta_k;$$

$$F'_0 = F_0 - \frac{b_r}{a_{rk}}$$

$$\Delta_k = \sum C_{\delta i} b_i$$

**Побудуємо наступну таблицю згідно зазначеного вище алгоритму.**

Після перерахунку наступна таблиця прийме вид:

Друга симплексна таблиця

| $i$      | Базисні<br>змінні | Обсяг ресурсу | $x_1$     | $x_2$     | ...      | $x_j$     | ... | $x_n$     | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | ...      | $x_k$  | ...      | $x_{n+m}$ |
|----------|-------------------|---------------|-----------|-----------|----------|-----------|-----|-----------|-----------|-----------|----------|--------|----------|-----------|
| 1        | $x_{n+1}$         | $b'_1$        | $a'_{11}$ | $a'_{12}$ |          | $a'_{1j}$ |     | $a'_{1n}$ | 1         | 0         |          | 0      |          | 0         |
| 2        | $x_{n+2}$         | $b'_2$        | $a'_{21}$ | $a'_{22}$ |          | $a'_{2j}$ |     | $a'_{2n}$ | 0         | 1         |          | 0      |          | 0         |
| $\vdots$ | ....              | ....          | ....      | ....      | $\vdots$ | ....      |     | ....      | •         | •         | $\vdots$ | ....   | $\vdots$ | •         |
| $m$      | $x_k$             | $b'_r$        | $a'_{r1}$ | $a'_{r2}$ |          | $a'_{rj}$ |     | $a'_{rn}$ | •         | •         |          | 1      |          | •         |
|          | ....              | ....          | ....      | ....      |          | ....      |     | ....      | •         | •         |          | ....   |          | •         |
|          | $x_{n+m}$         | $b'_m$        | $a'_{m1}$ | $a'_{m2}$ |          | $a'_{mj}$ |     | $a'_{mn}$ | 0         | 0         |          | 0      |          | 1         |
| $m+1$    |                   | F(x)          | $-c'_1$   | $c'_2$    | ...      | $-c'_j$   |     | $-c'_n$   | 0         | 0         | ...      | $c'_k$ | ...      | 0         |

Далі перевіряють  $(m+1)$  рядок, на оптимальність відповідно вище описаному алгоритму.

Перерахунки таблиць проводять, поки не одержимо таблицю, у якій усі елементи  $(m+1)$  рядка - більші або рівні «0».

Відповідно базисні змінні такої таблиці і є **оптимальним рішенням задачі**.

## 2. Приклад рішення задачі та економічний зміст математичних розрахунків

1. Розв'яжемо задачу за допомогою наведеної вище методики розрахунків.

### 1. Постановка задачі.

Підприємству необхідно оптимізувати виробничу структуру за умови оптимального використання виробничих ресурсів та отримання максимального прибутку.

### 2. Збір обробка інформації.

Підприємство виробляє три види продуктів (А, В и С). Для виробництва продукту А потрібно 18 кг сировини І, 6 кг сировини ІІ, 5 кг сировини ІІІ; прибуток від реалізації продукту А 9 грн. Запаси сировини І на складі підприємства 360 кг. Витрати сировини на виробництво продуктів В,С та її запаси наведемо у таблиці 1.

Таблиця 1

Витрати сировини на виробництво продуктів та її запаси

| Вид сировини | Норми витрат сировини |    |    | Загальна кількість сировини |
|--------------|-----------------------|----|----|-----------------------------|
|              | А                     | В  | С  |                             |
| І            | 18                    | 15 | 12 | 360                         |
| ІІ           | 6                     | 4  | 8  | 192                         |
| ІІІ          | 5                     | 3  | 3  | 180                         |

|                                           |   |    |    |  |
|-------------------------------------------|---|----|----|--|
| Прибуток від<br>одного продукту<br>(грн.) | 9 | 10 | 16 |  |
|-------------------------------------------|---|----|----|--|

Визначення переліку змінних та обмежень.

Позначимо  $\vec{X}$  кількість продукту, що виробляється підприємством

$$x_1 - A, x_2 - B, x_3 - C$$

$b_1, b_2, b_3$  – загальний об'єми сировини I ;II; III;

(обмеження з використання сировини I ;II; III)

$a_{ij}$  – норми витрат  $i$  сировини на виробництво  $j$ -го виробу;

(техніко-економічні коефіцієнти при змінних у системі обмежень)

$c_1, c_2, c_3$  – ціна одного виробу.

(коефіцієнти цільової функції)

### 3. Побудова математичної моделі.

Математичний запис критерію оптимальності:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max$$

Математичний запис системи обмежень:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j \quad (j = \overline{1, m})$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n})$$



Підставимо вихідну інформацію у математичну модель, отримаємо наступну систему нерівностей та цільову функцію.

$$F(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Запишемо задачу в канонічному виді шляхом введення додаткових змінних. Відповідно задача прийме вид:

$$F(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 180 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

**Економічний зміст додаткових змінних – залишок ресурсу відповідного виду , зокрема  $x_4$  – залишок сировини I, и.т.д.**

Будуємо першу симплексну таблицю – відповідно базисними змінними будуть виступати  $(x_4, x_5, x_6)$  оскільки, якщо початкові значення  $x_1, \dots, x_3 = 0$  то відповідно опорний план має вигляд :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0, & 0, & 0, & 360, & 192, & 180 \end{pmatrix}.$$

Будуємо першу симплекс-таблицю (таблиця 1):

Значення основних змінних  $x_1, x_2, x_3$  дорівнюють нулю. Ці значення відповідають такому плану, при якому нічого не виробляється, сировина не використовується відповідно значення **цільової функції дорівнює нулю** ( $F=0$ ).

Зрозуміло, що цей план не є оптимальним. Оскільки у  $m+1$  рядку є від'ємні значення.

### ***Визначення ключового елементу***

**а) визначимо ключовий стовбець.**

**Ключовим стовбцем** буде відповідний стовбець симплексної таблиці у якому коефіцієнт  $(m+1)$  (індексного) рядка має **найбільше по модулю значення**.

$$|\Delta_k| = \max_{j=m+1;n} |C_j|.$$

Проаналізуємо, **на скільки збільшиться сума прибутку** при введенні в план одиниці конкретного виду продукту.

**Наприклад**, виробимо 1 одиницю продукту А тоді прибуток підприємства збільшиться на 9 грн. Відповідно якщо виробити продукт В прибуток складе 10 грн., та 16 грн. буде одержано підприємством при виробництві одного продукту С.

**Отже від'ємні значення у  $m+1$  рядку** означають можливість отримання додаткового прибутку.

Таблиця 1

Перша симплексна таблиця

| $i$ | Базис       | $B_i$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-----|-------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$       | 360     | 18    | 15    | 12    | 1     | 0     | 0     |
| 2   | $x_5$       | 192     | 6     | 4     | 8     | 0     | 1     | 0     |
| 3   | $x_6$       | 180     | 5     | 3     | 3     | 0     | 0     | 1     |
| m+1 | $Z_j - C_i$ | $F = 0$ | -9    | -10   | -16   | 0     | 0     | 0     |

З економічної точки зору найбільше доцільно включити у базис продукт С, тому що за рахунок цього відбудеться збільшення прибутку на 16грн.

$$(16 = \max \Delta_j = \max(9, 10, 16))$$

Відповідно  $|C_k|=16$

Отже, у базис уведемо змінну  $x_3$ . Елементи стовбця  $x_3$  - **складають ключовий стовбець (стовбець 3 основної матриці)**

**б) визначимо ключовий рядок.**

Для цього необхідно елементи рядка  $b_i$  (**обсяги обмежень**) поділити на відповідні елементи **ключового стовбця**. (ділити на 0 та від'ємні значення **НЕМОЖНА**). Найменша частка від ділення і вказує на **ключовий рядок**.

$$\Theta_r = b_i / a_{ik}, \min_{i=1,m} \Theta_i = \Theta_r - \text{ключовий рядок.}$$

$$\text{Знаходимо } \min\left(\frac{360}{12} = 30; \frac{192}{8} = 24; \frac{180}{3} = 60\right) = \frac{192}{8} = 24.$$

$192/8 = 24$  – мінімальне значення.

