

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

**МИХАЙЛЕНКО О. Ю.
АНТОНОВА Г. В.
ГАВРИЛЕНКО Є. А.**

**ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА.
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

ДИНАМІКА

Навчальний посібник

Запоріжжя
2025

УДК 531.3(075.8)
М69

*Рекомендовано Вченою радою
Таврійського державного агротехнологічного університету
імені Дмитра Моторного
(Протокол № 9 від «30» квітня 2025 р.)*

Рецензенти:

Верещага В. М., доктор технічних наук, професор, професор кафедри математики і фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького

Теслюк Г., кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри тракторів сільськогосподарських машин Дніпровського державного аграрно-економічного університету

Кувачов В. П., доктор технічних наук, професор, декан механіко-технологічного факультету Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного

Михайленко, О. Ю.

М69 Інженерна механіка. Динаміка: навч. посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G9 «Прикладна механіка» та G11 «Машинобудування» / О. Ю. Михайленко, Г. В. Антонова, Є. А. Гавриленко; ТДАТУ. - Запоріжжя, 2025. 200 с.

У навчальному посібнику викладено теоретичний матеріал курсу «Інженерна механіка. Теоретична механіка» розділ «Динаміка». Формат викладення матеріалу - конспект лекцій, доповнений великою кількістю прикладів вирішення завдань. Наприкінці кожної лекції наведено контрольні питання та завдання для самоперевірки засвоєння навчального матеріалу. Розглядаються питання, що стосуються динаміки матеріальної точки, геометрії мас, загальних теорем динаміки, динаміки твердого тіла. Чіткість формулювань законів, теорем та принципів механіки та їх доказів, ретельно підібрані приклади та рисунки дозволяють глибше усвідомити сутність теоретичних положень та формул.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти зі спеціальності G9 «Прикладна механіка» та G11 «Машинобудування».

© Михайленко О.Ю.

© Таврійський державний
агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
ТЕМА 1. ВВЕДЕННЯ В ДИНАМІКУ.....	6
1.1 Основні поняття й визначення	6
1.2 Закони динаміки.....	9
1.3 Основні види сил.....	18
1.4 Задачі динаміки для вільної та невільної матеріальної точки	31
1.5 Диференціальні рівняння динаміки матеріальної точки.....	36
Контрольні питання	42
ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	47
2.1 Основна задача динаміки.....	48
2.2 Рух матеріальної точки під дією постійних сил	52
2.3 Рух матеріальної точки під дією змінних сил	56
2.5 Рух під дією сили залежної від часу	60
2.6 Рух під дією сили, що залежить від положення	61
Приклади розв'язання задач.....	66
Контрольні питання	71
ТЕМА 3. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ.....	75
3.1 Динаміка обертального руху твердого тіла відносно точки.....	75
3.2 Окремі випадки відносного руху	81
Технічні приклади.....	82
3.3 Механічна система. Сили зовнішні й внутрішні	85
3.4 Маса системи. Центр мас.....	86
3.5 Момент інерції тіла щодо осі	87
3.6 Моменти інерції тіла щодо паралельних осей.....	92
3.7 Методи визначення моментів інерції тіл, складної конфігурації.....	94
Контрольні питання	101
ТЕМА 4. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ	106
4.1 Диференціальні рівняння руху системи	106
4.2 Теорема про рух центра мас системи.....	109
4.3 Теорема про зміну кількості руху точки.....	116
4.4 Теорема про зміну кількості руху системи.....	117
Технічні приклади.....	120
4.5 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки	126
4.6 Теорема про зміну кінетичного моменту системи	128
4.7 Теорема Резаля	130
4.8 Кінетична енергія. Робота й потужність сили	131
4.9 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки	139
4.10 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи.....	139
Контрольні питання	141
ТЕМА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ.....	147
5.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки	147

5.2 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок	148
5.3 Динаміка відносного руху точки.....	161
5.4 Принципи можливих переміщень і можливих швидкостей	164
5.5 Умови рівноваги системи в узагальнених координатах	175
5.6 Рівняння Лагранжа.....	182
Контрольні питання	192
ВИСНОВОК	198
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	199

ВСТУП

Виникнення та розвиток механіки як науки нерозривно пов'язане з історією продуктивних сил суспільства, з рівнем виробництва та техніки на кожному етапі.

Становлення динаміки починається лише XV – XVI століттях. Основні досягнення у створенні основ динаміки належать геніальним дослідникам Галілео Галілею (1564-1642) та Ісааку Ньютону (1643- 1727). У творі Ньютона «Математичні початки натуральної філософії», виданому в 1687 році, і були викладені в систематичному Основні закони класичної механіки (закони Ньютона).

У XVIII столітті починається інтенсивне формування у механіці аналітичних методів, тобто методів, заснованих на застосуванні диференціального та інтегрального обчислень. Методи вирішення завдань динаміки точки та твердого тіла шляхом складання та інтегрування відповідних диференціальних рівнянь були розроблені великим математиком та механіком Л. Ейлером (1707-1783). З інших досліджень у цій галузі найбільше значення для розвитку механіки мали праці видатних французьких учених Ж. Даламбера (1717-1783) та Ж. Лагранжа (1736-1813).

У наші дні перед вітчизняною наукою та технікою стоять найважливіші завдання щодо прискорення науково-технічного прогресу. Для вирішення цієї завдання має важливе значення для підвищення якості підготовки інженерних кадрів, розширення теоретичної бази їх знань, у тому числі в галузі однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін – теоретичної механіки.

Теоретична механіка є частиною механіки, що вивчає загальні закони руху та взаємодії матеріальних тіл, тобто ті закони, які, наприклад, дійсні для руху Землі навколо Сонця і польоту ракети чи артилерійського снаряда, тощо.

Основним завданням теоретичної механіки є вивчення загальних законів руху та рівноваги матеріальних тіл під дією доданих до них сил. Залежно від характеру аналізованих проблем теоретична механіка зазвичай ділиться на статику, кінематику та динаміку.

Динаміка розглядає загальний випадок механічного руху твердого тіла з урахуванням причин, що його викликали.

Методи вирішення задач теоретичної механіки використовуються в багатьох загальноінженерних дисциплінах, практичних додатках та наукових дослідженнях.

ТЕМА 1. ВВЕДЕННЯ В ДИНАМІКУ

План

- 1.1 Основні поняття й визначення
- 1.2 Закони динаміки
- 1.3 Основні види сил
- 1.4 Задачі динаміки для вільної та невільної матеріальної точки
- 1.5 Диференціальні рівняння динаміки матеріальної точки

1.1 Основні поняття й визначення

Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл з урахуванням сил, що діють на них.

У динаміці вирішують два типи завдань:

- визначають параметри руху за заданими силами;
- визначають сили, що діють на тіло, за заданими кінематичними параметрами руху.

При поступальному русі всі точки тіла рухаються однаково, тому тіло можна прийняти за матеріальну точку.

Якщо розміри тіла малі в порівнянні з траєкторією, його теж можна розглядати як матеріальну точку, при цьому точка збігається з центром тяжіння тіла.

При обертальному русі тіла точки можуть рухатися неоднаково, у разі деякі положення динаміки можна застосовувати лише до окремих точок, а матеріальний об'єкт розглядати як сукупність матеріальних точок.

Тому динаміку ділять на:

- динаміку точки та;
- динаміку матеріальної системи.

Рух тіл із чисто геометричної точки зору вивчався в кінематиці. У динаміці беруть до уваги, як діючі сили, так і інертність самих матеріальних тіл.

Поняття про *силу*, як про основну мерю механічної взаємодії, розглядалося в *статиці*. Однак ми розглядали всі сили як постійні й не враховували можливу їхню зміну в часі й просторі. Тим часом, на тіло, що рухається, поряд з постійними силами (постійною, наприклад, можна вважати силу тяжіння) діють зазвичай сили змінні, модулі і напрямки яких при русі тіла змінюються.

Сила - векторна фізична величина, що характеризує дію одного тіла на інше, внаслідок чого у тіла змінюється швидкість, тобто з'являється прискорення, або відбувається деформація тіла, або має місце і те, й інше.

У тому випадку, коли тіло при взаємодії отримує прискорення, говорять про динамічний вияв сил. У тому випадку, коли тіло при взаємодії деформується, говорять про статичний вияв сил.

Змінними можуть бути й задані – активні сили й реакції зв'язків. Як показує досвід, змінні сили можуть залежати певним чином від часу, від положення, від швидкості.

Наприклад:

– *від часу* залежать: сила тяги електродвигуна за умови поступового вимкнення або включення реостату; сила, що викликає коливання фундаменту, при роботі мотора з погано центрованим валом;

– *від положення* залежать: сила тяжіння, сила пружності пружини;

– *від швидкості* залежать: сила опору середовища (води, повітря).

До поняття *інертності* тіл ми приходимо, порівнюючи результати дії однієї й тої ж сили на різні матеріальні тіла. Досвід показує, що якщо одну й ту саму силу прикласти до двох різних, вільних від інших впливів тіл, що покояться, то в загальному випадку після закінчення одного і того ж проміжку часу ці тіла пройдуть різні відстані і будуть мати різні швидкості.

Інертність і є властивість всіх матеріальних тіл швидше або повільніше змінювати швидкість свого руху під дією прикладених сил. Якщо, наприклад, при дії однакових сил зміна швидкості першого тіла відбувається повільніше, ніж другого, то кажуть, що перше тіло є інертнішим, і навпаки.

Однієї з кількісних мір інертності матеріального тіла є фізична величина, називана масою тіла. Тобто, маса – це фізична константа об'єкта (матеріальної точки або тіла), яка є мірою його інертних та гравітаційних властивостей, причому інертна та гравітаційна маси з достатньою для практики точністю збігаються.

За одиницю маси прийнято стандарт – метал платини та іридію, що зберігається в палаті заходів і терезів у Парижі: $[m] = \text{кг}$.

У класичній механіці маса M розглядається як величина скалярна, позитивна й постійна для кожного даного тіла. У загальному випадку рух тіла залежить не тільки від сумарної маси тіла, але й від форми тіла, точніше від взаємного розташування частинок, що утворюють його (тобто від розподілу мас).

При первісному вивченні динаміки, для відволікання від обліку впливу форм тіла, вводиться абстрактне поняття про *матеріальну точку*.

Під матеріальною точкою розуміють матеріальне тіло настільки малих розмірів, що відмінності в русі окремих його точок можна

знехтувати і становище якого можна визначити координатами однієї з його точок.

Практично це тіло можна розглядати як матеріальну точку у випадках, коли відстані, які проходять точки тіла за його русі, дуже великі проти розмірами самого тіла.

Крім того, як буде показано в динаміці системи тіло, що поступально рухається, можна завжди розглядати як матеріальну точку з масою, що дорівнює масі всього тіла.

Нарешті, матеріальними точками вважатимуться частинки, на які ми подумки розбиватимемо будь-яке тіло щодо тих чи інших його динамічних характеристик.

Точку будемо називати ізольованою, якщо на точку не виявляється жодного впливу, жодної дії з боку інших тіл та середовища, в якому точка рухається. Звичайно, важко навести приклад такого стану. Але уявити таке можна. При обертальному русі тіла точки можуть рухатися неоднаково, у разі деякі положення динаміки можна застосовувати лише до окремих точок, а матеріальний об'єкт розглядати як сукупність матеріальних точок.

Спосіб визначення маси заснований на законі всесвітнього тяжіння, що визначає силу взаємного притягання між тілами:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

де γ – гравітаційна постійна рівна $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$;

r – відстань між тілами з масами m_1 й m_2 .

Галілеєм встановлено, що поблизу земної поверхні при вільному падінні всі тіла мають те саме прискорення:

$$g = \gamma \cdot \frac{m}{R^2}, \quad (1.2)$$

Звідси сила тяжіння тіла визначається формулою:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}, \quad (1.3)$$

Фактично при експериментальному визначенні маси ми користуємося властивістю взаємного тяжіння тіл. Вимірявши силу ваги тіла за допомогою відтарованого динамометра можна визначити його масу.

1.2 Закони динаміки

В основі динаміки лежать закони, установлені шляхом узагальнення цілого ряду досвідів і спостережень над рухом тіл. Закони динаміки, які прийнято розглядати як аксіоми. Основні закони класичної механіки Ісаак Ньютон (1642-1727) зібрав та опублікував у 1687 році. Три знамениті закони були вперше сформульовані у його класичному творі «Математичних початках натуральної філософії». Механіку, засновану на цих законах, називають *класичною механікою*.

Закони Ньютона розглядають як систему взаємозалежних законів та дослідну перевірку піддають не кожен окремий закон, а всю систему в цілому. Ньютонівська механіка виявилася настільки плідною, настільки могутньою, що у фізиків склалося уявлення про те, що будь-яке фізичне явище можна пояснити за допомогою ньютонівських законів.

Більшість фізиків до кінця XIX ст. було переконано, що вони вже знають про природу все, що можна було дізнатися. Проте найбільш проникливі фізики розуміли, що у знанні класичної фізики є слабкі місця. Так, наприклад, англійський фізик У. Томсон (він же лорд Кельвін) говорив, що на горизонті безхмарного неба класичної фізики є дві темні хмарки: невдача спроб створення теорії абсолютно чорного тіла та суперечлива поведінка ефіру – гіпотетичного середовища, в якому передбачалося поширення світлових хвиль. Ці факти отримали своє пояснення у нових теоріях – спеціальній теорії відносності та квантової механіки.

У спеціальній теорії відносності, створеної А. Ейнштейном в 1905 р., зазнали радикального перегляду ньютонівські уявлення про простір і час. Цей перегляд призвів до створення «механіки великих швидкостей» або, як її називають, релятивістською механікою. Нова механіка не призвела, однак, до повного заперечення старої механіки Ньютона. Рівняння релятивістської механіки, у межі (для швидкостей, малих проти швидкості світла), переходять у рівняння класичної механіки. Таким чином, класична механіка увійшла в релятивістську механіку як її окремий випадок і зберегла своє колишнє значення для опису рухів, що відбуваються зі швидкостями, значно менше швидкості світла.

Аналогічно ситуація зі співвідношеннями між класичною і квантовою механікою, що виникла в 20-х роках минулого століття в результаті розвитку фізики атома. Рівняння квантової механіки також дають у межі (для мас, більших порівняно з масами атомів) рівняння класичної механіки. Отже, класична механіка увійшла в квантову механіку

як її граничний випадок. Таким чином, розвиток науки не перекреслив класичну механіку, а лише показав її обмежену застосовність.

Класична механіка, що ґрунтується на законах Ньютона, є механікою тіл великих (порівняно з масою атомів) мас, що рухаються з малими (порівняно зі швидкістю світла) швидкостями.

Перший закон Ньютона (закон інерції)

Всяка матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху до того часу, поки вплив із боку інших тіл не змусить її (його) змінити цей стан.

Обидва названі стани схожі тим, що прискорення тіла дорівнює нулю. Тому формулюванню першого закону можна надати наступний вигляд: швидкість будь-якого тіла залишається постійною (зокрема, рівною нулю), доки вплив на це тіло з боку інших тіл не викличе її зміни. Прагнення тіла зберегти стан спокою або рівномірного прямолінійного руху називається інертністю.

Тому перший закон Ньютона називають *законом інерції*.

Простіше кажучи, суть першого закону Ньютона можна сформулювати так: якщо ми на абсолютно рівній дорозі штовхнемо візок і уявимо, що можна знехтувати силами тертя коліс та опору повітря, то він котитиметься з однаковою швидкістю нескінченно довго.

Зрозуміло, що таких систем, де візок штовхнули, а він покотився без дії зовнішніх сил, насправді не буває. На тіла завжди діють сили, причому компенсувати дію цих сил цілком практично неможливо.

Наприклад, все на Землі перебуває у постійному полі сили тяжіння. Коли ми пересуваємось (не важливо, ходимо пішки, їздимо на машині чи велосипеді), нам потрібно долати безліч сил: силу тертя кочення і силу тертя ковзання, силу тяжіння, силу Коріоліса.

Механічний рух відносний, та його характер залежить від системи відліку. Перший закон Ньютона виконується не над будь-якій системі відліку, а ті системи, стосовно яких він виконується, називають *інерційними системами відліку*.

Інерційною системою відліку є така система відліку, щодо якої матеріальна точка, вільна від зовнішніх впливів, або спочиває, або рухається прямолінійно і рівномірно (тобто з постійною швидкістю $\vec{V} = \text{const}$). Таким чином, перший закон Ньютона стверджує існування інерційних систем відліку. Досвідченим шляхом встановлено, що інерційною системою відліку можна вважати геліоцентричну (зоряну)

систему відліку (початок координат знаходиться в центрі Сонця, а осі проведені у напрямі певних зірок).

Система відліку, пов'язана із Землею, строго кажучи, неінерційна, проте ефекти, зумовлені її неінерціальністю (Земля обертається навколо власної осі та навколо Сонця) при вирішенні багатьох завдань малі, і в цих випадках її можна вважати інерційною. З наведених вище прикладів легко зрозуміти, що основною ознакою інерційної системи є відсутність прискорення $a = 0$. Сутність першого закону Ньютона може бути зведена до трьох основних положень:

- всі тіла мають властивості інерції;
- існують інерційні системи відліку, в яких виконується перший закон Ньютона;
- рух відносний. Якщо тіло A рухається відносно тіла відліку B зі швидкістю V , то і тіло B , у свою чергу, рухається відносно тіла A з тією ж швидкістю, але в зворотному напрямку $V = -V'$.

Маса та імпульс тіла

Вплив дане тіло із боку інших тіл викликає зміна його швидкості, тобто повідомляє даному тілу прискорення. Досвід показує, що однаковий вплив повідомляє різні тіла різні за величиною прискорення. Будь-яке тіло чинить опір спробам змінити його стан руху. Ця властивість тіл, як ми вже говорили, називається інертністю (впливає з першого закону Ньютона).

Мірою інертності тіла є величина, яка називається *масою*. Щоб визначити масу деякого тіла, потрібно порівняти її з масою тіла, прийнятого за зразок маси (або порівняти з тілом відомої маси).

Маса – величина адитивна (маса тіла дорівнює сумі мас частин, що становлять це тіло). Система тіл, що взаємодіють лише між собою, називається **замкненою**.

Розглянемо замкнуту систему двох тіл масами m_1 і m_2 .

Зіткнемо ці два тіла (рис. 1.1).