**24 - можлива кількість продукту виду С при максимальному економічному ефекті та повному використанню ресурсу II.**

**Витрачаємо 192 одиниці сировини II отримуємо  $16 \cdot 24 = 384$  грн прибутку.**  
(неможна розглядати витрати сировини I, та III оскільки при виробництві продукту С більше ніж 24, не вистачить ресурсу II)

Елемент що відповідає ключовому рядку та ключовому стовбцю і є **КЛЮЧОВИМ** елементом.

Елемент стовпця  $x_3$  та рядка 192 (рядок 2) є **КЛЮЧОВИМ** елементом = 8

Отже якщо сировина II вичерпана повністю то  $x_5 = 0$  ( $x_5$  - залишок сировини за умовою позначень додаткових змінних)

Виключимо  $x_5$  з базису на його місце введемо  $x_3$ , оскільки тепер дана невідома  $\neq 0$  ( $x_3 = 24$ )

Рядок 2 і стовбець 3 (елементи при  $x_3$ ) та 8 є ключовими.

Заповнюємо нову таблицю (таблиця 2)

У стовпці  $x_3$  на перетинанні з рядком  $x_3$  ставимо 1, інші елементи = 0.

***Визначення елемента початкового рядка наступної таблиці.***

Для цього необхідно, відповідний елемент ключового **рядка** попередньої таблиці (192, 6, 4, 8, 0, 1, 0) **РОЗДІЛИТИ** на ключовий елемент попередньої таблиці (8).

$$\begin{aligned} a'_{rj} &= a_{rj} / a_{rk} & j &= \overline{1, n} \\ a'_{ik} &= a_{ik} / a_{rk} & i &= \overline{1, m} \\ b'_r &= b_r / a_{rk} \end{aligned} \quad , \text{ де}$$

Отримаємо (24, 6/8, 1/2, 1, 0, 1/8, 0) - **елементи початкового рядка наступної таблиці.**

Таблиця 2

Перша ітерація

| $i$   | Базис | $B_i$       | $x_1$  | $x_2$ | $x_3$    | $x_4$ | $x_5$  | $x_6$ |
|-------|-------|-------------|--------|-------|----------|-------|--------|-------|
| 1     | $x_4$ | 72          | 9      | 9     | 0        | 1     | $-3/2$ | 0     |
| 2     | $x_3$ | 24          | $6/8$  | $1/2$ | <b>1</b> | 0     | $1/8$  | 0     |
| 3     | $x_6$ | 108         | $11/4$ | $3/2$ | 0        | 0     | $-3/8$ | 1     |
| $m+1$ |       | $F_0 = 384$ | 3      | $-2$  | 0        | 0     | 2      | 0     |

### Визначення елементів наступної таблиці.

Для цього необхідно, ВІД відповідного елементу попередньої таблиці ( $18-a_{1,1}$ ) ВІДНЯТИ **добуток** (відповідного елементу ключового стовбця попередньої таблиці( $12-a_{1,3}$ ) ТА елементу початкового рядка наступної таблиці у відповідному стовбці **6/8**).

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik} \quad (i \neq r)$$

Інші елементи таблиці перераховуємо за правилом прямокутника.

Наприклад

$$a'_{11} = a_{11} - a_{1,3} \cdot a^*_{2,1} = 18 - (12 \cdot \frac{6}{8}) = 18 - 9 = 9$$

$$b'_1 = 360 - (12 \cdot 24) = 360 - 288 = 72$$

$$a'_{1,3} = 5 - (3 \cdot \frac{6}{8}) = 5 - \frac{18}{8} = 5 - 2\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

і т.д.

$$F = 0 - (-16) \cdot 24 = 0 + 384 = 384$$

Рядок  $\Delta_j$  заповнюється по цьому ж правилу.

Одержуємо новий опорний план  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0, & 0, & 24, & 72, & 0, & 108, \end{pmatrix}$ . При цьому

плані виготовляє 24 од. виробу С и залишається невикористаним 72 кг сировини І і 108 кг сировини ІІІ. Вартість виробленої продукції складе 384 грн.

Відповідно оптимізувати план можливо оскільки в **m+1 рядку є від'ємні елементи. (-2)**.

Перерахунки таблиць проводять, поки не одержимо таблицю, у якій усі елементи  $(m+1)$  рядка -  $\Delta_j > 0$ .

## Приклад рішення задачі 2.

### 1. Постановка задачі

На заводі випускають вироби чотирьох типів. Від реалізації 1 од. кожного виробу завод отримує прибуток відповідно 2, 1, 3, 5 гр. од. На виготовлення виробів використовуються ресурси трьох типів: енергія, матеріали, труд.

Сплануйте виробництво виробів так, щоб прибуток від їх реалізації був найбільший. Та проведіть аналіз залишку ресурсів.

### 2. Збір та обробка інформації

Дані про технологічний процес наведені в наступній таблиці:

| Ресурси   | Витрати на один виріб |    |     |    | Запаси ресурсів, од |
|-----------|-----------------------|----|-----|----|---------------------|
|           | I                     | II | III | IV |                     |
| Енергія   | 2                     | 3  | 1   | 2  | 30                  |
| Матеріали | 4                     | 2  | 1   | 2  | 40                  |
| Труд      | 1                     | 2  | 3   | 1  | 25                  |

### 3. Визначення переліку змінних та обмежень.

#### Позначимо

$x_1$  - кількість виробів типу I

$x_2$  - кількість виробів типу II

$x_3$  - кількість виробів типу III

$x_4$  - кількість виробів типу IV

#### Введемо додаткові змінні.

**Загальна кількість додаткових змінних = кількості обмежень.**

Зокрема у кожне з обмежень введемо по одній додатковій змінній.



**Кількість обмежень складає - 3, відповідно до кількості ресурсів.**

Зокрема:

- 1 обмеження по можливості використання обсягу Енергії
- 2 обмеження по можливості використання обсягу Матеріалів
- 3 обмеження по можливості використання обсягу Трудових ресурсів

***Позначимо***

$x_5$  - можливий залишок використання обсягу Енергії

$x_6$  - можливий залишок використання обсягу Матеріалів

$x_7$  - можливий залишок використання обсягу Трудових ресурсів

**Відповідно позначенням**

Кількість змінних = 7

кількість обмежень = 3

***4. Побудова математичної моделі.***

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25$$

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

Приведемо задачу до канонічного виду шляхом введення додаткових змінних

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 25$$

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

Побудуємо першу симплексну таблицю (таблиця 1)

### Розрахунки

#### *Крок 1. Визначення ключового стовпчика.*

Ключовим стовпчиком вважається стовбець у якому знаходиться максимальний по модулю елемент з від'ємних значень.

Отже відповідно таблиці 1 ключовим стовпчиком буде « $x_4$ » оскільки -5 максимальне по модулю значення.

#### *Крок 2. Визначення ключового рядка.*

Для цього необхідно елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) поділити на відповідні елементи **ключового стовбця**. (ділити на 0 та від'ємні значення НЕМОЖНА). Найменша частка від ділення і вказує на ключовий рядок.

Проведемо розрахунки :

$$\frac{30}{2} = 15$$

$$\frac{40}{2} = 20$$

$$\frac{25}{1} = 25$$

Оскільки **найменша частка від ділення = 15** рядок №1 буде ключовим.

Таблиця 1

## Перша симплексна таблиця

| $i$ | Базис<br>«додаткові<br>змінні» | $B_i$<br>«обсяг<br>ресурсу» | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|-----|--------------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_5$                          | 30                          | 2     | 3     | 1     | 2     | 1     | 0     | 0     |
| 2   | $x_6$                          | 40                          | 4     | 2     | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     |
| 3   | $x_7$                          | 25                          | 1     | 2     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| m+1 | $Z_j - C_i$                    | $F = 0$                     | -2    | -1    | -3    | -5    | 0     | 0     | 0     |

Таблиця 2

Друга симплексна таблиця (заповнення початкового рядка)

| $i$ | Базис<br>«додаткові змінні» | $B_i$<br>«обсяг<br>ресурсу» | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|-----|-----------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$                       | 15                          | 1     | 1.5   | 0.5   | 1     | 0.5   | 0     | 0     |
| 2   | $x_6$                       | 10                          |       |       |       |       |       |       |       |
| 3   | $x_7$                       |                             |       |       |       |       |       |       |       |
| m+1 | $Z_j - C_i$                 |                             |       |       |       |       |       |       |       |

### Крок 3. Визначення ключового елемента.

Елемент що знаходиться на перетині ключового рядку та ключовому стовбця  $i$  є **КЛЮЧОВИМ** елементом. Відповідно *ключовий елемент* = 2.