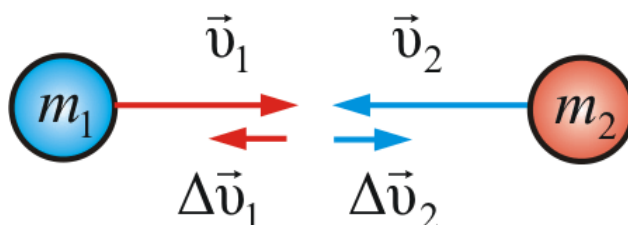


Рисунок 1.1- Замкнута система двох тіл

Досвід показує, що збільшені швидкості $\Delta \bar{V}_1$ і $\Delta \bar{V}_2$ завжди мають протилежний напрямок (відмінний знаком), а модулі прирощень швидкості відносяться як:

$$\frac{|\Delta \bar{V}_1|}{|\Delta \bar{V}_2|} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (1.4)$$

Тіло, що володіє більшою масою, менше змінює швидкість.

Взявши до уваги напрямок швидкостей, запишемо:

$$m_1 \cdot \Delta \bar{V}_1 = -m_2 \cdot \Delta \bar{V}_2, \quad (1.5)$$

При $V \ll c$ маса $m = \text{const}$ (ньютонівська, класична механіка), тоді маємо:

$$\Delta(m_1 \cdot \bar{V}_1) = -\Delta(m_2 \cdot \bar{V}_2), \quad (1.6)$$

Добуток маси тіла m на швидкість $\bar{V}$ називається *імпульсом тіла* $\bar{p}$:

$$\bar{p} = m \cdot \bar{V}, \quad (1.7)$$

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки) Принцип суперпозиції.

Пам'ятаєте приклад про візок? У цей момент ми доклали до неї сили! Інтуїтивно зрозуміло, що візок покотиться і незабаром зупиниться. Це означає, що її швидкість зміниться.

У реальному світі швидкість тіла найчастіше змінюється, а не залишається постійною. Іншими словами, тіло рухається із прискоренням. Якщо швидкість наростає або зменшується рівномірно, то кажуть, що рух рівноприскорений.

Якщо рояль падає з даху будинку вниз, він рухається рівноприскорено під впливом постійного прискорення вільного падіння g . Причому будь-який другий предмет, викинутий з вікна на планеті, рухатиметься з тим самим прискоренням вільного падіння. Другий закон Ньютона встановлює, як змінюється швидкість тіла при дії на нього якої-небудь сили, тобто встановлює зв'язок між масою, прискоренням та силою, що діє на тіло.

Простіше кажучи, якщо штовхнути м'яч, він пришвидшуватиметься, і чим сильніше його штовхнути, тим більше він пришвидшуватиметься.

Формулювання закону: *прискорення тіла (матеріальної точки) в інерційній системі відліку прямо пропорційно доданої до нього силі і обернено пропорційно масі.*

Приклад: якщо вдарити тенісною ракеткою по м'ячу, то м'яч придбає прискорення, що дорівнює відношенню до всіх рівнодіючих сил до маси.

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі діючої на цю точку:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m\cdot\bar{V})}{dt} = \bar{F}, \quad (1.8)$$

тому що $m = \text{const}$, то:

$$m \cdot \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \text{ або } m \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (1.9)$$

У цьому виді: прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеної до неї силі й має однаковий з нею напрямок.

Другий закон динаміки, як і перший, має місце тільки в інерційній системі відліку.

Якщо на точку діє кілька сил одночасно, то вони будуть еквівалентні однієї – рівнодіючої $\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i$, тоді рівняння прийме вид:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{R} \text{ або } m \cdot \bar{a} = \Sigma \bar{F}_i, \quad (1.10)$$

У системі СІ сім основних одиниць: (м) – метр, (кг) – кілограм, (с) – секунда, (А) – ампер, (К) – кельвін, (кд) – кандела (одиниця сили світла), (кмоль) – одиниця кількості речовини. Інші одиниці називаються похідними і виходять з фізичних законів, що пов'язують їх з основними одиницями. Наприклад, з другого закону Ньютона похідна одиниця сили виходить рівною $1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = 1 \text{ Н}$.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії й протидії)

Дія тіл один на одного має характер взаємодії.

Третій закон Ньютона відбиває той факт, що сила є результатом взаємодії тіл, і встановлює, що сили, з якими діють один на одного два тіла, рівні за величиною і протилежні у напрямку й мають загальну лінію дії:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}, \quad (1.11)$$

Проте третій закон справедливий не завжди. Він виконується у разі контактних взаємодій, тобто. при дотику тіл, а також при взаємодії тіл, що знаходяться на відстані один від одного, але тих, що спочивають щодо одного.



Рисунок 1.2 – Третій закон Ньютона

Закони Ньютона погано працюють при $V \approx c$ (релятивістська механіка) а також, при русі тіл дуже малих розмірів, порівнянних з розмірами елементарних частинок. Так, наприклад, нуклони всередині ядра, кварки всередині нуклонів і навіть електрони всередині атома не підкоряються законам Ньютона.

Четвертий закон – закон незалежності дії сил

Закон незалежності дії сил — це аксіома про незалежність дії кількох сил, прикладених до однієї і тієї ж матеріальної точки (рис. 1.3).

У сучасному формулюванні, четвертий закон Ньютона може бути записаний так: *Матеріальна точка під дією кількох сил набуває прискорення, що дорівнює геометричній сумі прискорень, які вона отримала б від кожної сили, що діє окремо, незалежно від інших.*

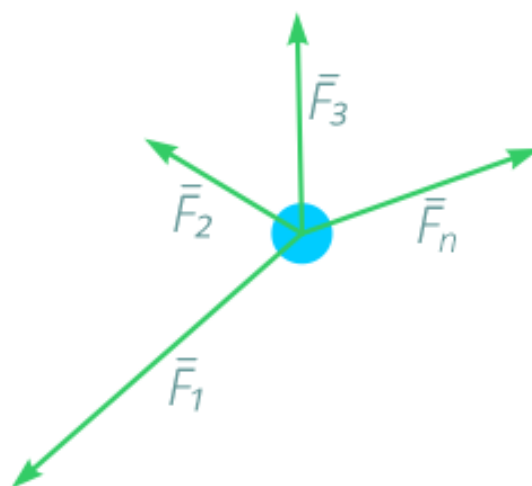


Рисунок 1.3 – До четвертого закону Ньютона

Нехай на матеріальну точку масою m діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$

Прискорення від кожної з цих сил, що діють окремо від інших: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

За другим законом: $m \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1, m \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2, \dots, m \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_n$

Підсумовуючи ці рівності та враховуючи, що прискорення $\vec{a}$, одержуване точкою від системи сил

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

дорівнює:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n,$$

Отримуємо:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (1.12)$$

Отримана рівність (1.9) називається **основним рівнянням динаміки точки** у разі дії на точку кількох сил.

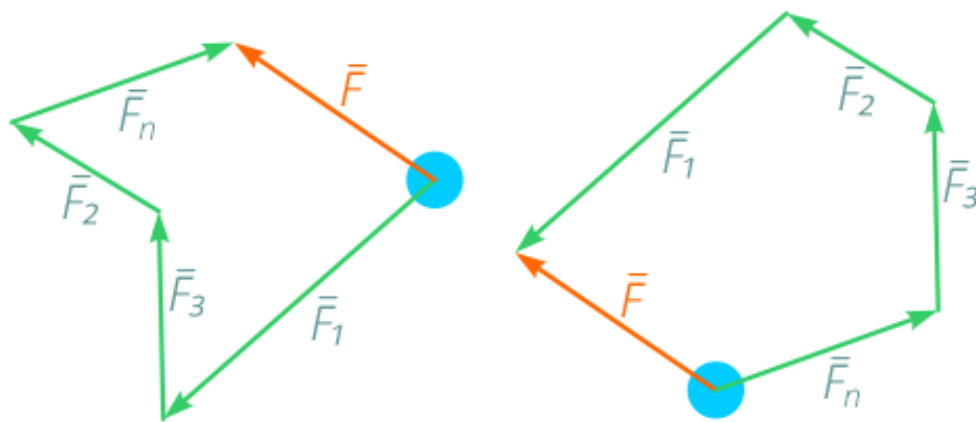


Рисунок 1.4 – Система сил, прикладених до однієї точки

Отже, система сил, прикладених до однієї точки, динамічно еквівалентна одній силі, що дорівнює їхній геометричній сумі.

Імпульс довільної системи тіл

Центр інерції або центр мас системи матеріальних точок називають таку точку C (рис. 1.11), радіус-вектор якої:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i, \quad (1.13)$$

де $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – загальна маса системи;

n – кількість точок системи

При цьому не треба плутати *центр мас* з *центром тяжіння системи* – з точкою прикладення рівнодіючої сил тяжіння всіх тіл системи.

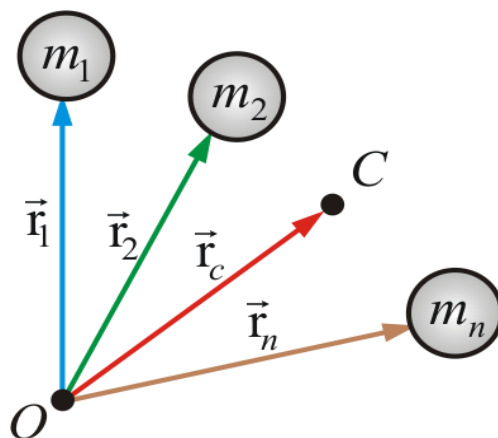


Рисунок 1.5 - Центр мас системи матеріальних точок

Центр тяжіння збігається з центром мас (центром інерції), якщо g (прискорення сили тяжіння) для всіх тіл системи однаково (коли розміри системи значно менші за розміри Землі).

Швидкість центру інерції системи $\vec{V}_c$ дорівнює:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i, \quad (1.14)$$

Тут

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i, \quad (1.15)$$

де $\vec{p}$ – імпульс системи тіл;

$\vec{V}_i$ – швидкість i -го тіла системи.

Оскільки $\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{V}_i = m \cdot \vec{V}_c$

то імпульс системи тіл можна визначити за формулою:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}_c, \quad (1.16)$$

Імпульс системи тіл дорівнює добутку маси системи на швидкість її центру інерції.

Основне рівняння динаміки поступального руху довільної системи тіл

Тіла, що не входять до складу системи, що розглядається, називають **зовнішніми тілами**, а сили, що діють на систему з боку цих тіл – **зовнішніми силами**. Сили взаємодії між тілами всередині системи

Оскільки імпульс системи $\vec{p} = m\vec{v}_c$, то $\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}$

Звідси можна записати **основне рівняння динаміки поступального руху системи тіл у вигляді:**

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.20)$$

Тут $\vec{a}$ прискорення центру інерції.

Центр механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи.

На підставі третього закону Ньютона, сили, що діють на тіла системи з боку інших тіл системи (внутрішні сили), взаємно компенсують одна одну. Залишаються тільки зовнішні сили.

У загальному випадку рух тіла можна розглядати як суму двох рухів: поступального зі швидкістю $\vec{v} = \vec{v}_c$ і обертального навколо центру інерції.

1.3 Основні види сил

Види та категорії сил у природі

Одне з найпростіших визначень сили: *вплив одного тіла (або поля) на інше, що викликає прискорення – це **сила**.*

Однак, суперечка навколо визначення сили не закінчена досі - це обумовлено труднощами об'єднання в одному визначенні сил, різних за своєю природою та характером прояву. В даний час розрізняють чотири типи сил або взаємодій:

- гравітаційні;
- електромагнітні;
- сильні (відповідальні за зв'язок частинок у ядрах);
- слабкі (відповідальні за розпад).

Гравітаційні та електромагнітні сили не можна звести до інших, більш простих сил, тому їх називають **фундаментальними**.

Закони фундаментальних сил прості та виражаються точними формулами. Наприклад можна навести формулу гравітаційної сили взаємодії двох матеріальних точок, мають маси m_1 і m_2 :

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.21)$$

де r – відстань між точками;

γ – гравітаційна постійна.

Як другий приклад можна навести формулу для визначення сили електростатичної взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2 :

$$F = k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \quad (1.22)$$

де k_0 – коефіцієнт пропорційності, залежить від вибору системи одиниць.

Як видно, формули для фундаментальних сил є простими та точними.

Для інших сил, наприклад, для пружних сил і тертя можна отримати лише наближені, емпіричні формули.

Сила тяжіння та вага тіла

Одна з фундаментальних сил – сила гравітації проявляється Землі як сила тяжіння – сила, з якою всі тіла притягуються до Землі.

Поблизу Землі всі тіла падають з однаковим прискоренням – прискоренням вільного падіння g . Звідси випливає, що в системі відліку, пов'язаної із Землею, на всяке тіло діє сила тяжіння mg .

Вона приблизно дорівнює силі гравітаційного тяжіння Землі (відмінність між силою тяжіння і гравітаційною силою обумовлено тим, що система відліку, пов'язана із Землею, недостатньо інерційна).

Якщо підвісити тіло (рис. 1.6) або покласти його на опору, то сила тяжіння врівноважується силою R – яку називають *реакцією опори* чи підвісу.

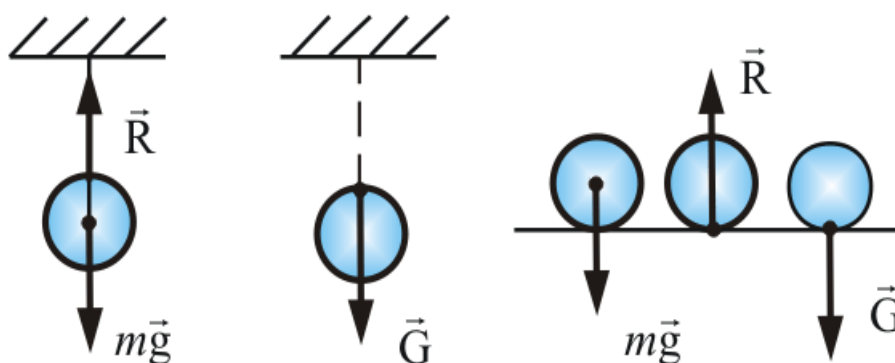


Рисунок 1.6 – Реакція опори чи підвісу

За третім законом Ньютона тіло діє на підвіс або опору з силою G яка називається *вагою тіла*.

Отже, *вага тіла* – це сила, з якою тіло у стані спокою діє на підвіс чи опору, внаслідок гравітаційного тяжіння до Землі.

Оскільки сили mg та $\vec{R}$ врівноважують один одного, то виконується співвідношення:

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

Відповідно до третього закону Ньютона: $\vec{G} = -\vec{R}$.

Значить

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad (1.23)$$

тобто вага і сила тяжіння дорівнюють одна одній, але прикладені до різних точок: вага до підвісу чи опори, сила тяжіння – до тіла. Ця рівність справедлива, якщо підвіс (опора) і тіло спочивають щодо Землі (або рухаються рівномірно, прямолінійно). Якщо має місце рух із прискоренням, то справедливе співвідношення:

$$G = mg \pm mg = m(g \pm a), \quad (1.24)$$

Вага тіла може бути більшою або меншою сили тяжіння: якщо g і a спрямовані в один бік (тіло рухається вниз або падає), то

$$G < mg$$

і якщо навпаки, то $G > mg$.

Якщо ж тіло рухається із прискоренням $a = g$ то $G = 0$ – тобто настає стан невагомості.

Приклад: космічний корабель на орбіті.

Пружні сили

Електромагнітні сили в механіці виявляють себе як **пружні сили** та сили тертя.

Під дією зовнішніх сил виникають *деформації* (тобто зміна розмірів та форми) тіл.

Якщо після припинення дії зовнішніх сил відновлюються колишні форми та розміри тіла, то деформація називається **пружною**. Деформація має пружний характер у разі, якщо зовнішня сила не перевищує певного значення, що називається **границею пружності**.

При перевищенні цієї границі деформація стає **пластичною** чи **не пружною**, тобто початкові розміри та форма тіла повністю не відновлюються.

Розглянемо пружні деформації. У деформованому тілі (рисунок 1.7) виникають пружні сили, що врівноважують зовнішні сили. Під впливом зовнішньої сили – $F_{зовн.}$ пружина отримує подовження (x), в результаті в ній виникає пружна сила – $F_{пр.}$, що врівноважує $F_{зовн.}$

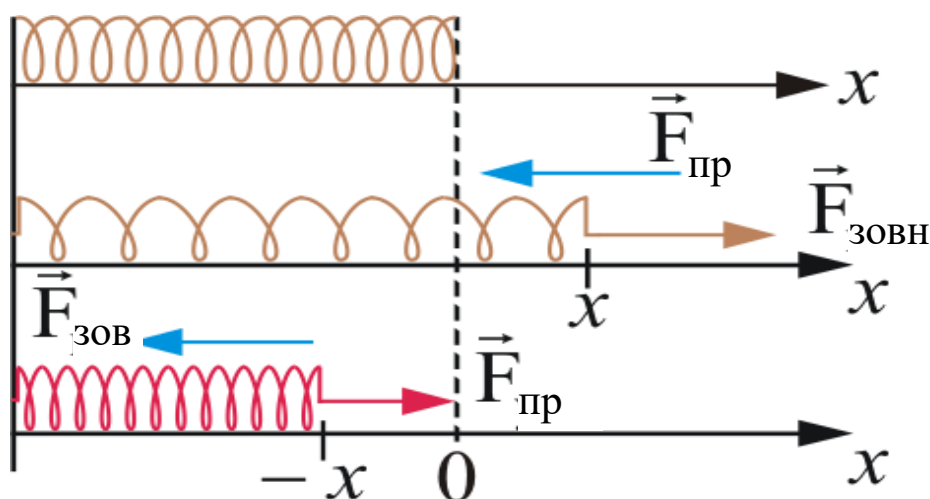


Рисунок 1.7 – Пружні деформації

Пружні сили виникають у всій деформованій пружині. Будь-яка частина пружини діє іншу частину з силою пружності $F_{пр}$. Подовження пружини пропорційне зовнішній силі і визначається законом Гука:

$$x = \frac{1}{k} F_{зовн}, \quad (1.25)$$

де k – жорсткість пружини.

Видно, чим більше k , тим менше подовження отримає пружина під дією даної сили.



Гук Роберт (1635 – 1703) відомий англійський фізик, який зробив безліч винаходів та відкриттів в області механіки, термодинаміки, оптики. Його роботи відносяться до теплоти, пружності, оптики, небесної механіки. Встановив постійні точки термометра – точку танення льоду, точку кипіння води. Удосконалив мікроскоп, що дозволило йому здійснити низку мікроскопічних досліджень, зокрема спостерігати тонкі шари у світлових пучках, вивчати будову рослин. Започаткував фізичну оптику.

Так як пружна сила відрізняється від зовнішньої лише знаком, тобто. $F_{пр} = -F_{зовн}$, то закон Гука можна записати у вигляді:

$$x = -\frac{1}{k} F_{пр}, \quad \text{звідси } F_{пр} = -kx.$$

Потенційна енергія пружної пружини дорівнює роботі, виконаній над пружиною. Оскільки сила не постійна, то елементарна робота дорівнює:

$$dA = Fdx \text{ або } dA = -kxdx.$$

Тоді повна робота, яка виконана пружиною, дорівнює:

$$A = \int dA = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Закон Гука для стержня

Односторонній (або поздовжній) розтяг (стиск) стержня полягає у збільшенні (зменшенні) довжини стержня під дією зовнішньої сили F (рис. 1.8).

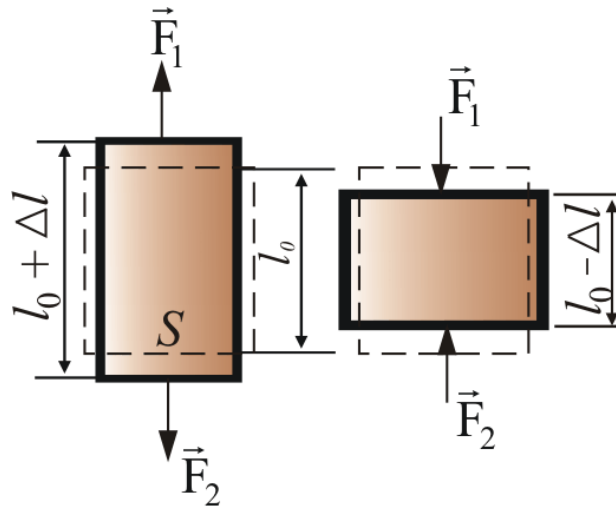


Рисунок 1.8 – Односторонній (або поздовжній) розтяг (стиск) стержня

Така деформація призводить до виникнення у стержні пружних сил, які прийнято характеризувати **напруженням σ** :

$$\sigma = \frac{F_{np}}{S}, \quad (1.26)$$

де $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа поперечного перерізу круглого стержня;

d – його діаметр.

У разі розтягу σ вважається позитивним, а у разі стиску – негативним. Досвід показує, що збільшення довжини стержня Δl пропорційно напруженню σ :

$$\Delta l = \frac{1}{k} \sigma.$$

Коефіцієнт пропорційності k , як і у разі пружини, залежить від властивостей матеріалу та довжини стержня.

Доведено, що величина,

$$k = \frac{E}{l_0},$$

де E – величина, що характеризує пружні властивості матеріалу стержня – **модуль Юнга**.

Модуль Юнга (E) вимірюється в Н/м² або Па.

Тоді з цих формул можна знайти збільшення довжини:

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}$$

або, позначивши $\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ – відносне збільшення довжини, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \text{ або } \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1.27)$$

Закон Гука для стержня: *відносне збільшення довжини стержня прямо пропорційно напруженню і назад пропорційно модулю Юнга.*

Зауважимо, що розтяг чи стиск стержнів супроводжується відповідною зміною їх поперечних розмірів (рисунок 1.14).

Відношення відносного поперечного $\frac{\Delta d}{d}$ звуження (розширення) стержня до відносного подовження (стиснення) $\frac{\Delta l}{l}$ називають **коефіцієнтом Пуассона**

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}, \quad (1.28)$$

Об'ємна щільність потенційної енергії тіла ω_σ при розтягу (стиску) визначається питомою роботою з подолання пружних сил A_{np} , розрахованої на одиницю об'єму тіла:

$$\omega_\sigma = A_{np} = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (1.29)$$

Деформація зсуву

Під дією сили F доданої до верхньої грані, брусок отримує **деформацію зсуву**.

Нехай АВ – площа зсуву (рис. 1.9).

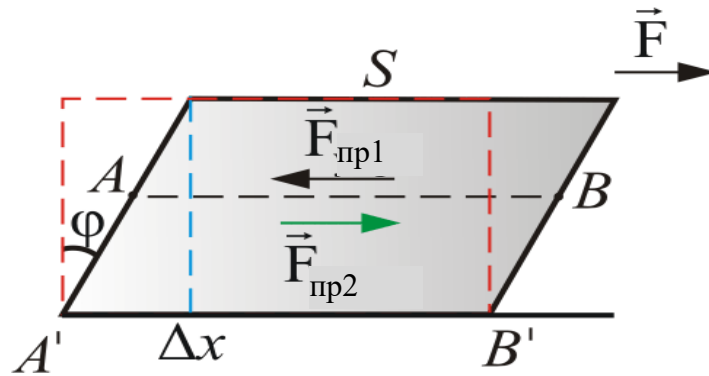


Рисунок 1.9 – Деформація зсуву

Назвемо величину γ , рівну тангенсу кута зсуву ϕ , **відносним зсувом**:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x},$$

де Δx – абсолютний зсув.

При пружних деформаціях кут ϕ буває дуже маленьким, тому $\operatorname{tg} \phi \approx \phi$. Таким чином, відносний зсув

$$\gamma = \operatorname{tg} \phi \approx \phi.$$

Деформація зсуву призводить до виникнення в кожній точці тангенціального бруска пружного напруження τ , яка визначається, як відношення модуля сили пружності до одиниці площі:

$$\tau = \frac{F_{\text{пр}}}{S}, \quad (1.30)$$

де S – площа поверхні AB .

Досвідченим шляхом доведено, що відносний зсув пропорційний тангенціальному напруженню:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau, \quad (1.31)$$

де G – модуль зсуву, що залежить від властивостей матеріалу і дорівнює такому тангенціальному напруженню, при якому $\gamma = \operatorname{tg} \phi = 1$ а $\phi = 45^\circ$ (якби такі величезні пружні деформації були можливі).

Модуль зсуву вимірюється так як і модуль Юнга, в паскалях (Па).

Питома потенційна енергія тіла, що деформується, при зсуву дорівнює:

$$\omega_s = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (1.32)$$

Сили тертя

Тертя поділяється на *зовнішнє* та *внутрішнє*.

Зовнішнє тертя виникає при відносному переміщенні двох твердих тіл, що стикаються (тертя ковзання або тертя спокою).

Внутрішнє тертя спостерігається при відносному переміщенні частин того самого суцільного тіла (наприклад, рідина або газ).

Розрізняють *сухе* та *рідке* (або *в'язке*) тертя.

Рідким (в'язким) називається тертя між твердим тілом і рідким або газоподібним середовищем або його шарами.

Сухе тертя, у свою чергу, поділяється на *тертя ковзання* та *тертя кочення*.

Розглянемо закони сухого тертя (рис. 1.10).

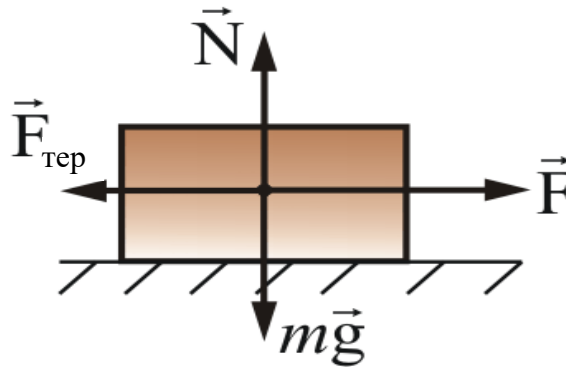


Рисунок 1.10 – Сухе тертя

Вплинемо на тіло, що лежить на нерухомій площині зовнішньою силою F поступово збільшуючи її модуль. Спочатку брусок залишатиметься нерухомим, отже зовнішня сила F врівноважується деякою силою $F_{тер}$ – спрямованої по дотичній до поверхонь, що труться, протилежної силі F . В цьому випадку $F_{тер}$ - і є **сила тертя спокою**.

Коли модуль зовнішньої сили, а отже, і модуль сили тертя спокою перевищить значення F_0 , тіло почне ковзати по опорі – тертя спокою $F_{тер.спок}$ зміниться **тертям ковзання** $F_{тер.ков}$ (рис. 1.11).

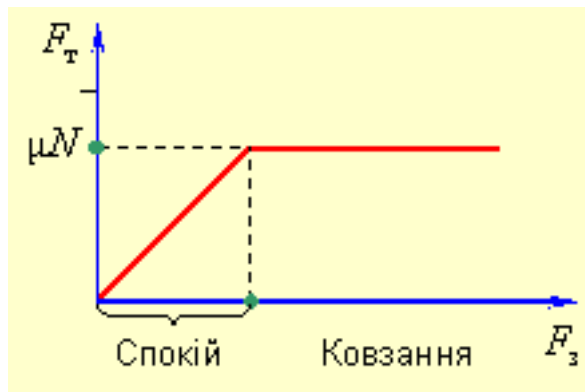


Рисунок 1.11 – Тертя ковзання

Встановлено, що максимальна сила тертя спокою не залежить від площі дотику тіл і приблизно пропорційна модулю сили нормального тиску N

$$F_0 = \mu_0 N,$$

де μ_0 - коефіцієнт тертя спокою - залежить від природи і стану поверхонь, що труться. Аналогічно і для сили тертя ковзання:

$$F_{\text{тер}} = \mu N, \quad (1.33)$$

Тертя кочення виникає між кулястим тілом і поверхнею, якою воно котиться.

Сила тертя кочення підпорядковується тим самим законам, що й ковзання, але коефіцієнт тертя тут значно менше.

Докладніше розглянемо силу тертя ковзання на похилій площині (рис. 1.12).

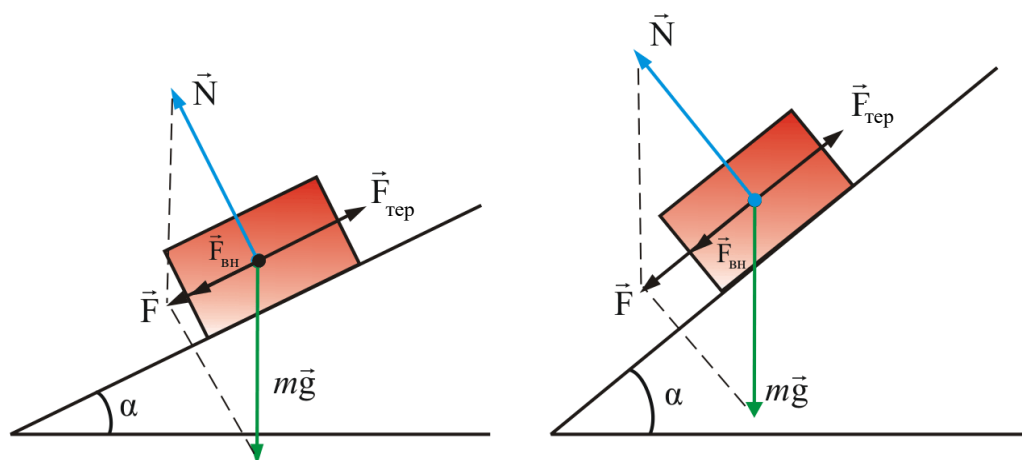


Рисунок 1.12 – Сила тертя ковзання на похилій площині

На тіло, що знаходиться на похилій площині із сухим тертям, діють три сили:

- сила тяжіння $m\vec{g}$;
- нормальна сила реакції опори $\vec{N}$;
- сила сухого тертя $\vec{F}_{тер.}$.

Сила $\vec{F}$ є рівнодіюча сил $m\vec{g}$ і $\vec{N}$ вона спрямована вниз, уздовж похилої площини. З рисунку 1.8 видно, що

$$F = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha$$

Якщо $F < (F_{тер.})_{max} = \mu N$ - тіло залишається нерухомим на похилій площині.

Максимальний кут нахилу α визначається з умови:

$$(F_{тер.})_{max} = F \quad \text{або} \quad \mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha,$$

отже, $\operatorname{tg} \alpha_{max} = \mu$

де μ – коефіцієнт сухого тертя.

$$F_{тер.} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$F = mg \sin \alpha, \tag{1.34}$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тіло скочуватиметься з прискоренням:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \tag{1.35}$$

$$F_{ков.} = ma = F - F_{тер.}, \tag{1.36}$$

Якщо додаткова сила $F_{зовн.}$ спрямована вздовж похилої площини, прикладена до тіла, то критичний кут α_{max} та прискорення тіла залежатимуть від величини та напрямки цієї зовнішньої сили.

Сили інерції

Рівняння Ньютона для неінерційних систем відліку

Закони інерції виконуються в інерційній системі відліку. А як описати рух тіла у неінерційній системі?

Розглянемо приклад: ви стоїте у тролейбусі спокійно. Раптом тролейбус різко рушає, і ви мимоволі відхилилися назад. Що сталося? Хто вас штовхнув?

З погляду спостерігача на Землі (в інерційній системі відліку), у той момент, коли тролейбус рушив, ви залишилися стояти на місці – відповідно до першого закону Ньютона.

З погляду того, хто сидить у тролейбусі, ви почали рухатися назад, якби хто-небудь вас штовхнув. Насправді ніхто не штовхнув, просто ваші

ноги, пов'язані силами тертя з тролейбусом «поїхали» вперед з-під вас і вам довелося падати назад.

Можна описати ваш рух у інерційній системі відліку. Але це не завжди просто, тому що обов'язково потрібно вводити сили, що діють із боку зв'язей.

А вони можуть бути різними і поведяться по-різному – немає єдиного підходу до їх опису. А можна й у неінерційній системі скористатися законами Ньютона, якщо запровадити **сили інерції**. Вони **фіктивні**. Немає тіла чи поля під дією якого ви почали рухатись у тролейбусі. Сили інерції вводять спеціально, щоб скористатися рівняннями Ньютона у неінерційній системі.

Сили інерції обумовлені не взаємодією тіл, а властивостями самих неінерційних систем відліку. На сили інерції закони Ньютона не поширюються.

Знайдемо кількісний вираз для сили інерції під час **поступального руху** неінерційної системи відліку.

Введемо позначення:

a' – прискорення тіла щодо неінерційної системи;

a^* – прискорення неінерційної системи щодо інерційної (щодо Землі).

Тоді прискорення тіла щодо інерційної системи:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}', \quad (1.37)$$

Прискорення в інерційній системі можна виразити через другий закон Ньютона:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}^* + \vec{a}'$$

де m – маса тіла, що рухається, або

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}^*.$$

Ми можемо і $\vec{a}^*$ представити відповідно до закону Ньютона (формально), отримаємо:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{ін}}{m},$$

де $\vec{F}_{ін}$ – сила, спрямована убік, протилежний прискоренню неінерційної системи.

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}^*,$$

тоді отримаємо: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$ - *рівняння Ньютона для неінерційної системи відліку.*

Тут $\vec{F}_{in}$ - фіктивна сила, обумовлена властивостями системи відліку, необхідної нам для того, щоб мати можливість описувати рухи тіл у неінерційних системах відліку за допомогою рівнянь Ньютона.

Сили інерції неінваріантні щодо переходу з однієї системи відліку в іншу. Вони не підкоряються закону дії та протидії. Рухи тіла під впливом сил інерції аналогічно руху у зовнішньому силовому полі. Сили інерції завжди є зовнішнім стосовно будь-якого руху системи матеріальних тіл.

Інваріант - вираз, що залишається незмінним при певному перетворенні змінних, пов'язаних з цим виразом, наприклад, при переході від однієї системи координат до іншої.

Відцентрова сила інерції

Відцентрова сила інерції – сила інерції, що виникає в системі відліку, що обертається. Ця сила діє на тіло в системі відліку, що обертається, незалежно від того, покоїться тіло в цій системі або рухається відносно неї зі швидкістю.

Відцентрова сила інерції прикладена до матеріальної точки, що рухається, і спрямована по радіусу обертання від центру.

Сили інерції, що діють на тіло, що покоїться в системі відліку, що обертається.

Відцентрова сила виникає через інерцію маси під час її кругового руху навколо центру (звідси і назва). Відцентрове прискорення в інерційній системі координат, спрямоване в протилежний бік, створює цю силу.

Вектор I_{uc} перпендикулярний миттєвій осі обертання інерційної системи відліку (тобто вектору ω) та спрямований від даної осі.

Модуль I_{uc} :

$$I_{uc} = m\omega^2 r.$$

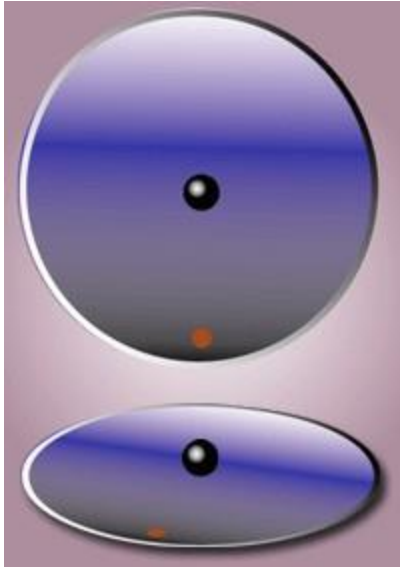
Сили інерції, що діють на тіло, що рухається в системі відліку, що обертається.

Сила Коріоліса

Сила Коріоліса (на ім'я французького вченого Г. Коріоліса) – одна з сил інерції, що існує в системі відліку, що обертається, і з'являється при русі в напрямку під кутом до осі обертання.

Сила Коріоліса не здійснює роботу у відносному русі матеріальної точки, так як вона спрямована перпендикулярно швидкості відносного руху.

$$I_K = 2m[V, \omega]$$



При обертанні диска, більш далекі від центру точки рухаються з більшою дотичною швидкістю, ніж далекі.

Для переміщення деякого тіла вздовж радіусу так, щоб воно залишалось на радіусі, доведеться збільшити його швидкість, тобто, надати тілу прискорення.

Причина появи сили Коріоліса – у коріолісовому прискоренні. Для того, щоб тіло рухалося з коріолісовим прискоренням, необхідний додавання до тіла сили, що

дорівнює:

$$I_K = ma_K,$$

де a_K – коріолісове прискорення.

Відповідно, тіло діє за третім законом Ньютона із силою протилежної спрямованості:

$$I_K = -ma_K$$

Сила, яка діє з боку тіла, і називатиметься **силою Коріоліса**.

В інерційних системах відліку діє **закон інерції**, тобто, кожне тіло прагне рухатися прямою і постійною швидкістю.

Якщо розглянути рух тіла, рівномірний уздовж деякого радіусу, що обертається і спрямований від центру, то стане ясно, що щоб воно здійснилося, потрібно надавати тілу прискорення, так як чим далі від центру, тим повинна бути більша дотична швидкість обертання.

Це означає, що з точки зору системи відліку, яка обертається, якась сила намагатиметься змістити тіло з радіусу.

Якщо обертання відбувається за годинниковою стрілкою, тіло, що рухається від центру обертання, буде прагнути зійти з радіуса вліво. Якщо обертання відбувається проти годинникової стрілки – то вправо.