### Крок 4. Визначення елементів початкового рядка наступної таблиці.

Для цього необхідно, відповідний *елемент ключового рядка попередньої таблиці* (30;2;3;1;2;1;0;0) **РОЗДІЛИТИ** на *ключовий елемент* попередньої таблиці (2).

Проведемо розрахунки:

$$\frac{30}{2} = 15 \quad \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{3}{2} = 1.5 \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{0}{2} = 0 \quad \frac{0}{2} = 0$$

Побудова наступної симплексної таблиці

Заповнюємо початковий рядок (таблиця 2)

### Крок 5. Визначення елементів наступної таблиці.

Для цього необхідно, ВІД *відповідного елемента* попередньої таблиці (**40**) ВІДНЯТИ *добуток* (відповідного елемента ключового стовбця попередньої таблиці(**2**) ТА елемента початкового рядка наступної таблиці у відповідному стовбці (**15**).

Проведемо розрахунки решта елементів стовпчика  $B_i$

$$40 - (2 * 15) = 10$$

$$25 - (1 * 15) = 10$$

$$0 - (-5 * 15) = 75$$

### Розрахунок елементів таблиці 2

| стовпчик<br>$x_1$   | стовпчик<br>$x_2$       | стовпчик<br>$x_3$        | стовпчик<br>$x_4$   | стовпчик<br>$x_5$      | стовпчик<br>$x_6$  | стовпчик<br>$x_7$  |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------|------------------------|--------------------|--------------------|
| $4 - (2 * 1) = 2$   | $2 - (2 * 1,5) = -1$    | $1 - (2 * 0,5) = 0$      | $2 - (2 * 1) = 0$   | $0 - (2 * 0,5) = -1$   | $1 - (2 * 0) = 1$  | $0 - (2 * 0) = 0$  |
| $1 - (1 * 1) = 0$   | $2 - (1 * 1,5) = 0,5$   | $1 - (1 * 0,5) = 0,5$    | $1 - (1 * 1) = 0$   | $0 - (1 * 0,5) = -0,5$ | $0 - (1 * 0) = 0$  | $1 - (1 * 0) = 1$  |
| $-2 - (-5 * 1) = 3$ | $-1 - (-5 * 1,5) = 6,5$ | $-3 - (-5 * 0,5) = -0,5$ | $-5 - (-5 * 1) = 0$ | $0 - (-5 * 0,5) = 2,5$ | $0 - (-5 * 0) = 0$ | $0 - (-5 * 0) = 0$ |

Таблиця 3

Друга симплексна таблиця (внесення розрахунків )

| $i$ | Базис<br>«додаткові змінні» | $B_i$<br>«обсяг<br>ресурсу» | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|-----|-----------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$                       | 15                          | 1     | 1.5   | 0.5   | 1     | 0.5   | 0     | 0     |
| 2   | $x_6$                       | 10                          | 2     | -1    | 0     | 0     | -1    | 1     | 0     |
| 3   | $x_7$                       | 10                          | 0     | 0.5   | 0.5   | 0     | -0.5  | 0     | 1     |
| m+1 | $Z_j - C_i$                 | 75                          | 3     | 6.5   | -0.5  | 0     | 2.5   | 0     | 0     |

Надалі розрахунки проводяться аналогічно, до тих пір поки у (m+1) рядку **небуде від'ємних елементів**.

Розрахуємо елементи наступної таблиці оскільки у (m+1) рядку є від'ємний елемент **(-0,5)**. Оскільки від'ємний елемент один (таблиця 3), відповідно **ключовий стовпчик « $x_3$ » (Крок 1)**.

#### **Знаходимо ключовий рядок**

За правилом **(Крок 2)** визначення на «0» ділити не можна відповідно мінімальна частка від ділення ( $10/0,5=5$ ). Отже ключовим рядком є рядок 3.

#### **Визначення ключового елементу.**

За правилом **(Крок 3)** елемент = **0,5**.

#### **Визначення елементів початкового рядка наступної таблиці.**

За правилом **(Крок 4)** отримаємо:

| $i$ | Базис<br>«додаткові<br>змінні» | $B_i$<br>«обсяг<br>ресурсу» | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|-----|--------------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$                          |                             |       |       |       |       |       |       |       |
| 2   | $x_6$                          |                             |       |       |       |       |       |       |       |
| 3   | $x_3$                          | 5                           | 0     | 1     | 1     | 0     | -1    | 0     | 0,5   |
| m+1 | $Z_j - C_i$                    |                             |       |       |       |       |       |       |       |

#### **Визначення елементів наступної таблиці.**

За правилом **(Крок 5)** отримаємо:

| $i$      | Базис<br>«додаткові<br>змінні» | $B_i$<br>«обсяг<br>ресурсу» | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    | $x_5$     | $x_6$    | $x_7$      |
|----------|--------------------------------|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|------------|
| 1        | $x_4$                          | 12,5                        | 1        | 1        | 0        | 1        | 0         | 0        | 0,5        |
| 2        | $x_6$                          | 10                          | 2        | -1       | 0        | 0        | -1        | 1        | 0          |
| <b>3</b> | <b><math>x_3</math></b>        | <b>5</b>                    | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>-1</b> | <b>0</b> | <b>0,5</b> |
| m+1      | $Z_j - C_i$                    | 76,25                       | 3        | 7        | 0        | 0        | 3         | 0        | 0,25       |

Оскільки у **(m+1)** рядку немає **від'ємних елементів** рішення оптимальне.

Аналіз та прийняття управлінського рішення.

Якщо змінна відсутня у стовпчику «базис», її значення =0

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 5$$

$$x_4 = 12,5$$

$$x_5 = 0$$

$$x_6 = 10$$

$$x_7 = 0$$

Пропонуємо виробляти:

5 -виробів типу III ( $x_1$ )

12,5 -виробів типу IV. ( $x_4$ )

При цьому залишиться 10 одиниць матеріалів. ( $x_6$ )

**Прибуток** складе 76,25 грошових одиниць -  $f(x)$

### **Контрольні питання**

1. Пошук ключового стовпця
2. Пошук ключового рядка,
3. Що таке ключовий елемент.
4. Побудова другої симплексної таблиці
5. Принцип пошуку елементів наступних симплексних таблиць.

### **Тести для самоконтролю**

1. Якщо всі елементи  $(m + 1)$ - індексного рядка симплексної таблиці « $\geq$ » 0
  - a. план є оптимальним
  - b. план не є оптимальним
  - c. наступна ітерація може призвести до оптимального плану
  - d. оптимального плану не існує



2. Якщо один елементи  $(m + 1)$ - індексного рядка симплексної таблиці «<» 0
- a. наступна ітерація може призвести до оптимального плану
  - b. план є оптимальним
  - c. план не є оптимальним
  - d. оптимального плану не існує
3. При переході до наступної симплексної таблиці спочатку необхідно:
- a. визначити ключовий стовпець
  - b. визначити ключовий рядок
  - c. визначити ключовий елемент
  - d. вірної відповіді не має
4. Ключовим стовпцем буде відповідний стовпець симплексної таблиці у якому коефіцієнт  $(m + 1)$  (індексного) рядка :
- a. має найбільше по модулю значення
  - b. має найменше по модулю значення
  - c. має найбільше значення
  - d. має значення «0», якщо інші коефіцієнти мають додатні і від'ємні значення
5. Для визначення ключового рядку симплексної таблиці необхідно :
- a. елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) поділити на відповідні елементи ключового стовпця
  - b. елементи ключового стовпця поділити на відповідні елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень)
  - c. елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) помножити на відповідні елементи ключового стовпця

- d. елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) відняти відповідні елементи ключового стовпця
6. Для визначення елементу початкового рядка наступної симплексної таблиці необхідно :
- a. відповідний елемент ключового рядка попередньої таблиці поділити на ключовий елемент попередньої таблиці
  - b. відповідні елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) поділити на відповідні елементи ключового стовпця
  - c. відповідний елемент ключового рядка попередньої таблиці помножити на ключовий елемент попередньої таблиці
  - d. необхідно елементи рядка  $b_i$  (обсяги обмежень) помножити на відповідні елементи ключового стовпця
7. Для визначення елементів наступної симплексної таблиці необхідно :
- a. від відповідного елементу попередньої таблиці відняти добуток відповідного елементу ключового стовпця попередньої таблиці та елементу початкового рядка наступної таблиці у відповідному стовбці
  - b. відповідний елемент ключового рядка попередньої таблиці поділити на ключовий елемент попередньої таблиці
  - c. відповідний елемент ключового рядка попередньої таблиці помножити на ключовий елемент попередньої таблиці
  - d. від відповідного елементу попередньої таблиці відняти суму відповідного елементу ключового стовпця попередньої таблиці та елементу початкового рядка наступної таблиці у відповідному стовбці
8. Ключовим стовпцем наведеної симплексної таблиці є:

| $i$ | Базис       | $B_i$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-----|-------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$       | 360     | 18    | 15    | 12    | 1     | 0     | 0     |
| 2   | $x_5$       | 192     | 6     | 4     | 8     | 0     | 1     | 0     |
| 3   | $x_6$       | 180     | 5     | 3     | 3     | 0     | 0     | 1     |
| m+1 | $Z_j - C_i$ | $F = 0$ | -9    | -10   | -16   | 0     | 0     | 0     |

a. стовпець  $x_1$

b. стовпець  $x_2$

c. стовпець  $x_3$

d. стовпець  $x_4$

9. Ключовим рядком наведеної симплексної таблиці є:

$$(360/12=30); (192/8=24); (180/3=60)$$

| $i$ | Базис       | $B_i$   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-----|-------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | $x_4$       | 360     | 18    | 15    | 12    | 1     | 0     | 0     |
| 2   | $x_5$       | 192     | 6     | 4     | 8     | 0     | 1     | 0     |
| 3   | $x_6$       | 180     | 5     | 3     | 3     | 0     | 0     | 1     |
| m+1 | $Z_j - C_i$ | $F = 0$ | -9    | -10   | -16   | 0     | 0     | 0     |

a. рядок 1

b. рядок 2

c. рядок 3

d. рядок (m+1)

10. Ключовий елемент симплексної таблиці знаходиться :

- a. у перетині ключового рядку та ключового стовпця симплексної таблиці
- b. у ключовому рядку симплексної таблиці
- c. у ключовому стовбці симплексної таблиці
- d. у  $(m+1)$  – індексному рядку симплексної таблиці

## Тема 6

### Пошук оптимального рішення економічних задач пов'язаних з логістикою перевезень, загальна постановка задачі побудова матриці.

**Мета:** засвоєння засад постановки та побудови першого опорного плану транспортної задачі

#### *План викладання і засвоєння матеріалу:*

1. Загальна постановка та математична модель задачі
2. Поняття закритого та відкритого типу задачі
3. Побудова матриці задачі, приклад та алгоритм рішення.

**Література** {[2] с.140-162, [5] 153-171, [6] с.164-192, [11] 320-353, [12] 334-350, }

#### *1. Загальна постановка та математична модель задачі*

**Загальна постановка задачі:** визначення оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з  $m$  пунктів відправлення  $A_1, A_2, \dots, A_m$  в  $n$  пунктів призначення  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . При цьому як критерій оптимальності виступає або мінімальна вартість перевезень усього вантажу, або мінімальний час його доставки.

Розглянемо транспортну задачу, критерій оптимальності якої складає мінімальну вартість перевезень вантажу.

Позначимо

$c_{ij}$  – тарифи перевезення одиниці вантажу з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення;

$a_i$  – запаси вантажу в  $i$ -ому пункті;

$b_j$  – потреби вантажу в  $j$ -ому пункті;

$x_{ij}$  – кількість одиниць вантажу, перевезеного з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення.

Тоді математична модель задачі прийме вигляд:

*Математичний запис критерію оптимальності*

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

*Математичний запис системи обмежень*

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (4)$$

Будь-яке рішення, що задовольняє умовам системи рівнянь (2)-(3) і обумовлений матрицею  $X = (x_{ij}) (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$  називається **планом транспортної задачі**.

План  $X^* = (x_{ij}^*)$ , при якому функція (1) приймає своє мінімальне значення, називається **оптимальним планом** транспортної задачі.

Звичайно дані записують у вигляді таблиці (таблиця 1)

Де

$\sum_{i=1}^m a_i$  - загальна наявність вантажу в пунктах відправлення;

$\sum_{j=1}^n b_j$  - загальна потреба у вантажі в пунктах призначення.

Таблиця 1

| Пункти<br>відправл<br>ення | Пункти призначення   |     |                      |     |                      | Запаси |
|----------------------------|----------------------|-----|----------------------|-----|----------------------|--------|
|                            | $B_1$                | ... | $B_j$                | ... | $B_n$                |        |
| $A_1$                      | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | ... | $c_{1j}$<br>$x_{1j}$ | ... | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$  |
| ...                        | ...                  | ... | ...                  | ... | ...                  | ...    |
| $A_i$                      | $c_{i1}$<br>$x_{i1}$ | ... | $c_{ij}$<br>$x_{ij}$ | ... | $c_{in}$<br>$x_{in}$ | $a_i$  |
| ...                        | ...                  | ... | ...                  | ... | ...                  | ...    |
| $A_m$                      | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | ... | $c_{mj}$<br>$x_{mj}$ | ... | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$  |
| Потреби                    | $b_1$                | ... | $b_j$                | ... | $b_n$                | ...    |

## 2. Поняття закритого та відкритого типу задачі

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасові вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (5)$$

модель такої задачі називається **закритого типу**. Якщо ж зазначена умова не виконана, то модель називається **відкритого типу**.

Для можливості розв'язання транспортної задачі **відкритого типу** необхідно привести її до **закритого типу**:

а. Якщо запаси перевищують потреби, тобто  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ ,

вводиться додатковий  $(n+1)$ -й пункт призначення з потребою

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  тарифи вважаються при наймі на 1 більші за

будь-який із існуючих:  $c_{i,n+1} = [\max(c_{i,j}) + 1]$ . Таким чином маємо транспортну задачу, що задовольняє умові (5) (**закритого типу**).

б. Якщо потреби перевищують запаси, тобто  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$

вводиться додатковий  $(m+1)$ -й пункт відправлення з запасом

$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$  тарифи приймаються при наймі на 1 більші за

будь-який із існуючих:  $c_{i,m+1} = [\max(c_{i,j}) + 1]$ . Таким чином маємо транспортну задачу, що задовольняє умові (5) (**закритого типу**).

Число змінних  $X_{ij} = n \cdot m$

Число рівнянь у системах (2), (3)  $= n + m$

Де,  $m$  - кількість пунктів відправлення

$n$  - кількість пунктів призначення



Опорний план транспортної задачі має  $n + m - 1$  відмінних від нуля значень (зайнятих клітинок).

Якщо план задачі має менше  $n + m - 1$  зайнятих клітинок (кількість змінних відмінних від 0), такий план називається виродженим та може не мати можливості провести оптимізацію.

Відповідно у такому випадку необхідно присвоїти будь-якій вільній клітинці - статус зайнятої.

### 3. Побудова матриці задачі, приклад та алгоритм рішення

**Постановка задачі.** Чотири підприємства використовують три види сировини. Потреба в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнює 120, 50, 190 і 110 од. Сировина зосереджена в трьох місцях і її запаси дорівнюють 160, 140 і 170 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого складу.

Необхідно оптимізувати структуру перевезень з метою мінімізації транспортних витрат.