Оскільки Земля обертається, то сила Коріоліса проявляється у глобальних масштабах. У північній півкулі сила Коріоліса спрямована

праворуч від руху, тому праві береги рік у північній півкулі крутіші – їх підмиває вода під дією цієї сили.

1.4 Задачі динаміки для вільної та невільної матеріальної точки

Для вільної матеріальної точки задачами динаміки є:

- 1) знаючи закон руху точки, визначити силу, що діє на неї (**перша задача динаміки**);
- 2) знаючи діючі на точку сили, визначити закон руху точки (**друга чи основна задача динаміки**).

Вирішуються обидві ці задачі за допомогою рівнянь, що виражають основний закон динаміки, оскільки ці рівняння пов'язують прискорення $\vec{a}$, тобто величину, що характеризує рух точки і сили, що діють на неї.

У техніці часто доводиться стикатися з вивченням невільного руху точки, тобто, з випадками, коли точка завдяки накладеним на неї зв'язкам змушена рухатися по заданій нерухомій поверхні або кривій.

Невільною матеріальною точкою називається точка, свобода руху якої обмежена.

Тіла, що обмежують свободу руху точки, називають **зв'язками** або **в'язями**.

Нехай в'язь є поверхнею будь-якого тіла, по якій рухається точка. Тоді координати точки повинні задовольняти рівняння цієї поверхні, що називається рівнянням в'язі:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Якщо точка змушена рухатися деякою лінією, то рівняннями в'язей є рівняння цієї лінії:

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0$$

Таким чином, рух невільної матеріальної точки залежить не тільки від прикладених до неї активних сил та початкових умов, а також від наявних в'язей. При цьому значення початкових параметрів повинні відповідати рівнянням зв'язей.

В'язі бувають:

- **двосторонні** чи *утримуючі* ;
- **односторонні** чи *не утримуючі*.

В'язь називається **двосторонньою** якщо, обмеження, що накладаються нею на координати точки виражаються у формі рівностей, що визначають криві або поверхні в просторі на яких знаходиться точка.

Алгоритм рішення прямої задачі:

1. Зобразити на розрахунковій схемі матеріальну точку в поточному положенні, прикладені до неї активні сили та реакції в'язей (застосувавши закон звільнення від в'язей).

2. Вибрати систему відліку.

3. Визначити за заданим законом руху прискорення матеріальної точки та знайти його проекції на осі координат:

$$\text{у координатній формі: } a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2 z}{dt^2};$$

$$\text{у природній формі: } \bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

4. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки, що відповідають прийнятій системі відліку:

$$\text{у координатною формі: } F_x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, F_y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, F_z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2};$$

$$\text{у природній формі: } F_{i\tau} = m \cdot a^\tau = m \cdot \frac{dV}{dt}, F_{in} = m \cdot a^n = m \cdot \frac{V^2}{\rho}.$$

5. Із системи складених рівнянь визначити шукані величини:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Приклад 1.1

Матеріальна точка підвішена на стержні довжини l (рис. 1.13). Рівняння в'язі має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

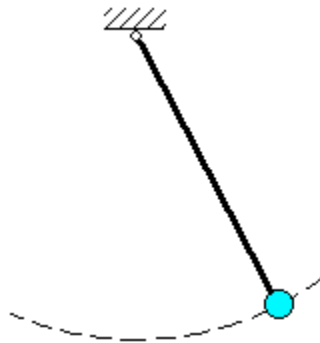


Рисунок 1.13 – Розрахункова схема до прикладу 1.1

В'язь – одностороння, якщо, обмеження, що накладаються нею на координати точки виражаються у формі нерівностей. Одностороння в'язь перешкоджає переміщенню точки лише в одному напрямку та допускає її переміщення в інших напрямках.

Приклад 1.2

Матеріальна точка підвішена на нитці довжини l (рисунок 1.14). Рівняння в'язі має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

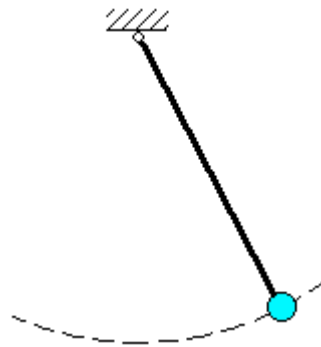


Рисунок 1.14 – Розрахункова схема до прикладу 1.2

У випадках невіЛЬНОГО руху точки, як і в статиці, будемо при вирішенні задачі виходити з аксіом *в'язей* (принцип звільнення від *в'язей*), згідно з якою *будь-яку невіЛЬну матеріальну точку можна розглядати як вільну, відкинувши в'язі і замінивши її дію реакцією цієї в'язі*.

Тоді основний закон динаміки для невіЛЬНОГО руху точки набуде вигляду:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a + \vec{N},$$

де $\vec{F}_k^a$ - діючі на точку активні сили.

Нехай на точку діє кілька сил. Складемо для неї основне рівняння динаміки:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i.$$

Перенесемо всі члени в один бік рівняння та запишемо так:

$$\sum \vec{F}_i - m \cdot \vec{a} = 0 \text{ або } \sum \vec{F}_i + \vec{F}_i^{in} = 0.$$

Це рівняння нагадує умову рівноваги сил, що сходяться. Тому можна дійти висновку, що, якщо до матеріальної точки, що рухається докласти її силу інерції, то точка перебуватиме у рівновазі. (Згадаємо, що насправді сила інерції не прикладена до матеріальної точки і точка не знаходиться в рівновазі.) Звідси випливає метод вирішення таких задач, який називається **методом кінетостатики**:

Якщо до сил, які діють на точку, додати її силу інерції, задачу можна вирішувати методами статyki, складанням рівнянь рівноваги.

Перша задача динаміки для невільного руху буде зводитися зазвичай до того, щоб, знаючи рух точки і активні сили, що діють на неї, визначити реакцію в'язі.

Приклад 1.3

При русі автомобіля з постійним прискоренням $\vec{a}$ маятник (матеріальна точка підвішена на нитці) відхиляється від вертикалі на кут (рис. 1.15).

Визначимо з яким прискоренням рухається автомобіль та натяг нитки.

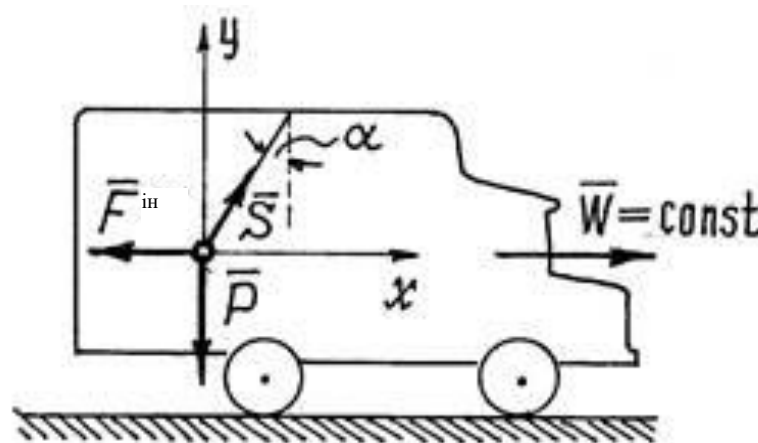


Рисунок 1.15 – Розрахункова схема до прикладу 1.3

Розглянемо «динамічну рівновагу» точки. Її так називають тому, що насправді точка не перебуває в рівновазі, вона рухається з прискоренням.

На точку діють сили: вага $\vec{P}$ та на тяжіння нитки $\vec{S}$, реакція нитки.

Прикладемо до точки її силу інерції $F^{in} = ma = \frac{P}{g}a$, спрямовану у бік

протилежну прискоренню точки та автомобіля і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad -F^{in} + \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S \cos \alpha - P = 0.$$

$$S = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

З другого рівняння випливає

$$\text{З першого } -\frac{P}{g}W + \sin \alpha = 0 \text{ та } W = -\frac{g}{P}S \cdot \sin \alpha = \frac{g}{P} \cdot \frac{P}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Приклад 1.4

Ліфт вагою P (рис. 1.16) починає підніматися із прискоренням $\vec{a}$. Визначити натягу троса.

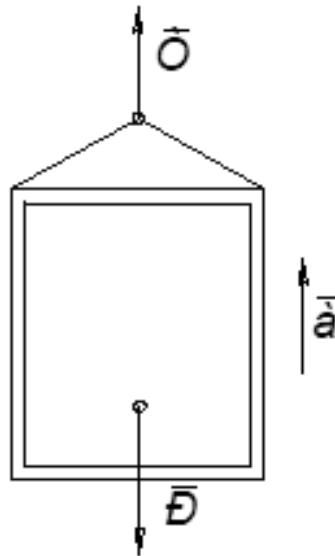


Рисунок 1.16 – Розрахункова схема до прикладу 1.4

Розглядаючи ліфт як вільний, замінюємо дію в'язі (троса) реакцією T і, складаючи рівняння $m \cdot \vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a + \vec{N}$ у проекції на вертикаль, отримуємо:

$$\frac{P}{g}a = T - P.$$

$$\text{Звідси знаходимо: } T = P \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Якщо ліфт почне опускатися з таким самим прискоренням, то натяг троса буде рівним:

$$T = P \cdot \left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

Із прикладів видно, що перша задача динаміки вирішується досить просто. Якщо прискорення точки не задано явно, то його обчислення зводиться до чисто кінематичних розрахунків.

1.5 Диференціальні рівняння динаміки матеріальної точки

За допомогою диференціальних рівнянь руху вирішується **друга задача динаміки**. Правила складання таких рівнянь залежать від того, як хочемо визначити рух точки.

1) *Визначення руху точки координатним способом.*

Розглянемо вільну матеріальну точку, що рухається під впливом сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Проведемо нерухомі координатні осі O_{xyz} (рисунок 1.17). Проектуючи обидві частини рівності $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_n$ на ці осі і враховуючи, що $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ і т.д., отримаємо **диференціальні рівняння** криволінійного руху точки в проекціях на осі прямокутної декартової системи координат:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{nx}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ny}; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{nz}.$$

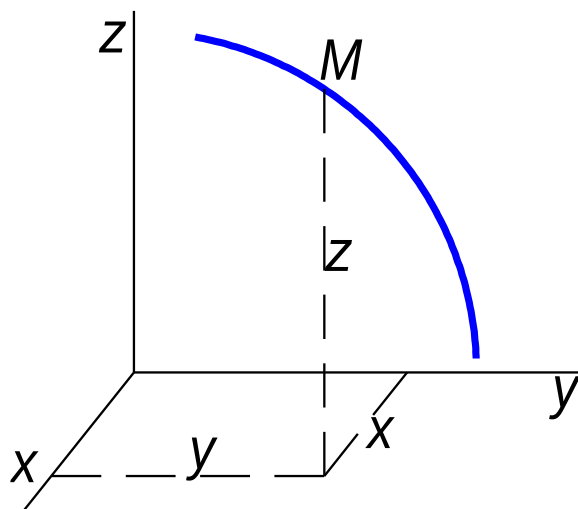


Рисунок 1.17 – Визначення руху точки координатним способом

Оскільки сили, що діють на точку, можуть залежати від часу, від положення точки і від її швидкості, то праві частини рівнянь можуть

містити час t , координати точки x, y, z і проекції її швидкості $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

При цьому до правої частини кожного з рівнянь можуть входити всі ці змінні.

Щоб за допомогою цих рівнянь вирішити основну задачу динаміки, треба, крім сил, знати ще початкові умови, тобто положення та швидкість точки в початковий момент. У координатних осях O_{xyz} початкові умови задаються у вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0; \\ v_x = v_{x0}, & v_y = v_{y0}, & v_z = v_{z0}. \end{cases}$$

при $t = 0$.

Знаючи діючі сили, після інтегрування рівнянь знайдемо координати x, y, z точки, що рухається, як функції часу t , тобто знайдемо закон руху точки.

Рух матеріальної точки задано за допомогою радіуса-вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (рис. 1.18).

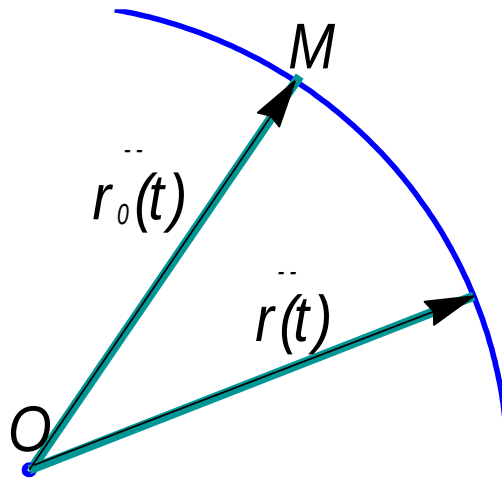


Рисунок - 1.18 – Рух матеріальної точки

Диференціальне рівняння руху приймає вид:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} \quad \text{або} \quad m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}.$$

У загальному випадку сила $\bar{F}$ може бути функцією часу, координат і швидкості:

$$\bar{F} = f(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t).$$

Приклад 1.5

З гармати, встановленій на висоті h , зробили постріл під кутом α до горизонту (рис. 1.19). Ядро вилетіло зі ствола зброї зі швидкістю u . Визначимо рівняння руху ядра.

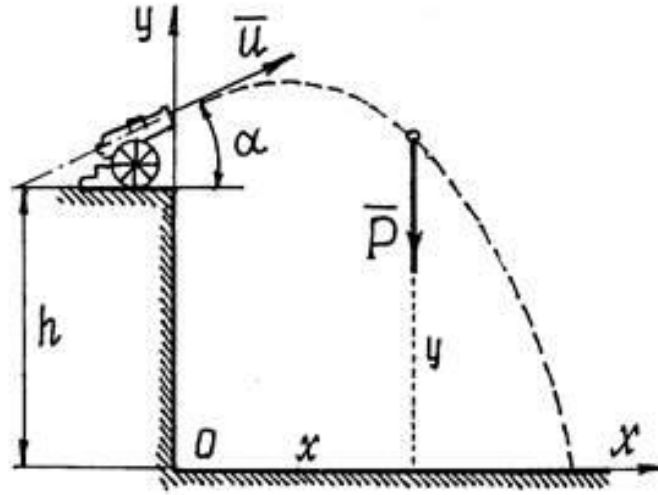


Рисунок 1.19 – Розрахункова схема до прикладу 1.5

Щоб правильно скласти диференціальні рівняння руху, треба вирішувати такі задачі за певною схемою:

а) Призначити систему координат (кількість осей, їх напрямки та початок координат). Вдало вибрані осі спрощують рішення.

б) Показати точку у проміжному положенні. При цьому треба простежити, щоб координати такого положення обов'язково були позитивними (рис. 1.19).

в) Показати сили, що діють на точку у цьому проміжному положенні (сили інерції не показувати!).

У цьому прикладі – це лише сила $\bar{P}$, вага ядра. Опір повітря враховувати не будемо.

г) Скласти диференціальні рівняння за формулами:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = 0, \quad \frac{P}{g} \ddot{y} = -P.$$

Звідси отримаємо два рівняння:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{і} \quad \ddot{y} = -g.$$

д) Вирішити диференціальні рівняння.

Отримані рівняння – лінійні рівняння другого порядку, у правій частині – постійні. Вирішення цих рівнянь елементарне.

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1; \\ \dot{y} = -gt + D_1. \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_2; \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + D_1 t + D_2. \end{cases}$$

Залишилося знайти постійні інтегрування. Підставляємо початкові умови (при $t = 0$, $x = 0$, $y = h$, $\dot{x} = v_x = u \cos \alpha$, $\dot{y} = v_y = u \sin \alpha$) Ці чотири рівняння:

$$u \cos \alpha = C_1;$$

$$u \sin \alpha = D_1;$$

$$0 = C_2;$$

$$h = D_2.$$

Підставляємо в рівняння значення постійних і записуємо рівняння руху точки в остаточному вигляді:

$$\begin{cases} x = ut \cos \alpha; \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + ut \sin \alpha + h. \end{cases}$$

Маючи ці рівняння, як відомо з розділу кінематики, можна визначити траєкторію руху ядра, і швидкість, і прискорення, і положення ядра в будь-який момент часу.

Як очевидно з цього прикладу, схема розв'язання завдань досить проста. Складнощі можуть виникнути тільки при вирішенні диференціальних рівнянь, які можуть бути непростими.

2) Визначення руху точки природним способом.

Координатним способом зазвичай визначають рух точки, не обмежені будь-якими умовами, в'язями. Якщо на рух точки накладені обмеження, на швидкість чи координати, то визначити такий рух координатним способом непросто. Найзручніше використовувати природний спосіб завдання руху.

Визначимо, наприклад, рух точки заданої нерухомої лінії, заданої траєкторії (рисунок 1.20).

На точку М крім заданих активних сил $\vec{F}_i$ діє реакція лінії. Показуємо складові реакції $\vec{R}$ з природних осей $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{B}$.

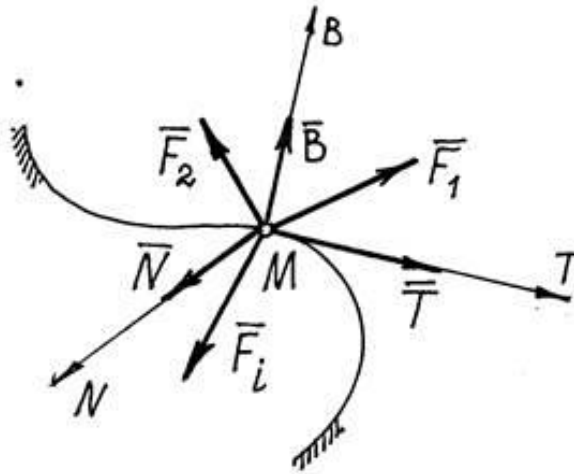


Рисунок 1.20 – Рух матеріальної точки в природній системі координат

Складемо основне рівняння динаміки $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ та спроектуємо його на природні осі:

$$\left. \begin{aligned} ma_n &= \sum F_{in} + N, \\ ma_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ ma_b &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\}$$

Оскільки $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$, $a_b = 0$, то отримаємо диференціальні рівняння руху:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned} \right\}$$

Тут сила $\vec{T}$ – сила тертя. Якщо лінія, якою рухається точка, гладка, то $T = 0$ і тоді друге рівняння міститиме лише одну невідому – координату s :

$$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}.$$

Вирішивши це рівняння, отримаємо закон руху точки, а значить, за необхідності, і швидкість та прискорення. Перше та третє рівняння дозволять знайти реакції $\vec{N}$ та $\vec{B}$.

Приклад 1.6

Лижник спускається циліндричною поверхнею радіуса r . Визначимо його рух, нехтуючи опору руху (рис. 1.21).