**Збір обробка інформації.** Тарифи перевезень сировини з пунктів відправлення в пункт призначення запишемо у таблицю.

Тарифи перевезень сировини

Таблиця 2

| Пункти відправлення | Пункти призначення |       |       |       |
|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|
|                     | $B_1$              | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$               | 7                  | 8     | 1     | 2     |

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $A_2$ | 4 | 5 | 9 | 8 |
| $A_3$ | 9 | 2 | 3 | 6 |

*Перевірка задачі на закритий вид.* Перевіримо виконання умови (5).

Тобто порівняємо запаси сировини в усіх пунктах (можливість постачання) із загальною потребою підприємств.

$$\sum_{i=1}^m a_i = 160 + 140 + 170 = 470$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 120 + 50 + 190 + 110 = 470$$

Як бачимо умова (5) виконується тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

$$470 = 470$$

Отже задача є **закритого типу**, відповідно, є можливість отримати розв'язок.

**Побудова матриці задачі.** Представимо у вигляді таблиці інформацію про можливості та потреби постачання сировини, а також тарифи перевезення сировини.

Матриця задачі

Таблиця 3

| Пункти<br>відправлення | Пункти призначення |       |       |       | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|------------------------|--------------------|-------|-------|-------|------------------------------------|
|                        | $B_1$              | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |                                    |
| $A_1$                  | 7                  | 8     | 1     | 2     | 160                                |
| $A_2$                  | 4                  | 5     | 9     | 8     | 140                                |
| $A_3$                  | 9                  | 2     | 3     | 6     | 170                                |
| Загальна<br>потреба    | 120                | 50    | 190   | 110   | 470                                |

### **Контрольні питання**

1. У чому полягає головна ідея постановки транспортної задачі
2. Запишіть критерій оптимальності транспортної задачі
3. Запишіть систему обмежень транспортної задачі
4. Що таке закритий вид транспортної задачі.
5. Що таке закритий відкритий вид транспортної задачі,
6. Яким чином задачу відкритого виду приводять до закритого.
7. Який план транспортної задачі називається виродженим
8. Що таке зайнята клітинка у плані транспортної задачі

9. Що таке вільна клітинка у плані транспортної задачі
10. Яка кількість зайнятих клітинок повинна бути для можливості продовження рішення транспортної задачі.
11. Яким чином можливо уникнути виродженості при рішенні транспортної задачі.

### Тести для самоконтролю

1. Критерій оптимальності транспортної задачі має вигляд:

a. 
$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

b. 
$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

c. 
$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

d. 
$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

2. У обмежені транспортної задачі  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$  елемент  $x_{ij}$  - це:

- a. кількість одиниць вантажу, перевезеного з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення
- b. тарифи перевезення одиниці вантажу з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення
- c. потреби вантажу в  $j$ -ому пункті який перевезуть з  $i$ -го пункту відправлення
- d. запаси вантажу в  $i$ -ому пункті який перевезуть у  $j$ -й пункт призначення

3. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасові вантажу в пунктах відправлення:
- а. модель такої задачі називається закритого типу
  - б. модель такої задачі називається відкритого типу
  - с. модель такої задачі називається виродженою
  - д. модель такої задачі може не мати можливості провести оптимізацію
4. Якщо число рівнянь транспортної задачі дорівнює  $n + m$  ( $m$  пунктів відправлення,  $n$  пунктів призначення), тоді число зайнятих клітинок задачі, для того щоб була можливість провести оптимізацію має:
- а. бути більшою або рівною  $n + m - 1$
  - б. бути меншою  $n + m - 1$
  - с. бути більшою або рівною  $n + m$
  - д. бути меншою  $n + m$
5. План транспортної задачі називається виродженим та може не мати можливості провести оптимізацію, якщо кількість зайнятих клітинок:
- а. менша  $n + m - 1$  де ( $m$  - кількість пунктів відправлення,  $n$  - кількість пунктів призначення)
  - б. більша або рівна  $n + m - 1$  де ( $m$  - кількість пунктів відправлення,  $n$  - кількість пунктів призначення)
  - с. більша або рівна  $n + m$  де ( $m$  - кількість пунктів відправлення,  $n$  - кількість пунктів призначення)
  - д. менша  $n + m$  де ( $m$  - кількість пунктів відправлення,  $n$  - кількість пунктів призначення)
6. Якщо у транспортній задачі, запаси перевищують потреби, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j, \text{ необхідно:}$$

- a. ввести додатковий  $(n + 1)$ -й пункт призначення з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

- b. ввести додатковий  $(m + 1)$ -й пункт відправлення з запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

- c. вилучити будь-який пункт  $a_i$  (запаси вантажу в  $i$ -ому пункті)

- d. вилучити будь-який пункт  $b_j$  (потреби вантажу в  $j$ -ому пункті)

7. Якщо у транспортній задачі, потреби перевищують запаси, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \text{ необхідно:}$$

- a. ввести додатковий  $(m + 1)$ -й пункт відправлення з запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

- b. ввести додатковий  $(n + 1)$ -й пункт призначення з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

- c. вилучити будь-який пункт  $a_i$  (запаси вантажу в  $i$ -ому пункті)

- d. вилучити будь-який пункт  $b_j$  (потреби вантажу в  $j$ -ому пункті)

8. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює

$$\text{запасам вантажу в пунктах відправлення, тобто } \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

- a. модель такої задачі називається закритого типу

- b. модель такої задачі називається відкритого типу

- c. модель такої задачі називається виродженою
- d. модель такої задачі називається не виродженою

9. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення *менша* запасу

вантаж у пунктах відправлення. тобто 
$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

- a. модель такої задачі називається закритого типу
- b. модель такої задачі називається відкритого типу
- c. модель такої задачі називається виродженою
- d. модель такої задачі називається не виродженою

10. Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення *більша* запасу

вантаж у пунктах відправлення. тобто 
$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

- a. модель такої задачі називається закритого типу
- b. модель такої задачі називається відкритого типу
- c. модель такої задачі називається виродженою
- d. модель такої задачі називається не виродженою

## Тема 7

### Пошук оптимального рішення економічних задач пов'язаних з логістикою перевезень, методи найменшої вартості та потенціалів.

**Мета:** засвоєння засад побудови математичної моделі, застосування методу найменшої вартості та загального алгоритму рішення задачі.

#### *План викладання і засвоєння матеріалу:*

1. Запис задачі у математичній формі, побудова системи обмежень
2. Поняття методу найменшої вартості, побудова опорного плану
3. Метод потенціалів, загальний алгоритм рішення.
4. Приклад застосування методу, при плануванні забезпечення сировиною підприємств.

**Література** {[6] с.138-172, [7] 328-375, [8] с.184-216, [9] 342-390, [12] 360-380, }

#### *1. Запис задачі у математичній формі, побудова системи обмежень*

Відповідно побудованої матриці задачі (тема 6, таблиця 3).

Таблиця 3

Матриця задачі

| Пункти<br>відправлення | Пункти призначення |       |       |       | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|------------------------|--------------------|-------|-------|-------|------------------------------------|
|                        | $B_1$              | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |                                    |
| $A_1$                  | 7                  | 8     | 1     | 2     | 160                                |
| $A_2$                  | 4                  | 5     | 9     | 8     | 140                                |
| $A_3$                  | 9                  | 2     | 3     | 6     | 170                                |
| Загальна<br>потреба    | 120                | 50    | 190   | 110   | 470                                |



Побудуємо систему обмежень.

***Визначення переліку змінних та обмежень.***

Позначимо  $x_{ij}$  кількість одиниць сировини, перевезеної з  $i$ -го пункту на  $j$ -е підприємство.

Загальна кількість обмежень складе 7 одиниць відповідно умові

$$n + m$$

Де,  $m$  - кількість пунктів відправлення (3 одиниці)

$n$  - кількість пунктів призначення (4 одиниці)

***Математичний запис системи обмежень та критерію оптимальності.***

Відповідно до збору інформації, переліку змінних та обмежень, запишемо задачу у математичній формі.

Система обмежень прийме вид :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{array} \right. \quad (1)$$

*Критерій оптимальності:*

$$f(x) = 7x_{11} + 8x_{12} + 1x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min \quad (2)$$

## 2. Поняття методу найменшої вартості, побудова опорного плану

Побудуємо опорний план задачі **методом найменшої вартості**.

Сутність методу складається у виборі клітки з мінімальною вартістю (тарифом перевезення). Отже виберемо із *таблиці 3* **найменший** тариф перевезення сировини – 1. Це є тариф перевезення сировини з пункту  $A_1$  на підприємство  $B_3$ . Порівняємо потреби підприємства  $B_3$  та запаси сировини у пункті  $A_1$ . Відповідно  $B_3=190$ , а  $A_1=160$ , як бачимо потреба у сировині підприємства  $B_3$  є більшою ніж можливість постачання пункту  $A_1$ . Отже у клітинку (1,3) запишемо 160 (*таблиця 4*) **Клітинка (1,3) =160 вважаємо зайнятою**, інші клітинки *поки вільні*. Зрозуміло що можливості постачання пункту  $A_1$  вичерпано повністю, при цьому потреба підприємства  $B_3$  задоволена лише частково – всього на 160 одиниць, при загальній кількості 190, для задоволення повної потреби даного підприємства необхідно з інших пунктів до поставити ще 30 одиниць ( $190-160=30$ ).

Таблица 4

Опорный план

|                     | $B_1$ | $B_2$          | $B_3$            | $B_4$ | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|-------|----------------|------------------|-------|------------------------------------|
| $A_1$               | 7     | 8              | <b>160</b><br>1  | 2     | <b>160</b>                         |
| $A_2$               | 4     | 5              | 9                | 8     | 140                                |
| $A_3$               | 9     | <b>50</b><br>2 | 3                | 6     | <b>170</b><br>120                  |
| Загальна<br>потреба | 120   | <b>50</b><br>0 | <b>190</b><br>30 | 110   | 470                                |

Оскільки можливості постачання пункту  $A_1$  вичерпано повністю, уявно вилучаємо рядок  $A_1$  (на вартості перевезень з даного пункту в підприємства не звертаємо більше уваги)

Далі з рядків  $A_2$  та  $A_3$  вибираємо **найменший** тариф перевезення сировини – 2. Це є тариф перевезення сировини з пункту  $A_3$  на підприємство  $B_2$ . Порівняємо потреби підприємства  $B_2$  та запаси сировини у пункті  $A_3$ . Відповідно  $B_2=50$ , а  $A_3=170$ , як бачимо потреба у сировині підприємства  $B_2$  є меншою ніж можливість постачання пункту  $A_3$ . Отже у клітинку (3,2) запишемо 50 (таблиця 4). Зрозуміло що можливості постачання пункту  $A_3$  вичерпано лише на 50 одиниць при загальній кількості 170, отже можливість постачання даного пункту (залишок запасів сировини) складе 120 одиниць ( $170 - 50 = 120$ ).

Оскільки можливості постачання пункту  $A_1$  вичерпано повністю, а потреба підприємства  $B_2$ , задоволена повністю, уявно вилучаємо рядок  $A_1$  та стовпчик  $B_2$  (на вартості перевезень пункту постачання та пункту призначення не звертаємо більше уваги) *таблиця 4.1*

Таблиця 4.1

## Опорний план

|                     | $B_1$ | $B_2$   | $B_3$     | $B_4$ | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|-------|---------|-----------|-------|------------------------------------|
| $A_1$               | 7     | 8       | 160       | 2     | 160                                |
| $A_2$               | 4     | 5       | 9         | 8     | 140                                |
| $A_3$               | 9     | 50      | 3         | 6     | 170<br>120                         |
| Загальна<br>потреба | 120   | 50<br>0 | 190<br>30 | 110   | 470                                |

З уявно не вилучених клітинок :

$$\{(2,1) = 4; (2,3) = 9; (2,4) = 8; (3,1) = 9; (3,3) = 3; (3,4) = 6\}$$

Вибираємо найменшу вартість перевезення –  $(3,3) = 3$ . *Залишок* потреби підприємства  $B_3$  складає – 30 одиниць, а *залишок* можливості постачання з пункту  $A_3$  – 120 одиниць. Міркуємо аналогічно алгоритму описаному вище, відповідно задоволено потребу у сировині  $B_3$  повністю, при цьому *залишок* можливості постачання з пункту  $A_3$  складе 90 одиниць ( $120-30=90$ ). Розрахунок проводимо поки усі потреби підприємства не будуть задоволені повністю, а запаси сировини вичерпані (таблиця 4.2)

Таблиця 4.2

Опорний план

|                     | $B_1$           | $B_2$          | $B_3$           | $B_4$          | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------------------------|
| $A_1$               | 7               | 8              | <b>160</b><br>1 | 2              | 160                                |
| $A_2$               | <b>120</b><br>4 | 5              | 9               | <b>20</b><br>8 | 140                                |
| $A_3$               | 9               | <b>50</b><br>2 | <b>30</b><br>3  | <b>90</b><br>6 | 170                                |
| Загальна<br>потреба | 120             | 50             | 190             | 110            | 470                                |

Загальна вартість перевезень згідно математичного запису критерію оптимальності (2) складе -1530 грошових одиниць :

$$f(x) = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 160 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + \\ + 8 \cdot 20 + 9 \cdot 0 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530$$

### 3. Метод потенціалів, загальний алгоритм рішення

Загальний принцип знаходження оптимального плану методом потенціалів аналогічний симплекс-методу. Спочатку знаходять опорний план задачі, потім його послідовно покращують до одержання оптимального плану.

Розрахунок потенціалів та перевірка плану на оптимальність відбувається за наступним алгоритмом:

Якщо для деякого опорного плану

$$X^* = (x_{ij}^*) \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n})$$

транспортної задачі існують такі числа

$$u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_m$$

та

$$v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_n,$$

Для яких виконуються наступні вимоги :

$$v_j + u_i = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0 \quad (\text{умова для зайнятих клітинок}),$$

$$c_{ij} - (v_j + u_i) \geq 0 \quad \text{при } x_{ij} = 0 \quad (\text{умова для вільних клітинок})$$

для усіх  $i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$ , то такий план  $X^* = (x_{ij}^*)$  – буде оптимальний.

Числа  $u_i$  і  $v_j$  називаються потенціалами пунктів відправлення  $A_1, A_2, \dots, A_m$  і пунктів призначення  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

#### Алгоритм рішення.

1. Розраховують потенціали рядків та стовбців.

**Розрахунок проводиться по зайнятим клітинкам**

Спочатку присвоюють значення 0 будь-якому із потенціалів рядка, або стовпця. Потім розрахунок відбувається за **формулою**:

$$v_j + u_i = c_{ij}$$

Для потенціалів рядка, стовпця :

$$u_i = c_{ij} - v_j, \quad v_j = c_{ij} - u_i,$$

Де  $u_i$  - потенціал рядка

$v_j$  - потенціал стовпця

$c_{ij}$  - вартість перевезення

## 2. Перевірка плану на оптимальність.

Перевірка відбувається по вільним клітинкам.

Розрахунок відбувається за формулою:

$$c'_{ij} = c_{ij} - (v_j + u_i)$$

якщо усі  $c'_{ij} \geq 0$ , план оптимальний.