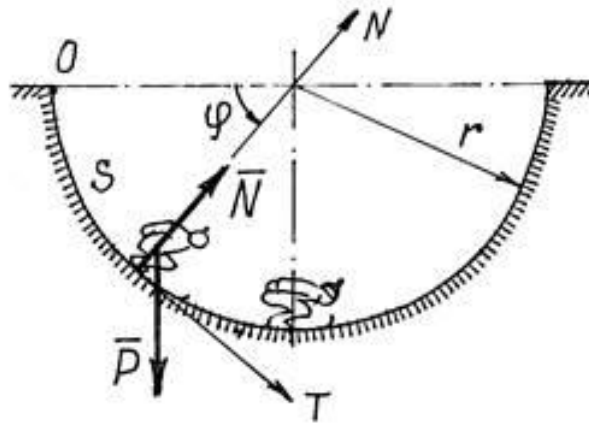


Рисунок 1.21 – Розрахункова схема до прикладу 1.6

Схема розв'язання задачі та сама, що й при координатному способі (приклад 5). Відмінність лише у виборі осей. Тут осі N і T рухаються разом із лижником. Так як траєкторія – плоска лінія, то вісь B , спрямовану по бінормалі, показувати не потрібно (проекції на вісь B сил, що діють на лижника, дорівнюватимуть нулю).

Диференціальні рівняння отримаємо такі:

$$\frac{P}{g} \ddot{s} = P \cos \varphi, \quad \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi.$$

Перше рівняння вийшло нелінійним: $\ddot{s} = g \cos \varphi$.

Оскільки $s = r \cdot \varphi$, його можна переписати так: $\ddot{\varphi} - \frac{g}{r} \cos \varphi = 0$.

Таке рівняння можна один раз проінтегрувати. Запишемо

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{d\varphi}.$$

Тоді у диференціальному рівнянні змінні поділяться:

$$d\varphi^2 = 2 \frac{g}{r} \cdot \cos \varphi + C_1.$$

Інтегрування дає рішення: $\varphi^2 = 2 \frac{g}{r} \cdot \sin \varphi + C_1$

Так як при $t = 0$: $\varphi = 0$ і $\dot{\varphi}_0 = 0$, то $C_1 = 0$ і

$$\varphi = \sqrt{2 \frac{g}{r} \cdot \sin \varphi}, \text{ а } \varphi = \sqrt{2 \frac{g}{r} \cdot \sin \varphi}$$

На жаль, у елементарних функціях другий інтеграл знайти неможливо. Але й одержане рішення дозволяє зробити деякі висновки. Можна знайти швидкість лижника в будь-якому положенні як функцію кута φ . Так у нижньому положенні, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $v = \dot{s} = \sqrt{2g \cdot r}$. А з

рівняння $\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = N - P \sin \varphi$ можна визначити тиск:

$$N = P + \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = P + \frac{P}{g} \cdot \frac{2g \cdot r}{r} = 3P.$$

Тобто тиск на лижника в нижньому положенні дорівнює його триразовій вазі.

Контрольні питання

- 1.1 Сформулюйте основні закони механіки.
- 1.2 Яке рівняння називається основним рівнянням динаміки?
- 1.3 Яка міра інертності твердих тіл під час поступального руху?
- 1.4 Чи залежить вага тіла від місцезнаходження тіла Землі?
- 1.5 Яку систему відліку називають інерційною?
- 1.6 До якого тіла прикладена сила інерції матеріальної точки та які її модуль та напрямок?
- 1.7 Поясніть різницю між поняттями «інертність» та «сила інерції»?
- 1.8 До яких тіл докладена сила інерції, як спрямована та за якою формулою може бути розрахована?
- 1.9 У чому полягає принцип кінетостатики?
- 1.10 Які модулі та напрямки дотичної та нормальної сил інерції матеріальної точки?
- 1.11 Що називають масою тіла? Назвіть одиницю виміру маси в системі СІ?
- 1.12 Що є мірою інертності тіла?
- 1.13 Запишіть основний закон динаміки у векторній та диференціальній формі?
- 1.14 На матеріальну точку діє постійна сила. Як рухається точка?
- 1.15 Яке прискорення отримає точка, якщо на неї діє сила, яка дорівнює подвоєній силі тяжіння?

1.16 За якого руху матеріальної точки дорівнює нулю її дотична сила інерції і за якого – нормальна?

1.17 За якими формулами обчислюються модулі обертальної та відцентрової сил інерції точки, що належить твердому тілу, що обертається навколо нерухомої осі?

1.18 Як формулюється основний закон динаміки точки?

1.19 Наведіть формулювання закону незалежності дії сил.

1.20 Запишіть диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній та координатній формі.

1.21 Сформулюйте сутність першої та другої основних завдань динаміки точки.

1.22 Наведіть умови, з яких визначаються постійні інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

1.23 Які рівняння динаміки називаються природними рівняннями руху матеріальної точки?

1.24 Які два основні завдання динаміки точки, що вирішуються за допомогою диференціальних рухів матеріальної точки?

Тестові завдання до теми 1

1. Що вивчає динаміка?

1. Механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла з врахуванням сил, що на них діють.

2. Загальні поняття о силах, а також умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією цих сил.

3. Геометричні властивості руху тіл без врахування їх інертності та діючих на них сил.

4. Механічний рух матеріальної точки, системи матеріальних точок та абсолютно твердого тіла без врахування сил, що на них діють.

2. Галілеєм встановлено, що поблизу Земної поверхні при вільному падіння усі тіла мають:

1. Однакове прискорення.
2. Прискорення, що залежить від маси тіла.
3. Прискорення, що залежить від форми тіла.
4. Прискорення, що залежить від діючих сил.

3. В основу класичної динаміки покладено:

1. Закони Ісака Ньютона.
2. Принцип відносності Ейнштейна.
3. Міркування, що Земля стоїть на черепахах та чотирьох слонах.
4. Основні положення корпускулярно-хвильової теорії.

4. Масою матеріальної точки називається...

1. Фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.
2. Кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл.
3. Векторна величина, яка є мірою інертних властивостей.
4. Величина, яка залежить від прискорення вільного падіння.

5. Сформулюйте другу задачу динаміки матеріальної точки:

1. Згідно заданим силам, які діють на матеріальну точку і початковим умовам руху визначити закон її руху.
2. По заданій масі матеріальної точки та закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку або рівнодійну силу.
3. Визначити закон руху матеріальної точки, якщо відома її маса.
4. Згідно заданого закону руху матеріальної точки визначити її масу.

6. Сформулюйте першу задачу динаміки матеріальної точки:

1. По заданій масі матеріальної точки та закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку.
2. По заданому закону руху матеріальної точки визначити її масу.
3. Визначити закон руху матеріальної точки згідно заданих сил.
4. По заданій масі та діючим силам визначити початкові умови.

7. Перший закон Ньютона формулюється наступним чином:

1. Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.
2. Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямовано вздовж вектора сили.
3. Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.
4. Ізольована матеріальна точка рухається рівномірно до тих пір, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

8. Другий закон Ньютона формулюється наступним чином:

1. Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване вздовж вектора сили.
2. Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

3. Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла.

4. Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване протилежно вектору сили.

9. Третій закон Ньютона формулюється наступним чином:

1. Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидії другого тіла;

2. Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

3. Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване протилежно вектору сили.

4. Матеріальна точка рухається рівномірно до тих пір, поки прикладені сили не примусять їй змінити цей стан.

10. Четвертий закон Ньютона формулюється наступним чином:

1. Прискорення яке отримує матеріальна точка від дії системи сил дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

2. Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямом протидія другого тіла.

3. Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване вздовж вектора сили.

4. Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

11. В системі одиниць СІ за одиницю довжини прийнято:

1. [м]
2. [см]
3. [мм]
4. [км]

12. В системі одиниць СІ за одиницю часу прийнято:

1. [с]
2. [год.]
3. [хв.]
4. [рік]

13. В системі одиниць СІ за одиницю вимірювання маси прийнято:

1. [кг]
2. [г]
3. [т]

4. [мг]

14. Дайте визначення сили:

1. Сила – це векторно-кількісна міра фізико-механічної дії на матеріальну точку з боку інших тіл.
2. Сила – це фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.
3. Сила – це скалярна величина, яка характеризує міру механічної взаємодії тіл.
4. Сила – це величина, яка дорівнює добутку маси тіла на прискорення.

15. Внутрішніми називають сили:

1. Взаємодії між матеріальними точками системи.
2. Дії матеріальних точок системи на матеріальні точки, що не входять в систему.
3. Дії матеріальних точок, що не входять в систему на матеріальні точки системи.
4. Взаємодії матеріальних точок, що не входять в систему.

16. Зовнішніми називають сили:

1. Дії матеріальних точок, що не входять в систему на матеріальні точки системи.
2. Взаємодії між матеріальними точками системи.
3. Дії матеріальних точок системи на матеріальні точки, що не входять в систему.
4. Взаємодії матеріальних точок, що не входять в систему.

17. Ізольована матеріальна точка це...

1. Нескінченно мала ділянка, що не проводить електричний струм;
2. Точка, на яку не діють інші матеріальні точки;
3. Матеріальна точка, що перебуває в замкнутому просторі;
4. Точковий заряд, оточений ізолюючою матерією.

18. Траєкторія матеріальної точки, кинутої під кутом до горизонту, являє собою:

1. Параболу з горизонтальною віссю симетрії;
2. Параболу з вертикальною віссю симетрії;
3. Гіперболу з вертикальною віссю симетрії;
4. Усічений конус.

19. Основне рівняння динаміки (другий закон Ньютона) виражається рівністю:

1. $\sum F_i = 0$;
2. $F = \sigma \cdot S$;

$$3. F^{in} = -m \cdot a;$$

$$4. F = m \cdot a.$$

20. Коли відстань між двома точками тіла залишається незмінною її називають:

1. Абсолютно твердим тілом;
2. Матеріальною точкою;
3. Міцним тілом;
4. Матеріальним тілом.

21. Доки прикладені сили не виведуть будь-яку ізольовану матеріальну точку зі стану інерції, вона рухається...

1. Спочиває або рухається рівномірно прямолінійно;
2. Рухається рівноприскорено;
3. Перебуває в стані тиші;
4. Рухається за інерцією.

22. Матеріальна точка - це...

1. Фізичне тіло, на яке не діють інші тіла;
2. Умовно прийняте тіло, розмірами якого можна знехтувати, порівняно з відстанню, на якій воно знаходиться;
3. Фізичне тіло, яке не піддається деформації;
4. Умовно прийняте тіло, яке не піддається деформації.

23. Опір, що виникає під час руху одного шорсткого тіла по поверхні іншого, це:

1. Ковзання;
2. Тертя;
3. Кочення;
4. Зіткнення.

24. Мірою інертності тіла слугує:

1. Маса тіла;
2. Швидкість;
3. Об'єм;
4. Прискорення.

25. За третім законом Ньютона сили взаємодії двох тіл:

1. Рівні за величиною і спрямовані по одній прямій у протилежні сторони;
2. Рівні за величиною і спрямовані в один бік по одній прямій;
3. Різні за величиною і спрямовані в протилежні сторони по одній прямій;
4. Рівні за величиною і спрямовані під прямим кутом одна до одної.

ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

План

- 2.1 Основна задача динаміки
- 2.2 Рух матеріальної точки під дією постійних сил
- 2.3 Рух матеріальної точки під дією змінних сил
- 2.4 Рух під дією сили, що залежить від швидкості
- 2.5 Рух під дією сили залежної від часу
- 2.6 Рух під дією сили, що залежить від положення

2.1 Основна задача динаміки

Ключовим положенням, на якому будується вся класична динаміка, є основний закон динаміки Ньютона [3, 5]: Равнодіюча $\vec{R}$ всіх сил, прикладених до матеріальної точки, прямо пропорційна її лінійному прискоренню $\vec{a}$, причому в якості коефіцієнта пропорційності виступає маса матеріальної точки m :

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}, \quad (2.1)$$

Ця векторна рівність справедлива лише в інерційних системах відліку, тобто в системах відліку, пов'язаних з тілами, що рухаються поступово, причому точки цих тіл повинні рухатися прямолінійно з постійною швидкістю. При вирішенні більшості технічних задач інерційною можна вважати систему відліку, пов'язану із Землею.

У випадку руху матеріальної точки вектори $\vec{R}$ і $\vec{a}$ можуть бути представлені у вигляді сум їх складових.

На матеріальну точку діє система сил, що сходиться. Рівнодійна такої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил, доданих до тіла:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i,$$

причому сили $\vec{F}_i$ можуть бути як постійними, так і залежати від часу, положення точки, її швидкості або від кількох із названих величин.

Вектор повного прискорення точки при її простому русі зручно подати у вигляді геометричної суми дотичного та нормального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Якщо ж точка бере участь у складному русі, то її прискорення визначається за теоремою Коріоліса:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{від}} + \vec{a}_{\text{кор}},$$

де $\vec{a}_{\text{пер}}$, $\vec{a}_{\text{від}}$, $\vec{a}_{\text{кор}}$ – переносне, відносне та коріолісове прискорення.

Всі ці прискорення, в свою чергу, залежать як від характеру руху точки, так і від форми її траєкторії. Вони виражаються через координати та їх похідні за часом першого та другого порядку.

Таким чином, динамічні рівняння руху матеріальної точки є диференціальними рівняннями другого порядку відносно координат.

На базі рівняння (2.1) можуть вирішуватись дві задачі:

- **Пряма або перша основна задача динаміки точки** : Рух точки , а також її маса відомі , треба знайти силу , яка діє на точку .

- **Обернена або друга задача динаміки точки** : Відомі сили , які діють на точку , її маса , а також початкові умови руху , треба визначити закон руху точки .

При вирішенні першої задачі рекомендується дотримуватись наведеної нижче послідовності дій.

Схема вирішення задачі щодо визначення закону руху матеріальної точки за допомогою основного рівняння динаміки

1 Зображується матеріальна точка з накладеними на неї механічними в'язями.

2 Розставляються вектори активних сил та сил реакцій в'язей, що діють на матеріальну точку.

3 Визначається вид руху матеріальної точки. Обчислюються значення її прискорень. Ненульові складові вектору прискорення зображуються на рисунку. Дотичні прискорення обов'язково мають бути спрямовані у бік збільшення координат.

4 Записується рівняння основного закону динаміки (2.1), до якого підставляються векторні вирази рівнодіючої сили та лінійного прискорення точки.

5 Вводиться система декартових осей координат:

а) якщо точка рухається відомою траєкторією, то одну з осей доцільно спрямувати за швидкістю, другу – до центру кривизни траєкторії, третю – перпендикулярно першим двом;

б) якщо траєкторія матеріальної точки невідома, то осі координат спрямовують так, щоб вони складали відомі або легко визначені кути з усіма векторами сил, прикладених до матеріальної точки;

в) якщо точка бере участь у складному русі, то осі координат, як правило, зручно пов'язати з траєкторією відносного руху, як це описано у пп. а) та б).

6 Векторне рівняння, отримане у п. 4, проектується на вибрані осі.

7 Визначається вид диференціального рівняння руху; перевіряється можливість його аналітичного рішення.

8 Вирішується диференціальне рівняння руху.

Іншими словами, нехай матеріальна точка $M(x, y, z)$ масою m рухається по криволінійній траєкторії з прискоренням $\vec{a}$ під дією деякої змінної сили $\vec{F}$. Проекції цієї сили на осі інерційної системи відліку позначимо через X, Y, Z . Тоді виходячи з 2-го закону Ньютона:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (2.2)$$

Спроектуємо векторну рівність (2.1) на координатні осі, отримаємо:

$$X = m \cdot a_x, \quad Y = m \cdot a_y, \quad Z = m \cdot a_z. \quad (2.3)$$

Як відомо з кінематики проекції прискорення на координатні осі виражається так:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Підставляючи останні вирази в рівняння (2.2), отримаємо:

$$X = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (2.4)$$

Таким чином, отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку, що виражають у координатній формі основну аксіому динаміки.

Рівняння (2.4) в динаміці точки є **основними** і називаються **диференціальними рівняннями руху матеріальної точки**.

Примітка: у разі, коли на матеріальну точку діє не одна сила, а система сил, то під дією X, Y, Z слід розуміти проекції головного вектору цієї системи сил.

Оберненою називається задача динаміки, у якій по заданих силах, що діє на матеріальну точку, її масі й початковим умовам, визначається закон - рівняння її руху.

Зв'язок між цими величинами встановлює *диференціальне рівняння руху точки*:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma F_{ix}.$$

Ця задача має велике практичне значення і є більше складної, чим перша. Тому що сили, що діють на матеріальну точку, у загальному

випадку є змінними величинами, то праві частини диференціальних рівнянь можуть бути функціями часу, положення або швидкості:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \Phi(t, x, \frac{dx}{dt}, m).$$

Вирішити це рівняння можна для кожного конкретного завдання окремо, установивши, який вид, залежно від діючих сил, буде мати його права частина.

Якщо за допомогою математичних прийомів диференціальне рівняння руху точки буде проінтегровано без вказівки границь інтегрування, то в загальному рішенні диференціального рівняння з'являються два постійні інтегрування, тоді: $x = F(t, C_1, C_2)$.

Значення цих постійних визначають згідно початкових умов: значення швидкості й положення точки в початковий момент часу:

$$\begin{aligned} t_0 = 0 : x = x_0, y = y_0, z = z_0; \\ V_x = X_{x0}, V_y = V_{y0}, V_z = V_{z0}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення постійних інтегрування в загальне рішення диференціального рівняння, одержують приватне рішення диференціального рівняння - рівняння руху точки у вигляді:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ці рівняння показують, що під дією однієї й тої ж сили матеріальна точка може робити цілий клас рухів, обумовлених початковими умовами.

Наприклад: під дією тільки сили ваги матеріальна точка може рухатися як по вертикалі, так і по параболі, причому траєкторія буде залежати від початкових умов.

Аналогічні залежності можна одержати, якщо при інтегруванні диференціальних рівнянь відразу вказати границі інтегрування. Тоді, вирішуючи певні інтегралі, відразу виходять приватні рішення (2.5) без постійні інтегрування.

Рішення оберненої задачі динаміки шляхом інтегрування відповідних диференціальних рівнянь зводиться до наступних операцій.

Алгоритм рішення оберненої задачі:

1. Вибрати систему координат і зобразити тіло, що рухається. Як правило, початок відліку сполучають із початковим положенням точки або

в положенні статичної рівноваги, якщо таке є. Якщо рух прямолінійний, проводиться одна вісь (Ox), плоский – осі координат Oxy , у просторі – $Oxyz$. Тіло зображується в довільному положенні, але так щоб:

$$x, y, z > 0;$$

$$V_x, V_y, V_z > 0.$$

2. Записати початкові умови руху точки:

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = x_0, V_x = V_{x0}, \\ y = y_0, V_y = V_{y0}. \end{cases}$$

3. Зобразити на схемі активні сили, реакції в'язей, прикладені до матеріальної точки.

4. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки.

5. Вирішити систему диференціальних рівнянь руху.

6. Використовуючи початкові умови, визначити постійні інтегрування.

7. Підставивши значення постійні інтегрування в загальне рішення рівняння, одержати шуканий закон руху.

Процес рішення основного завдання динаміки й інтегрування диференціальних рівнянь розберемо для випадків дії постійної й змінної сил.

2.2 Рух матеріальної точки під дією постійних сил

Розглянемо випадок прямолінійного руху тіла (рис. 2.1), коли діюча сила має постійний напрямок, а швидкість точки в початковий момент часу дорівнює нулю або спрямована уздовж сили. Зневажаючи розмірами тіла, будемо його вважати матеріальною точкою.

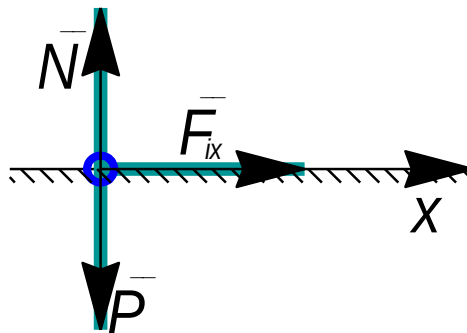


Рисунок 2.1 – Прямолінійний рух тіла

Направимо вісь Ox уздовж траєкторії точки й складемо диференціальне рівняння його руху уздовж осі Ox :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma F_{ix} \text{ або } m \cdot \frac{dV_x}{dt} = \Sigma F_{ix}, \quad (2.6)$$

Вирішуючи ці рівняння, знайдемо залежності швидкості V_x або координати x від часу t .

Якщо при рішенні задачі треба шукати залежності не від часу t , а від координати x , то рівняння перетвориться до змінного x :

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_x \cdot \frac{dV_x}{dx},$$

тоді одержимо:

$$m \cdot V_x \cdot \frac{dV_x}{dx} = \Sigma F_{ix}, \quad (2.7)$$

При інтегруванні диференціальних рівнянь (2.6) і (2.7) у рішення входять постійні інтегрування C_1 й C_2 . Для їхнього визначення використаються початкові умови.

Приклад 2.1

У результаті отриманого поштовху цегла сковзає вниз по лінії конвеєра, розташованого під кутом $\alpha = 30^\circ$ до обрію, з початковою швидкістю $V_{0x} = 2$ м/с.

Визначити шлях S , пройдений цеглою за проміжок $\tau = 2$ с, якщо $f = 0,4$.

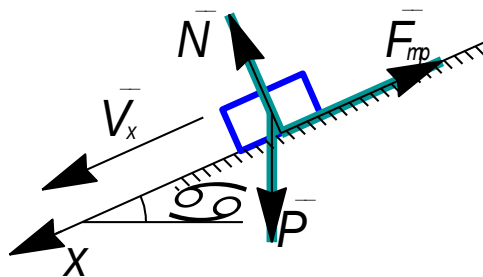


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема до прикладу 2.1

Розв'язання

1. *Вибираємо систему координат.* Направимо вісь Ox уздовж траєкторії.

2. *Записуємо початкові умови руху точки:*

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = 0; \\ V = \dot{x} = V_0 = 2 \text{ м/с}. \end{cases}$$

3. *Зображуємо активні сили:* сила ваги $\bar{P}$, *реакції в'язей:* нормальна реакція $\bar{N}$, сила тертя $\bar{F}_{\text{тер}}$.

4. *Складаємо диференціальне рівняння руху* матеріальної точки в проекції на вісь x :

$$m \cdot \ddot{x} = \Sigma F_{ix}: m \cdot \ddot{x} = P \cdot \sin \alpha - F_{\text{тер}}.$$

де: $F_{\text{тер}} = f \cdot N = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha,$

тоді $m \cdot \ddot{x} = m \cdot g \cdot \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$

5. *Вирішуємо диференціальне рівняння з змінними, що розділяються:*

$$\ddot{x} = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha),$$

робимо заміну: $a = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$

$$a = 10 \cdot (\sin 30^\circ - 0,4 \cdot \cos 30^\circ) = 1,54 \text{ м/с}^2,$$

тоді: $\ddot{x} = a$, але тому що:

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dt}, \text{ то } \frac{dV}{dt} = a, \quad (2.8)$$

Розділяємо змінні й інтегруємо диференціальне рівняння (2.8):

$$dV = a \cdot dt \Rightarrow \int dV = a \cdot \int dt \Rightarrow V = a \cdot t + C_1, \quad (2.9)$$

Тому що:

$$V = \frac{dx}{dt}, \text{ те: } \frac{dx}{dt} = a \cdot t + C_1, \quad (2.10)$$

Аналогічно розділяємо змінні й інтегруємо рівняння (2.10):

$$dx = a \cdot t \cdot dt + C_1 \cdot dt \Rightarrow \int dx = a \cdot \int t \cdot dt + C_1 \cdot \int dt,$$

звідки:

$$x = C_1 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 + C_2, \quad (2.11)$$

6. *Визначаємо постійні інтегрування:* при $t = 0$ маємо $x = x_0$, $\dot{x} = V_0$.

Підставляючи початкові умови в (2.9) одержимо: $C_1 = V_0$.

Підставляючи початкові умови в (2.11) визначимо постійну C_2 :

$$C_2 = x_0.$$

7. Підставляємо значення постійні інтегрування в (2.9) і (2.11):
закон зміни швидкості:

$$V = a \cdot t + V_0, \quad (2.12)$$

$$V = 1,54 \cdot 2 + 2 = 5,08 \text{ м/с};$$

закон руху:

$$x = x_0 + V_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad (2.13)$$

$$x = 2 \cdot 2 = \frac{1,54}{2} \cdot 2^2 = 7,08 \text{ м.}$$

Особливий інтерес для практики представляє розгляд руху матеріальної точки в поле сил ваги Землі. Спочатку розглянемо рух без обліку опору середовища.

Приклад 2.2

Снаряд випущений зі стовбура знаряддя з початковою швидкістю V_0 під кутом α до обрію. Зневажаючи опором повітря, визначити закон руху снаряда.

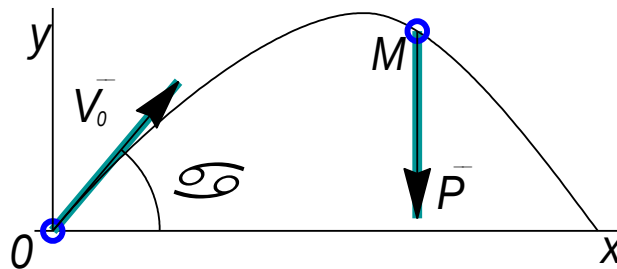


Рисунок 2.3 - Розрахункова схема до прикладу 2.2

Розв'язання

1. Вибираємо систему координат xOy .
2. Записуємо початкові умови $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0; \\ V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha, & V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha. \end{cases}$$
3. Зображуємо тіло й діючі сили.
- 4, 5. Складаємо й вирішуємо диференціальні рівняння руху:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = C_1; \\ V_y = -gt + C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 \cdot t + C_3; \\ y = C_2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + C_4. \end{cases}$$

6. Визначаємо постійні інтегрування, підставляючи початкові умови:

$$C_1 = V_0 \cdot \cos \alpha, C_2 = V_0 \cdot \sin \alpha, C_3 = 0, C_4 = 0.$$

7. Підставляємо значення постійні інтегрування:

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cdot \cos \alpha; \\ V_y = V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t. \end{cases} \quad \begin{cases} x = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha; \\ y = V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2. \end{cases}$$

Рівняння показують, що:

- проекція швидкості на горизонтальну вісь постійна й горизонтальне переміщення відбувається за законом рівномірного руху зі швидкістю $V_x = V_0 \cdot \cos \alpha$, тобто по інерції;

- вертикальний рух тіла є рівноприскореним: при підйомі - уповільнене, при спуску - прискорене.

У випадку, якщо $\bar{V}_0 = 0$ одержимо: $|V_y| = gt$, $|y| = \frac{gt^2}{2}$ - це закони вільного падіння тіла, уперше були встановлені експериментально Галілеєм:

1. Швидкість вільного падаючого тіла пропорційна часу падіння;
2. Шляхи, прохідні тілом, пропорційні квадрату часу падіння.

2.3 Рух матеріальної точки під дією змінних сил

Крім постійних сил на матеріальну точку можуть діяти *змінні* сили, які можна розділити на наступні групи:

а) сили, що залежать від часу (періодично, що змінюються, сили, що викликають коливання точки);

б) сили, що залежать від положення точки (сили притягання й відштовхування, сили пружності).

в) сили, що залежать від швидкості точки (сили опору середовища).

2.4 Рух під дією сили, що залежить від швидкості

Розглянемо рух матеріальної точки в полі сили тяжіння Землі з урахуванням сили опору середовища, яку приймемо пропорційної швидкості тіла:

$$R = \frac{1}{2} k \cdot \rho \cdot f \cdot V^2, \quad (2.14)$$

де k - коефіцієнт опору парусності, залежить від форми тіла;

ρ - щільність повітря, кг/м³;

f - площа «міделевого» перерізу, м²; (Міделевий переріз (мідель) – найбільший за площею поперечний переріз подовженого тіла з плавними криволінійними обводами площею, перпендикулярною до напрямку руху)

$$\text{або:} \quad R = \mu \cdot V,$$

μ - коефіцієнт пропорційності.

Приклад 2.3

Снаряд випущений зі стовбура знаряддя з початковою швидкістю V_0 під кутом α до обрію. З огляду на опір повітря, визначити закон руху снаряда.

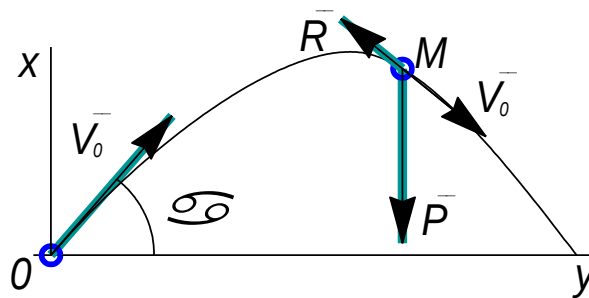


Рисунок 2.4 - Розрахункова схема до прикладу 2.3

Розв'язання

1. Вибираємо систему координат xOy .
2. Записуємо початкові умови $t_0 = 0$ $\begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 0; \\ V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha, V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha. \end{cases}$
3. Зображуємо тіло й діючі сили: $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{R} = -\mu\bar{V}$.
4. Складаємо диференціальні рівняння руху:

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = -\mu V_x; \\ m \frac{dV_y}{dt} = m \cdot g - \mu V_y. \end{cases}$$

5, 6, 7. Вирішуємо диференціальні рівняння: ділимо обидва рівняння на m й робимо заміну $\beta = \frac{\mu}{m}$, одержимо:

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = -\beta \cdot V_x; \\ \frac{dV_y}{dt} = g - \beta \cdot V_y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_x}{V_x} = -\beta \cdot dt; \\ \frac{dV_y}{g - \beta \cdot V_y} = dt. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln |V_x| = -\beta \cdot t + C_1; \\ \frac{1}{\beta} \ln |g - \beta \cdot V_y| = t + C_2. \end{cases}$$

Визначаємо постійні C_1 й C_2 :

$$C_1 = \ln |V_{0x}|; \quad C_2 = \frac{1}{\beta} \ln |g - \beta V_y|.$$

Одержимо:

$$\begin{cases} \ln |V_x| = -\beta \cdot t + \ln |V_{0x}|; \\ \frac{1}{\beta} \ln |g - \beta \cdot V_y| = t + \frac{1}{\beta} \ln |g - \beta V_{0y}|. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln \left| \frac{V_x}{V_{0x}} \right| = -\beta \cdot t; \\ \ln \left| \frac{g - \beta \cdot V_y}{g - \beta V_{0y}} \right| = \beta t. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = V_{0x} \cdot e^{-\beta \cdot t}; \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{\beta} + (V_{0y} - \frac{g}{\beta}) \cdot e^{-\beta \cdot t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\beta} V_{0x} \cdot e^{-\beta \cdot t} + C_3; \\ y = \frac{g}{\beta} t - \frac{1}{\beta} (V_{0y} - \frac{g}{\beta}) \cdot e^{-\beta \cdot t} + C_4. \end{cases}$$

визначаємо постійні C_3 й C_4 : $C_3 = \frac{1}{\beta} V_{0x}$; $C_4 = \frac{1}{\beta} (V_{0y} - \frac{g}{\beta})$,

одержимо:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\beta} V_{0x} \cdot e^{-\beta \cdot t} + \frac{1}{\beta} V_{0x}; \\ y = \frac{g}{\beta} t - \frac{1}{\beta} (V_{0y} - \frac{g}{\beta}) \cdot e^{-\beta \cdot t} + \frac{1}{\beta} (V_{0y} - \frac{g}{\beta}). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\beta} V_{0x} (1 - e^{-\beta \cdot t}); \\ y = \frac{1}{\beta} \cdot (1 - e^{-\beta \cdot t}) \cdot (\frac{g}{\beta} - V_{0y}) + \frac{g \cdot t}{\beta}. \end{cases}$$

Приклад 2.4

При вимірюванні глибини при опусканні вантажу зі швидкістю V_0 трос обірвався й вантаж досяг дна через T с. Визначити шлях H , що пройшов вантаж до дна, якщо проекція на вісь x опору води дорівнює $R_x = m \cdot k \cdot V_x$. Силоміць виштовхування вантажу з води зневажити.

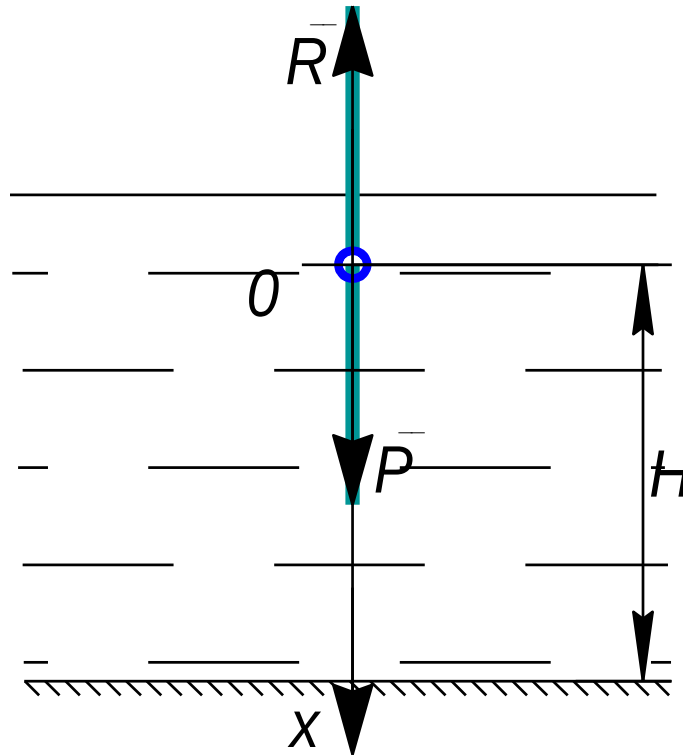


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема до прикладу 2.4

Розв'язання

Проводимо вісь Ox , записуємо початкові умови:

$$t = 0 : x = 0, V_x = V_0.$$

Складаємо й вирішуємо диференціальні рівняння руху вантажу:

$$m \cdot \ddot{x} = P - R_x \Rightarrow m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - m \cdot k \cdot V_x \Rightarrow \ddot{x} = g - k \cdot V_x.$$

$$\frac{dV_x}{dt} = g - k \cdot V_x \Rightarrow \frac{dV_x}{g - k \cdot V_x} = dt \Rightarrow \int \frac{dV_x}{g - k \cdot V_x} = \int dt \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln |g - k \cdot V_x| = t + C_1.$$

Визначаємо постійну інтегрування C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{k} \cdot \ln |g - k \cdot V_0|,$$

тоді:

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln |g - k \cdot V_x| = t + -\frac{1}{k} \cdot \ln |g - k \cdot V_0| \Rightarrow -\frac{1}{k} \cdot \ln \frac{|g - k \cdot V_x|}{|g - k \cdot V_0|} = t \Rightarrow$$

$$e^{k \cdot t} = \frac{g - k \cdot V_0}{g - k \cdot V_x}.$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} - \frac{g - k \cdot V_0}{k} e^{k \cdot t} \Rightarrow \int dx = \frac{g}{k} \cdot \int dt - \frac{g - k \cdot V_0}{k} \cdot \int e^{k \cdot t} \cdot dt \Rightarrow$$

$$x = \frac{g}{k} \cdot t - \frac{g - k \cdot V_0}{k^2} \cdot e^{k \cdot t} + C_2.$$

Визначаємо постійну інтегрування C_2 :

$$C_2 = -\frac{g - k \cdot V_0}{k^2}.$$

$$\text{Одержимо: } x = \frac{g}{k} \cdot t - \frac{g - k \cdot V_0}{k^2} \cdot e^{k \cdot t} + -\frac{g - k \cdot V_0}{k^2}.$$

Для визначення шляху H за час T підставимо $t = T$ й $x = H$:

$$H = \frac{g}{k} \cdot T - \frac{g - k \cdot V_0}{k^2} \cdot e^{k \cdot T} - \frac{g - k \cdot V_0}{k^2}.$$

2.5 Рух під дією сили залежної від часу

Приклад 2.5

Вантаж масою m рухається зі стану спокою під дією горизонтальної сили (рисунок 2.6), проекція якого на вісь Ox дорівнює $F_x = H \cdot \sin(k \cdot t)$.

Знайти закон руху.

Розв'язання

Приймаємо початок відліку на осі Ox , у початковому положенні вантажу: $t_0 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ V_{0x} = 0 \end{cases}$.