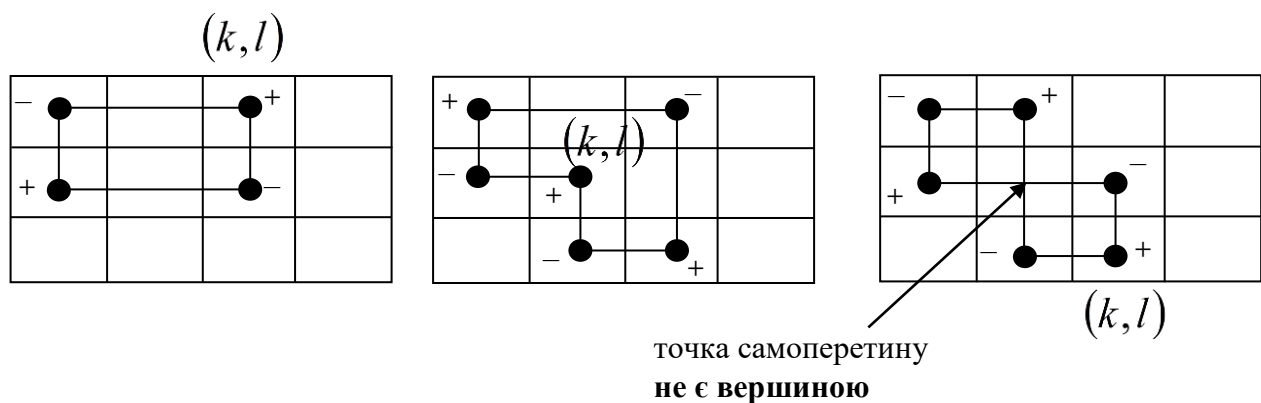
Якщо хоча б одне значення  $c'_{ij} < 0$  є можливість оптимізації.

Якщо існує декілька  $c'_{ij} < 0$  – з них вибирають максимальний по модулю елемент, помічають відповідну клітинку та будують цикл ітерації.

## 3. Будуємо цикл ітерації.

Цикл – замкнута ламана лінія. Починається цикл у клітці  $(k, l)$ . Інші вершини її лежать у заповнених клітках і ланки перетинаються під кутом  $90^\circ$ .

Приклади циклів.



Клітці  $(k, l)$  привласнюємо знак «+»;  $(k, l)$  – перша вершина. Іншим кліткам по черзі знак «+» і «-».

4. Знаходимо  $\Theta = \min x_{ij}$ . Переходимо до нового опорного плану:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} \\ x_{ij} + \Theta, \\ x_{ij} - \Theta \end{cases},$$

$x_{ij}$  – для кліток, що не входять у цикл;

$x_{ij} + \Theta$  – для кліток циклу з «+»;

$x_{ij} - \Theta$  – для кліток циклу з «-».

Клітка з  $\Theta$  стає вільною.

Перехід від одного опорного плану до іншого **називається ітерацією**.

При перерахуванні число зайнятих кліток залишається незмінним  $(n + m - 1)$ .

5. Новий план перевіряють на оптимальність за алгоритмом наведеним у пункті 1 та у пункті 2.

*4. Приклад застосування методу, при плануванні забезпечення сировиною підприємств*

Відповідно побудованого опорного плану (таблиця 4.2) **розрахуємо потенціали рядків та стовпців**.

Для початку присвоюємо наприклад потенціалу 3-го рядку значення - 0

$$u_3 = 0$$

Використовуючи формулу розрахунку потенціалів (пункт 1 алгоритму рішення):

$$v_j + u_i = c_{ij}$$

$$v_2 = (c_{32} - u_3) = (2 - 0) = 2$$

$$v_3 = (c_{33} - u_3) = (3 - 0) = 3$$

$$v_4 = (c_{34} - u_3) = (6 - 0) = 6$$

Далі є можливість розрахувати потенціали рядків  $A_1$  та  $A_2$ , відповідно:

$$u_1 = (c_{13} - v_3) = (1 - 3) = -2$$

$$u_2 = (c_{24} - v_4) = (8 - 6) = 2$$

Залишилось розрахувати  $v_1$

$$v_1 = (c_{21} - u_1) = (4 - (-2)) = 6$$

Запишемо розраховані потенціали у таблицю 4.2, отримаємо (табл.4.3)

Таблиця 4.3

Опорний план

|                     | $B_1$<br>$v_1 = 6$ | $B_2$<br>$v_2 = 2$ | $B_3$<br>$v_3 = 3$ | $B_4$<br>$v_4 = 6$ | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------------------|
| $A_1$<br>$u_1 = -2$ | 7                  | 8                  | 1                  | 2                  | 160                                |
| $A_2$<br>$u_2 = 2$  | 120<br>4           | 5                  | 9                  | 20<br>8            | 140                                |
| $A_3$<br>$u_3 = 0$  | 9                  | 50<br>2            | 30<br>3            | 90<br>6            | 170                                |
| Загальна<br>потреба | 120                | 50                 | 190                | 110                | 470                                |



Перевіримо план **на оптимальність** відповідно пункту 2 алгоритму рішення:

Для **вільних кліток** знаходимо  $c'_{ij} = c_{ij} - (v_j + u_i)$  отримаємо

Для клітинки (1,1) -  $c'_{11} = c_{11} - (v_1 + u_1) = 7 - (6 + (-2)) = 3$

(1,2) -  $c'_{12} = c_{12} - (v_2 + u_1) = 8 - (2 + (-2)) = 8$

(1,4) -  $c'_{14} = c_{14} - (v_4 + u_1) = 2 - (6 + (-2)) = -2$

(2,2) -  $c'_{22} = c_{22} - (v_2 + u_2) = 5 - (2 + 2) = 1$

(2,3) -  $c'_{23} = c_{23} - (v_3 + u_2) = 9 - (3 + 2) = 4$

(3,1) -  $c'_{31} = c_{31} - (v_1 + u_3) = 9 - (6 + 0) = 3$

Оскільки  $c'_{14} = -2$  а  $(-2) < 0$  відповідно клітинка (1,4) є не оптимальною, це означає що є можливість знайти більш оптимальне рішення.

Будуємо **цикл ітерації**, відповідно пункту 3 алгоритму рішення, для цього умовно вилючаємо усі рядки та стовбці у яких знаходиться лише одна зайнята клітинка (**не оптимальна клітинка вважається зайнятою, вилучені клітинки вважаються вільними** – клітинка (2,1)) таблиця 5.

Таблиця 5

Схема ітерації

|                     | $B_1$<br>$v_1 = 6$ | $B_2$<br>$v_2 = 2$ | $B_3$<br>$v_3 = 3$ | $B_4$<br>$v_4 = 6$                                                                      | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| $A_1$<br>$u_1 = -2$ | 7                  | 8                  | <b>160</b><br>1    |  2 | 160                                |
| $A_2$<br>$u_2 = 2$  | <b>120</b><br>4    | 5                  | 9                  | <b>20</b><br>8                                                                          | 140                                |
| $A_3$<br>$u_3 = 0$  | 9                  | <b>50</b><br>2     | <b>30</b><br>3     | <b>90</b><br>6                                                                          | 170                                |
| Загальна<br>потреба | 120                | 50                 | 190                | 110                                                                                     | 470                                |

Сполучаємо прямими уявно не вилучені клітинки. Клітці (1,4) привласнюємо знак «+» – перша вершина. Іншим кліткам по черзі знак «+» і «-» таблиця 5.1

Таблиця 5.1

Схема ітерації

|                     | $B_1$<br>$v_1 = 6$ | $B_2$<br>$v_2 = 2$ | $B_3$<br>$v_3 = 3$ | $B_4$<br>$v_4 = 6$ | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------------------|
| $A_1$<br>$u_1 = -2$ | 7                  | 8                  | <b>160</b><br>- 1  | <b>+</b><br>2      | 160                                |
| $A_2$<br>$u_2 = 2$  | <b>120</b><br>4    | 5                  | 9                  | <b>20</b><br>8     | 140                                |
| $A_3$<br>$u_3 = 0$  | 9                  | <b>50</b><br>2     | <b>30</b><br>+ 3   | <b>90</b><br>- 6   | 170                                |
| Загальна<br>потреба | 120                | 50                 | 190                | 110                | 470                                |

Виконаємо ітерацію, у таблиці 6 наведемо 1-ший оптимізований план.

Перший оптимізований план

Таблиця 6

| Пункти<br>відправлення | Пункти призначення |                |                 |                | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|------------------------|--------------------|----------------|-----------------|----------------|------------------------------------|
|                        | $B_1$              | $B_2$          | $B_3$           | $B_4$          |                                    |
| $A_1$                  | 7                  | 8              | <b>70</b><br>1  | <b>90</b><br>2 | 160                                |
| $A_2$                  | <b>120</b><br>4    | 5              | 9               | <b>20</b><br>8 | 140                                |
| $A_3$                  | 9                  | <b>50</b><br>2 | <b>120</b><br>3 | 6              | 170                                |
| Загальна<br>потреба    | 120                | 50             | 190             | 110            | 470                                |

Вартість даного плану складе 1350 грошових одиниць. А це на 180 одиниць менше порівняно до опорного ( $1530 - 1350 = 180$ )

Далі аналогічно проведеним розрахункам перевіряємо план на оптимальність. Результати розрахунку потенціалів та схему ітерації наведемо у таблиці 7. Клітинка (2,2) = -3 є не оптимальною.

Таблиця 7

Схема ітерації та результати розрахунку потенціалів

|                     | $B_1$<br>$v_1 = -3$ | $B_2$<br>$v_2 = -1$ | $B_3$<br>$v_3 = 0$ | $B_4$<br>$v_4 = 1$ | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|------------------------------------|
| $A_1$<br>$u_1 = 1$  | 7<br>120            | 8                   | 70<br>- 1          | 90<br>+ 2          | 160                                |
| $A_2$<br>$u_2 = 7$  | 4                   | 5<br>+              | 9                  | 20<br>- 8          | 140                                |
| $A_3$<br>$u_3 = 3$  | 9                   | 50<br>-             | 120<br>+ 3         | 6                  | 170                                |
| Загальна<br>потреба | 120                 | 50                  | 190                | 110                | 470                                |

Відповідно результату розрахунків наведених у таблиці 7 побудуємо другий оптимізований план, таблиця 8.

Другий оптимізований план

Таблиця 8

| Пункти<br>відправлення | Пункти призначення |         |          |          | Загальна<br>можливість<br>(запаси) |
|------------------------|--------------------|---------|----------|----------|------------------------------------|
|                        | $B_1$              | $B_2$   | $B_3$    | $B_4$    |                                    |
| $A_1$                  | 7<br>120           | 8       | 50<br>1  | 110<br>2 | 160                                |
| $A_2$                  | 4                  | 20<br>5 | 9        | 8        | 140                                |
| $A_3$                  | 9                  | 30<br>2 | 140<br>3 | 6        | 170                                |
| Загальна<br>потреба    | 120                | 50      | 190      | 110      | 470                                |

Вартість даного плану складе 1330 грошових одиниць. А це на 20 одиниць менше порівняно до попереднього та на 200 одиниць дешевше порівняно до опорного.  $(1530-1330=200)$

Перевіливши відповідний план на оптимальність можливо стверджувати, що відповідне рішення з економічної точки зору є найефективнішим.

### **Контрольні питання**

1. Що виступає змінними у системі обмежень транспортної задачі?
2. Що виступає критерієм оптимальності у математичній моделі транспортної задачі ?
3. Головна ідея методу найменшої вартості ?
4. Як перевірити план транспортної задачі на закритий вид ?
5. За якою формулою розраховують потенціали рядків у методі потенціалів ?
6. За якою формулою розраховують потенціали стовпчиків у методі потенціалів ?
7. За якою формулою перевіряють план на оптимальність ?
8. Що таке ітерація?
9. Як визначити вартість плану ?
10. У якому випадку план є оптимальний ?

### **Тести для самоконтролю**

1. У методі потенціалів  $v_j + u_i = c_{ij}$  є формулою для
  - a. розрахунку потенціалів
  - b. для визначення вартості перевезень
  - c. для перевірки плану на оптимальність
  - d. для визначення оптимального плану
2. У методі потенціалів  $c_{ij} - (v_j + u_i) \geq 0$  є формулою для
  - a. розрахунку потенціалів
  - b. для визначення вартості перевезень

- с. для перевірки плану на оптимальність
- д. для визначення оптимального плану

3. У методі потенціалів число  $u_i$  є

- а. потенціалом рядка
- б. потенціалом стовпця
- с. вартість перевезення
- д. елементом визначення вартості

4. У методі потенціалів число  $v_j$  є

- а. потенціалом рядка
- б. потенціалом стовпця
- с. вартість перевезення
- д. елементом визначення вартості

5. У методі потенціалів число  $c_{ij}$  є

- а. потенціалом рядка
- б. потенціалом стовпця
- с. вартість перевезення
- д. елементом визначення вартості

6. Перевірка плану на оптимальність відбувається

- а. по вільним клітинкам
- б. по зайнятим клітинкам
- с. по рядкам плану перевезень
- д. по стовпцям плану перевезень

7. Розрахунок потенціалів плану транспортної задачі відбувається

- а. по вільним клітинкам

- b. по зайнятим клітинкам
- c. по рядкам плану перевезень
- d. по стовпцям плану перевезень

8. Формула методу потенціалів  $c'_{ij} = c_{ij} - (v_j + u_i)$  використовується

- a. для розрахунку потенціалів
- b. для перевірки плану на оптимальність
- c. для розрахунку потенціалів рядка
- d. для розрахунку потенціалів стовпчика

9. Якщо усі  $c'_{ij} \geq 0$  план транспортної задачі

- a. буде оптимальним
- b. є можливість оптимізації
- c. наступна ітерація може призвести до оптимального рішення
- d. цикл ітерації неможливо побудувати

10. Якщо хоча б одне значення  $c'_{ij} < 0$  при перевірці плану на оптимальність

- a. план буде оптимальним
- b. є можливість оптимізації плану
- c. наступна ітерація є не доцільна
- d. цикл ітерації неможливо побудувати

## Рекомендована література та інформаційні ресурси

1. Боровик О.В. Дослідження операцій в економіці (Текст): навч. посібник: Рекомендовано МОН України.- К.:Центр учбової літератури,2007
2. Білоцерківський О. Б. Економіко-математичне моделювання : Текст лекцій / О. Б. Білоцерківський, Н. В. Ширяєва, О. О. Замула. – Х.: НТУ "ХПІ", 2020. – 108 с.
3. Войтюшенко Н.М. Інформатика і ком'ютерна техніка: навч. посіб. для студ. вишів/ Н.М. Войтюшенко, А.І. Остапець.-Київ :ЦНЛ, 2006 -568с
4. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. –Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с
5. Воропай Н.Л., Герасименко Т.В., Кирилова Л.О., Корсун Л.М., Мацкул М.В., Мальцева Є.В., Михайленко А.В., Орлов Є.В., Чернишев В.Г., Чепурна О.Є., Шинкаренко В.М. (за заг.редакцією Мацкул В.М.) Економіко-математичні методи та моделі: Навчальний посібник.- Одеса: ОНЕУ, 2018.- 404 с.
6. Вітлінський В.В. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник [Електронний ресурс] / Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. — К. : КНЕУ, 2016. — 303 с. ISBN 978-966-926-108-3
7. Гатаулін А.М. Економіко-математичні методи в плануванні сільськогосподарського виробництва. / Гатаулін А.М. , Гаврилов Г.В, Харитонova Л.А – Київ : Вища школа, 2005.-260с.
8. Кулинич О.І. Економетрія: Навч. Посібник – Хмельницький, Поділля, 2020.
9. Козменко О. В., Кузменко О. В. Економіко-математичні методи та моделі (Економетрика). – К.: Університетська книга, 2019. – 406 с.
10. Козак Юрій, Мацкул Валерій. Математичні методи та моделі з економіки. Практичні застосування. – К.: Центр навчальної літератури, 2019. – 254 с.
11. Лук'янченко І.Г. Економетрика:Підручник /І.Г. Лук'янченко, Л.І. Краснікова. К.:Знання,2015.
12. Наконечний С.І. Економетрія: Підручник/С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк – К.:КНЕУ, 2000.

## Інформаційні ресурси

1. Навчання. *Інтернет-сайт кафедри Менеджменту та публічного адміністрування ТДАТУ*: веб-сайт. URL: <http://www.tsatu.edu.ua/ep/>
2. Освітній портал ТДАТУ. *Інтернет-сайт ТДАТУ*: веб-сайт. URL: <http://op.tsatu.edu.ua/>
3. Наукова бібліотека ТДАТУ. *Інтернет-сайт ТДАТУ*: веб-сайт. URL: <http://www.tsatu.edu.ua/biblioteka/>
4. Електронні ресурси Інтернет.