Складемо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь Ox :

$$m \cdot \ddot{x} = \Sigma F_{ix}: m \cdot \ddot{x} = F_x \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \Rightarrow dV_x = \frac{F_x}{m} \cdot dt \Rightarrow \int dV_x = \int \frac{F_x}{m} \cdot dt \Rightarrow$$

$$\int dV_x = \int \frac{H \cdot \sin(k \cdot t)}{m} \cdot dt \Rightarrow V_x = -\frac{H}{m \cdot k} \cdot \cos(k \cdot t) + C_1.$$

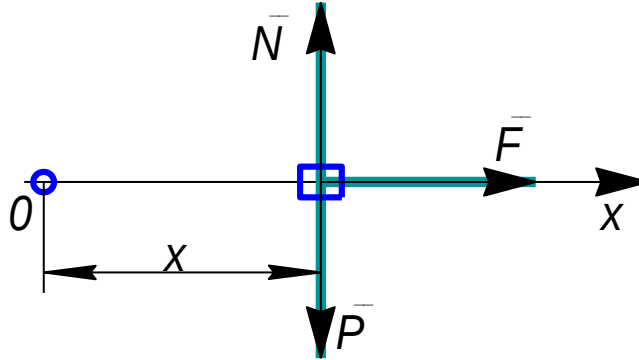


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема до прикладу 2.5

Визначаємо C_1 :

$$C_1 = \frac{H}{m \cdot k} \Rightarrow V_x = \frac{H}{m \cdot k} - \frac{H}{m \cdot k} \cdot \cos(k \cdot t).$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{H}{m \cdot k} - \frac{H}{m \cdot k} \cdot \cos(k \cdot t) \Rightarrow dx = \frac{H}{m \cdot k} \cdot dt - \frac{H}{m \cdot k} \cdot \cos(k \cdot t) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\int dx = \frac{H}{m \cdot k} \cdot \int dt - \frac{H}{m \cdot k} \cdot \int \cos(k \cdot t) \cdot dt \Rightarrow x = \frac{H}{m \cdot k} \cdot t - \frac{H}{m \cdot k^2} \cdot \sin(k \cdot t) + C_2.$$

Визначаємо C_2 :

$$C_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{H}{m \cdot k} \cdot t - \frac{H}{m \cdot k^2} \cdot \sin(k \cdot t) - \text{закон руху.}$$

2.6 Рух під дією сили, що залежить від положення

Приклад 2.6

До тіла масою m прикладена сила відштовхування $S_x = k^2 \cdot m \cdot x$ (рис. 2.7). У початковий момент тіло перебуває в спокої на відстані a від початку відліку. Знайти закон руху тіла, вважаючи його точковою масою.

Розв'язання

Зобразимо тіло на відстані x від початку відліку 0.

$$\text{При } t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = a \\ V_0 = 0 \end{cases}.$$

Диференціальне рівняння руху тіла в проекції на вісь Ox має вигляд:
 $m \cdot \ddot{x} = S_x$: $m \cdot \ddot{x} = k^2 \cdot m \cdot x \Rightarrow \ddot{x} - k^2 \cdot x = 0$ - лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами без правої частини.

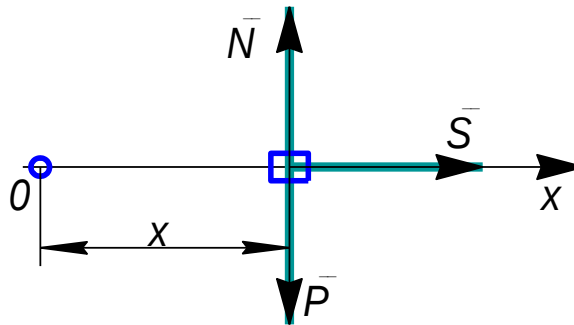


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема до прикладу 2.6

Його характеристичне рівняння:

$$r^2 - k^2 = 0,$$

тоді: $r = \pm k$.

З огляду на, що корінь характеристичного рівняння речовинні, рішення рівняння приймається у вигляді:

$$x = C_1 \cdot e^{k \cdot t} + C_2 \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Визначаємо постійні інтегрування:

$$\dot{x} = C_1 \cdot k \cdot e^{k \cdot t} - C_2 \cdot k \cdot e^{-k \cdot t},$$

тоді: $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \cdot a$,

одержимо: $x = \frac{a}{2} \cdot (e^{k \cdot t} + e^{-k \cdot t})$.

Приклади застосування рівнянь динаміки для розв'язання задач

Приклад 2.7

Два тіла масами m_1 і m_2 , пов'язані невагомою нерозтяжною ниткою, лежать на горизонтальній площині (рис. 2.8).

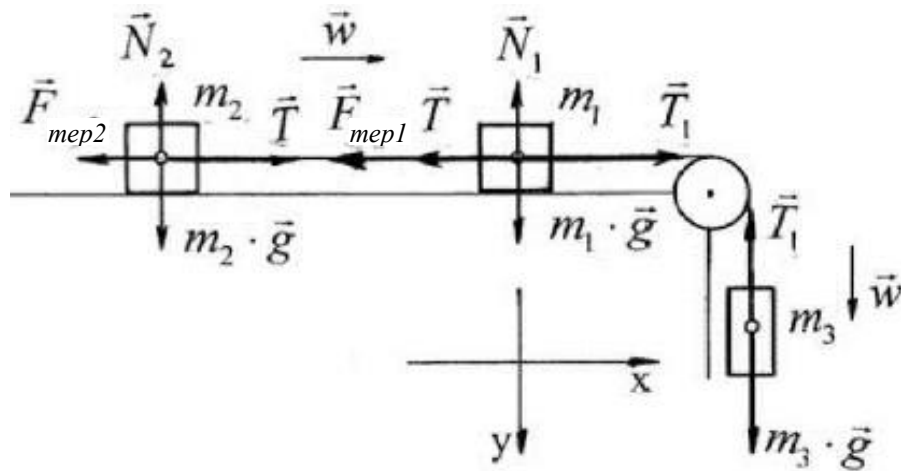


Рисунок 2.8 – Розрахункова схема до прикладу 2.7

Коефіцієнт тертя між цими тілами та поверхнею дорівнює k . Тіло масою m_3 пов'язане з тілом масою m_1 нерозтяжною невагомою ниткою, що перекинута через блок, який може обертатися без тертя. Визначити прискорення руху тел.

Розв'язання

Складаємо рівняння руху для кожного тіла.

$$\text{Тіло масою } m_1: \text{ вісь } Ox: T_1 - T - F_{\text{тер}1} = m_1 \cdot w, \quad (2.15)$$

$$\text{вісь } Oy: m_1 \cdot g = N_1, \quad (2.16)$$

$$\text{Тіло масою } m_2: \text{ вісь } Ox: T - F_{\text{тер}2} = 0, \quad (2.17)$$

$$\text{вісь } Oy: m_2 \cdot g - N_2 = 0, \quad (2.18)$$

$$\text{Тіло масою } m_3: \text{ вісь } Oy: m_3 \cdot g - T_1 = m_3 \cdot g, \quad (2.19)$$

Враховуючи, що $F_{\text{тер}} = k \cdot N$, виражаючи з рівнянь (2.16) та (2.18) сили тертя та підсумовуючи почленно ліві та праві частини рівнянь (2.15), (2.17) та (2.19), можна знайти прискорення системи тіл:

$$w = g \cdot \frac{m_3 - k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Приклад 2.8

Невеликий брусок масою m ковзає вниз по похилій площині, що становить кут α з горизонтом (рис. 2.9).

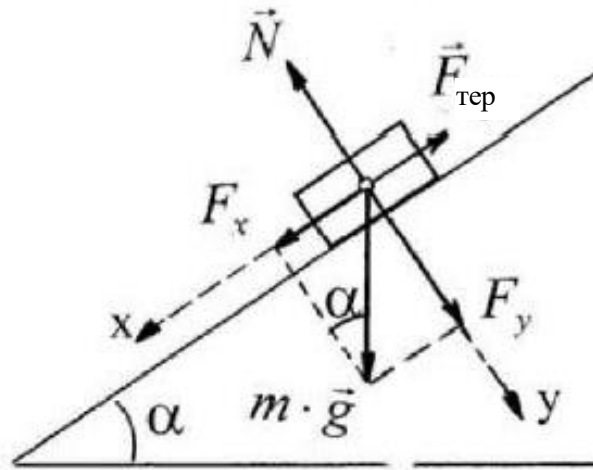


Рисунок 2.9 – Розрахункова схема до прикладу 2.8

Коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює k . Визначити прискорення бруска щодо площини.

Розв'язання

Насамперед треба зобразити на схемі сили, які діють брусок. Це сила тяжіння $m \cdot \vec{g}$, нормальна сила реакції площини $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, спрямування убік, протилежний напрямку руху тіла.

Осі координат x і y зручно пов'язати з похилою площиною та скалярним рівнянням руху записати щодо обраної системи координат:

$$\text{вісь } Ox: F_x - F_{\text{тер}} = m \cdot w \text{ або } m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot n = m \cdot v, \quad (2.20)$$

$$\text{вісь } Oy: m \cdot g \cdot \cos \alpha - N = 0 \text{ або } m \cdot g \cdot \cos \alpha = N \quad (2.21)$$

Підставляємо рівняння (2.21) в (2.20) вираз отримаємо прискорення бруска:

$$w = g \cdot (\sin \alpha - k \cdot \cos \alpha).$$

Приклад 2.9

Невелике тіло масою m без початкової швидкості зісковзує з вершини гладкої сфери радіусом r (рис. 2.10). Визначити швидкість тіла в момент його відриву від площини.

Розв'язання

На тіло діє сила тяжіння $m \cdot \vec{g}$ та нормальна сила реакції $\vec{N}$. Записуючи рівняння руху:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F}, \quad (2.22)$$

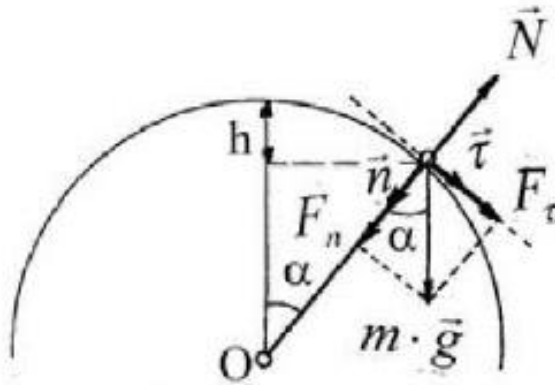


Рисунок 2.10 – Розрахункова схема до прикладу 2.9

у проекціях на рухомі орти нормалі $\vec{n}$ та дотичної $\vec{\tau}$ до траєкторії, отримаємо:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F_t; \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = F_n, \quad (2.23)$$

Для прикладу, що розглядається, рівняння (2.23) перетворимо до виду:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \quad \text{та} \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \cdot \cos \alpha - N, \quad (2.24)$$

Перетворимо перше із рівнянь (2.24) до вигляду, зручного для інтегрування. Скориставшись тим, що:

$$dt = \frac{d\ell}{v} = \frac{r \cdot d\alpha}{v}$$

де $d\ell$ - елементарний шлях тіла за проміжок часу dt .

Перетворимо перше з рівнянь (2.23) у вигляд:

$$v \cdot dv = g \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Проінтегрувавши ліву частину цього виразу в межах від 0 до v , а праву частину - в межах від 0 до α отримаємо:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot r \cdot (1 - \cos \alpha), \quad (2.25)$$

У момент відриву тіла від сфери $N = 0$, тому друге з рівнянь (2.23) набуває вигляду:

$$v^2 = g \cdot r \cdot \cos \alpha, \quad (2.26)$$

де α – значення відповідно до швидкості v і кута α в точці відриву тіла від сфери.

Виключаючи з рівнянь (2.25) та (2.26) можна виразити швидкість тіла в момент відриву:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot r}{3}}.$$

Приклади розв'язання задач

Задача 2.1

При русі автомобіля маси m ділянкою дороги, нахилому під кутом α до горизонту, на нього діє сила тяги, що змінюється за законом $F_T = k \cdot t$, (де k – деяка постійна) (рис. 2.11).

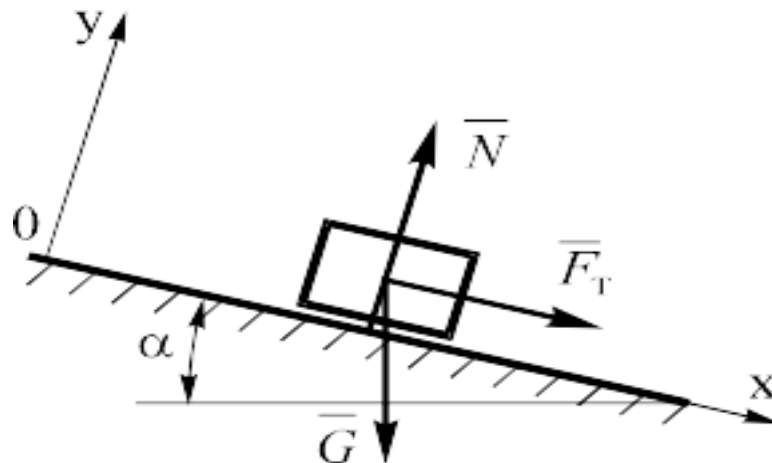


Рисунок 2.11 – Розрахункова схема до задачі 2.1

Нехтуючи тертям, визначити закон зміни пройденого автомобілем шляху, якщо в початковий момент його швидкість v_0 .

Розв'язання

На автомобіль у процесі руху діють сили тяги $\vec{F}_T$, тяжіння $\vec{G}$, реакція опори $\vec{N}$.

Проеціюючи векторну рівність $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ на вісь Ox , отримуємо:

$$m \cdot a_x = G \cdot \sin \alpha + F_T.$$

Підставляючи вирази сил та прискорення, маємо

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin \alpha + kt \quad \text{або} \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g \cdot \sin \alpha + kt.$$

Розділяючи змінні, отримуємо:

$$m \cdot dv = (m \cdot g \cdot \sin \alpha + kt) dt;$$

$$\int_{v_0}^v m \cdot dv = \int_{v_0}^v (m \cdot g \cdot \sin \alpha + kt) dt;$$

$$mv - mv_0 = m \cdot g \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{kt^2}{2};$$

$$v = g \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{kt^2}{2 \cdot m} + v_0.$$

Підставляючи замість v її вираз через x , остаточно визначаємо закон зміни координати x :

$$\frac{dx}{dt} = g \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{kt^2}{2 \cdot m} + v_0;$$

$$dx = \left(g \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{kt^2}{2 \cdot m} + v_0 \right) dt;$$

$$\int_{x_0=0}^x dx = \int_0^t \left(g \cdot t \cdot \sin \alpha + \frac{kt^2}{2 \cdot m} + v_0 \right) dt;$$

$$x = g \cdot \sin \alpha \frac{t^2}{2} + \frac{kt^3}{6 \cdot m} + v_0 \cdot t.$$

Задача 2.2

При розгоні катера маси m сила тяги його гвинтів змінюється за законом $F_T = kt$, а сили опору, що діють на нього, зводяться до рівнодіючої, прямо пропорційної швидкості катера $F_{опору} = \alpha v$ (k та α – деякі постійні). Визначити закон руху катера, вважаючи, що він почався зі стану спокою.

Розв'язання

На катер, крім названих в умові, діють також сила тяжіння $\vec{G}$ та сила, що виштовхує $\vec{F}_{вишт}$ (рис. 2.12).

В результаті проєціювання векторної рівності $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ на вісь Ox , приходимо до рівняння:

$$ma_x = F_T - F_{\text{опору}}.$$

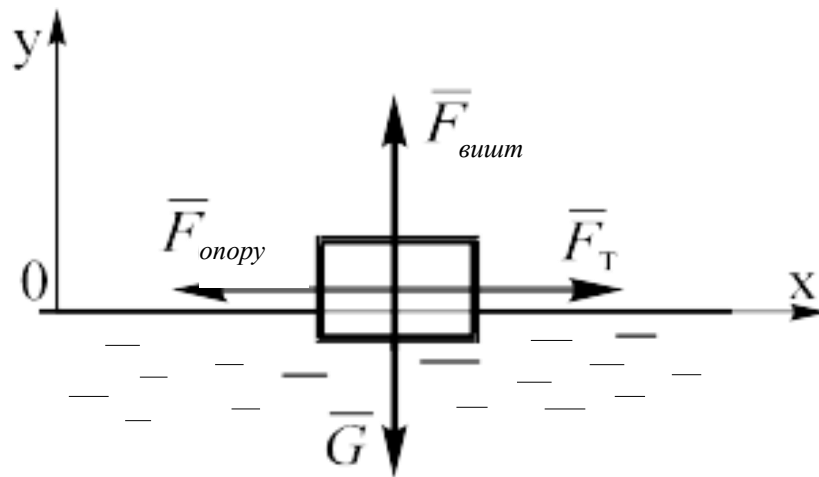


Рисунок 2.12 – Розрахункова схема до задачі 2.2

Йому відповідає диференціальне рівняння другого порядку:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = kt - \alpha \frac{dx}{dt},$$

яке приводиться до вигляду:

$$m \frac{dv}{dt} = kt - \alpha v \quad \text{або} \quad m \frac{dv}{dt} + \alpha v = kt.$$

Зазначене лінійне диференціальне рівняння першого порядку може бути вирішено за допомогою підстановки $v = u \cdot z$.

Тоді

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} z + u \frac{dz}{dt},$$

та відповідно:

$$m \frac{du}{dt} z + mu \frac{dz}{dt} + \alpha u z = kt, \quad (2.27)$$

Для отримання можливості поділу змінних прирівняємо нулю суму другого та третього доданків:

$$mu \frac{dz}{dt} + \alpha u z = 0 \quad \text{або} \quad m \frac{dz}{dt} + \alpha z = 0 \quad (\text{так як } u \neq 0)$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримуємо вираз функції z :

$$\frac{dz}{z} = -\frac{\alpha}{m} dt; \quad \ln z = -\frac{\alpha}{m} t; \quad z = e^{-\frac{\alpha}{m} t}.$$

Підставляючи знайдене значення в (2.15) далі знаходимо

$$m \frac{du}{dt} e^{-\frac{\alpha}{m} t} = kt; \quad du = \frac{k}{m} t e^{\frac{\alpha}{m} t} dt;$$

$$\int du = \int \frac{k}{m} t e^{\frac{\alpha}{m} t} dt; \quad u = \frac{k}{\alpha} t e^{\frac{\alpha}{m} t} - \frac{mk}{\alpha^2} e^{\frac{\alpha}{m} t} + C.$$

Тоді:

$$v = uz = \frac{k}{\alpha} t - \frac{mk}{\alpha^2} + C e^{-\frac{\alpha}{m} t}, \quad (2.28)$$

Постійну C визначимо з початкової умови: $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$

Підставляючи його (2.16), знаходимо:

$$0 = \frac{k}{\alpha} 0 - \frac{mk}{\alpha^2} + C e^{-\frac{\alpha}{m} 0}; \quad C = \frac{mk}{\alpha^2}$$

Отже,

$$v = \frac{k}{\alpha} t - \frac{mk}{\alpha^2} (e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1)$$

Інтегруючи ще раз, отримуємо остаточний результат:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{\alpha} t + \frac{mk}{\alpha^2} (e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1);$$

$$dx = \left(\frac{k}{\alpha} t + \frac{mk}{\alpha^2} (e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1) \right) dt;$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(\frac{k}{\alpha} t + \frac{mk}{\alpha^2} (e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1) \right) dt;$$

$$x = x_0 + \frac{kt^2}{2\alpha} + \frac{m^2 k}{\alpha^3} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}) - \frac{mk}{\alpha^2} t$$

Задача 2.3

Точка, що має масу m , рухається зі стану спокою по колу радіуса R з постійним дотичним a_τ (рис. 2.13). Визначити діючу на точку силу в момент, коли вона пройде по траєкторії відстань $S_1 = R \cdot \sqrt{2}$.

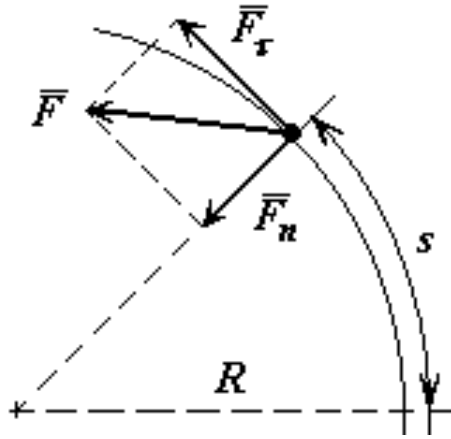


Рисунок 2.13 – Розрахункова схема до задачі 2.3

Розв'язання

Застосовуючи диференціальні рівняння руху точки в проекціях на природні осі, маємо:

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \quad F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}; \quad F_b = 0$$

Оскільки, $F_\tau = \text{const}$

$$\text{то } v_\tau = a_\tau \cdot t; \quad S = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}; \quad F_\tau = m \cdot a_\tau; \quad F_n = m \cdot \frac{(a_\tau t)^2}{R}.$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}.$$

$$S_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}.$$

$$\text{Отже: } t_1^2 = \frac{2 \cdot R\sqrt{2}}{a_\tau}; \quad \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2}.$$

$$\text{Отже: } F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau.$$

$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_\tau$ - діюча на точку сила в момент, коли вона пройде по траєкторії відстань $S_1 = R \cdot \sqrt{2}$

Контрольні питання

- 2.1 Яке основне рівняння динаміки?
- 2.2 Яке основне завдання механіки?
- 2.3 Що є предметом динаміки?
- 2.4 У чому полягає основне завдання динаміки?
- 2.5 Яке питання вирішує динаміка?
- 2.6 Що таке динаміка простими словами?
- 2.7 Хто відкрив основний закон динаміки?
- 2.8 У чому полягає основний закон динаміки для відносного руху?
- 2.9 Алгоритм рішення основної задачі динаміки.
- 2.10 Алгоритм рішення оберненої задачі динаміки.
- 2.11 Коли з'являються й не з'являються постійні інтегрування?
- 2.12 Що таке початкової умови?
- 2.13 Чи впливають початкові умови на рух, траєкторію тіла?
- 2.14 Що таке загальне й приватне рішення диференціального рівняння (ДР)?
- 2.15 У якому випадку ДР вирішуються інтегруванням?
- 2.16 Як визначаються постійні інтегрування?
- 2.17 Які рівняння безпосередньо не вирішуються інтегруванням?
- 2.18 Де використовуються диференціальні рівняння?
- 2.19 Скільки розв'язків має диференціальне рівняння?
- 2.20 Як визначається кількість руху матеріальної точки?
- 2.21 Що розглядає динаміка матеріальної точки?
- 2.22 Чому рівняння називається диференціальним?
- 2.23 Яка користь диференціальних рівнянь?
- 2.24 Яка функція є розв'язком диференціального рівняння?
- 2.25 Що є порядком диференціального рівняння?

Тестові завдання до теми 2

1. Як формулюється основний закон динаміки?

1. Сила дорівнює добутку маси матеріальної точки на її прискорення.
2. Добуток маси точки на її прискорення дорівнює геометричній сумі сил, які діють на точку.
3. Сила, що діє на матеріальну точку, пропорційна її прискоренню.
4. Сила дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

2. Які системи одиниць вимірювання використовують під час розв'язання задач динаміки?

1. СГС;
2. МКС, СГС;

3. СІ, МкГС;

4. МКС.

3. Що є предметом динаміки?

1. Динаміка вивчає рух тіл;
2. Динаміка вивчає рух тіл під дією сил;
3. Динаміка вивчає рух тіл без урахування дії сил;
4. Динаміка вивчає взаємодію матеріальних тіл.

4. Що називається інертністю матеріального тіла?

- 1 Здатність тіла протистояти збільшенню швидкості.
- 2 Здатність тіла рухатися з постійною швидкістю.
- 3 Це відношення сили, що діє на тіло, до прискорення, яке отримує тіло під дією цієї сили.
- 4 Це добуток сили, що діє на тіло, на прискорення, яке отримує тіло під дією цієї сили.

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} :$$

5. Визначте тип рівняння

1. Рівняння зі змінними, що розділяються;
2. Однорідне рівняння першого порядку;
3. Лінійне рівняння першого порядку;
4. Рівняння Бернуллі.

6. Визначте тип рівняння $y' + y - xy^2 = 0 :$

1. Рівняння зі змінними, що розділяються;
2. Однорідне рівняння першого порядку;
3. Лінійне рівняння першого порядку;
4. Рівняння Бернуллі.

7. Визначте тип рівняння $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0 :$

1. Рівняння зі змінними, що розділяються;
2. Однорідне рівняння першого порядку;
3. Лінійне рівняння першого порядку;
4. Рівняння Бернуллі.

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x :$$

8. Визначте тип рівняння

1. Рівняння зі змінними, що розділяються;
2. Однорідне рівняння першого порядку;
3. Лінійне рівняння першого порядку;
4. Рівняння Бернуллі.

9. ДР називається рівняння, що зв'язує між собою незалежну змінну x , шукану функцію y та її ... або диференціали:

1. Інтеграл;
2. Похідні;
3. Значення;
4. Другі похідні.

10. Як записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі?

1. $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k$;
2. $m\vec{r} = \sum \vec{F}_k$;
3. $m \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k$;
4. $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{S}_k$.

11. Як записати диференціальні рівняння руху матеріальної точки в декартових координатах?

1. $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$; $m\ddot{y} = \sum F_{ky}$; $m\ddot{z} = \sum F_{kz}$;
2. $m\dot{x} = \sum F_{kx}$; $m\dot{y} = \sum F_{ky}$; $m\dot{z} = \sum F_{kz}$;
3. $m\dot{x} = \sum F_{kx}$; $m\dot{y} = \sum F_{ky}$; $m\dot{z} = \sum F_{kz}$;
4. $m \frac{dx}{dt} = \sum F_{kt}$; $m \frac{dy}{dt} = \sum F_{kt}$; $m \frac{dz}{dt} = \sum F_{kt}$.

12. Як записати диференціальні рівняння руху матеріальної точки в природних осях?

1. $m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}$; $m \frac{v}{\rho} = \sum F_{kn}$; $ma_b = \sum F_{kb}$;
2. $m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}$; $m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}$; $\sum F_{kb} = 0$;
3. $ma_\tau = \sum F_{k\tau}$; $ma_n = \sum F_{kn}$; $ma_b = \sum F_{kb}$;
4. $m \frac{d^2v}{dt^2} = \sum F_{k\tau}$; $m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}$; $\sum F_{kb} = 0$.

13. Яке перше завдання динаміки?

1. Коли задано закон руху точки, визначають рівнодіяльну силу, що діє на точку.

2. Коли задано сили, що діють на точку, знаходять її рух (переміщення, швидкість, прискорення).

3. Коли за заданими силами, що діють на точку, знаходять її прискорення.

4. Коли за заданим прискоренням знаходять силу, що діє на точку.

14. Яке друге завдання динаміки?

1. Коли за заданим рухом матеріальної точки знаходять силу, що діє на точку.

2. Коли за заданими силами, що діють на матеріальну точку, знаходять закон руху точки (переміщення, швидкість, прискорення)

3. Коли за заданим прискоренням знаходять силу, що діє на точку.

4. Коли за заданими силами, що діють на матеріальну точку, визначають прискорення.

15. Як визначають постійні інтегрування під час розв'язування диференціальних рівнянь руху точки?

1. Постійні інтегрування визначають із початкових умов, коли в початковий момент часу відомі положення точки та її швидкість.

2. Постійні інтегрування визначають із початкових умов, коли в початковий момент часу відомі положення та прискорення точки.

3. Постійні інтегрування визначають із початкових умов, коли в початковий момент часу відомі швидкість і прискорення точки.

4. Постійні інтегрування визначають із початкових умов.

16. Відцентрова сила інерції під час криволінійного руху спрямована:

1. Від миттєвого центру кривизни траєкторії;

2. По дотичній до траєкторії в бік, протилежний прискоренню;

3. По дотичній до траєкторії в бік прискорення;

4. До миттєвого центру кривизни траєкторії.

17. Рівнодіючою називають силу:

1. Еквівалентну даній системі сил;

2. Такою, що врівноважує дану систему сил;

3. яка не порушує рівновагу матеріальної точки;

4. Таку, що викликає рівнозмінний рух матеріальної точки.

18. Тангенціальну силу під час криволінійного руху точки інакше називають:

1. Відцентровою силою;

2. Дотичною силою;

3. Доцентровою силою;

4. Зосередженою силою.

ТЕМА 3. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

План

- 3.1 Динаміка обертального руху твердого тіла відносно точки
- 3.2 Окремі випадки відносного руху
- 3.3 Механічна система. Сили зовнішні й внутрішні
- 3.4 Маса системи. Центр мас
- 3.5 Момент інерції тіла щодо осі
- 3.6 Моменти інерції тіла щодо паралельних осей
- 3.7 Методи визначення моментів інерції тіл, складної конфігурації

3.1 Динаміка обертального руху твердого тіла відносно точки

Два перших закони динаміки й всі отримані на їхній основі рівняння справедливі для руху матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i, \quad (3.1)$$

Часто зустрічаються задачі, у яких вивчається відносний рух точки, що знаходиться в системі відліку, що у свою чергу рухається із прискоренням стосовно «нерухливих» осей. Для цього в праву частину рівняння (3.1) вводяться додатково сили інерції.

Розглянемо рух матеріальної точки (рисунок 3.1) відносно неінерціальної системи відліку $Oxyz$ - відносний рух, що рухається відносно інерціальної системи відліку $Ox_1y_1z_1$ - переносний рух. Тоді рух матеріальної точки щодо системи відліку $Ox_1y_1z_1$ буде абсолютним.

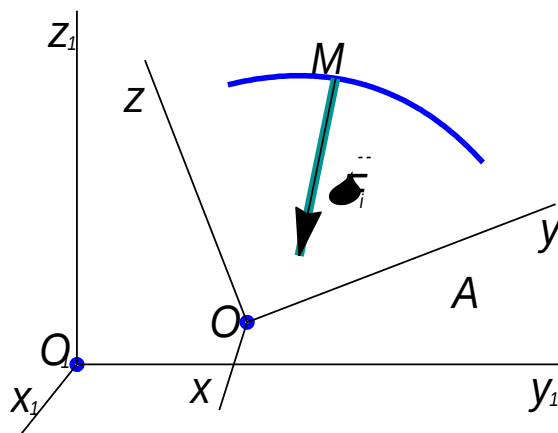


Рисунок 3.1- Рух матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку $Oxyz$

Нехай матеріальна точка M рухається під дією прикладених до неї сил: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$. Вивчимо рух цієї точки стосовно осей $Oxyz$, які рухаються відносно інерційних координат $Ox_1y_1z_1$.

Для абсолютного руху точки M основний закон динаміки має вигляд:

$$m\vec{a}_{ab} = \sum \vec{F}_i, \quad (3.2)$$

З кінематики відомо, що у випадку не поступального переносного руху:

$$\vec{a}_{ab} = \vec{a}_{om} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \quad (3.3)$$

тоді: $\vec{a}_{om} = \vec{a}_{ab} - \vec{a}_{пер} - \vec{a}_{кор}.$

Позначивши $\vec{a}_{om} = \vec{a}$, одержимо:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + (-m\vec{a}_{пер}) + (-m\vec{a}_{кор}), \quad (3.4)$$

Введемо два вектори: $\vec{F}_{пер}^u = -m\vec{a}_{пер};$

$$\vec{F}_{кор}^u = -m\vec{a}_{кор},$$

які назовемо **переносною** та **коріолісовою** силами інерції, тоді одержимо *основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки*:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{пер}^u + \vec{F}_{кор}^u, \quad (3.5)$$

Порівнюючи (3.1) і (3.5) одержимо: *у випадку не поступального переносного руху відносний рух матеріальної точки можна розглядати як абсолютне, якщо до діючим на точку силам додати переносну й коріолісову сили інерції.*

Це порівняння також показує, що в інерціальній системі відліку прискорення матеріальної точки є лише результатом дії на неї сил, тобто взаємодії з іншими матеріальними тілами. У неінерціальній системі прискорення матеріальної точки є як результатом дії на неї сил, так і результатом руху самої системи відліку.

Проектуючи вектори рівнянь (3.5) на осі рухливої системи, одержимо *диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки*:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum \vec{F}_{i\ x} + \vec{F}_{пер\ x}^u + \vec{F}_{кор\ x}^u; \\ m\ddot{y} = \sum \vec{F}_{i\ y} + \vec{F}_{пер\ y}^u + \vec{F}_{кор\ y}^u; \\ m\ddot{z} = \sum \vec{F}_{i\ z} + \vec{F}_{пер\ z}^u + \vec{F}_{кор\ z}^u. \end{cases}$$

Розглянемо тверде тіло як певну систему (рисунок 3.2), що складається з n точок ($m_1, m_2, \dots, m_n$); $\vec{r}_i$ – радіус-вектор i -ої точки, проведений із точки O – центру нерухомої інерціальної системи відліку. Позначимо – $\vec{F}_i$ зовнішня сила, що діє на i -ту точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила дії з боку k -ої точки на i -у.

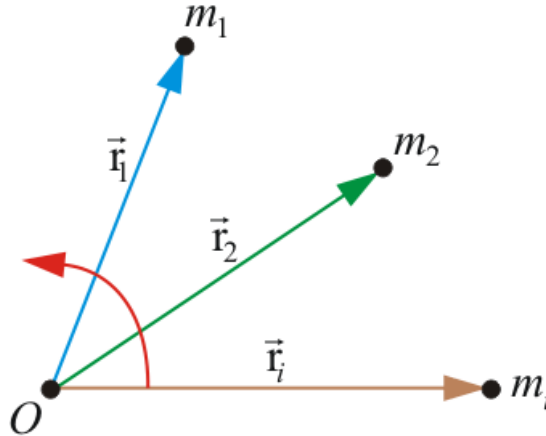


Рисунок 3.2 – Система, що складається з n точок

Запишемо основне рівняння динаміки для точки:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

Помножимо обидві частини векторно на $\vec{r}_i$:

$$\left[\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) \right] = \left[\vec{r}_i \cdot \sum_k \vec{F}_{ik} \right] + [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i].$$

Знак похідної можна винести за знак векторного добутку (і знак суми теж), тоді:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i \cdot (m_i \vec{v}_i)] = \sum_k [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i].$$

Векторний добуток $\vec{r}_i$ точки на її імпульс називається **моментом імпульсу** $\vec{L}_i$ цієї точки відносно точки O .

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot (m_i \vec{v}_i)], \quad (3.6)$$

Ці три вектори утворюють праву трійку векторів, пов'язаних «правилом буравчика» (рис. 3.3).

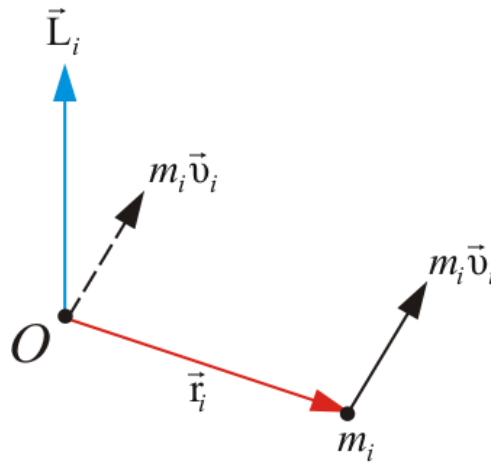
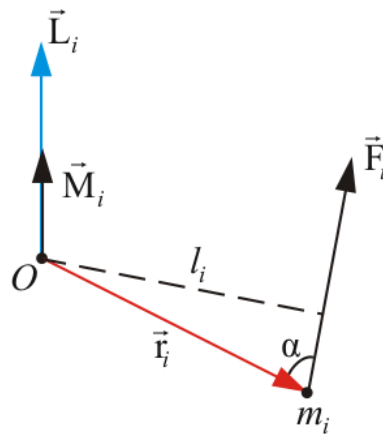


Рисунок 3.3 – Правило буравчика

Векторний добуток $\vec{r}_i$ точки проведеного в точку прикладання сил, на цю силу називається **моментом сили** $\vec{M}_i$:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i], \quad (3.7)$$

Позначимо l_i - плече сили F_i , (рис. 3.4).

Рисунок 3.4 – Плече сили F_i ,

Так як $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ то:

$$|\vec{M}_i| = F_i \cdot r_i \cdot \sin \alpha = F_i \cdot l_i, \quad (3.8)$$

З урахуванням нових позначень:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i, \quad (3.9)$$

Запишемо систему n рівнянь для всіх точок системи і складемо ліві та праві частини рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Тут сума похідних дорівнює похідній суми:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

де $\vec{L}$ - момент імпульсу системи;

M - результуючий момент усіх зовнішніх сил відносно точки O .

Оскільки $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ то $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} = 0$.

Звідси отримаємо **основний закон динаміки обертального руху твердого тіла, що обертається навколо точки.**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{зовн}}, \quad (3.10)$$

Момент імпульсу системи $\vec{L}$ є *основною динамічною характеристикою тіла, що обертається.*

Порівнюючи це рівняння з основним рівнянням динаміки поступального руху $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (див. п.1.2 формула 1.16), ми бачимо їхню зовнішню схожість

Динаміка обертального руху твердого тіла відносно осі

Описаний нами рух твердого тіла відносно нерухомої точки є основним видом руху.

Однак обчислити вектор L - момент імпульсу системи відносно довільної точки не просто: треба знати шість проекцій (три задають положення тіла, три задають положення точки).

Значно простіше знайти момент імпульсу L тіла, що обертається навколо нерухомої осі (z) (рис. 3.5).

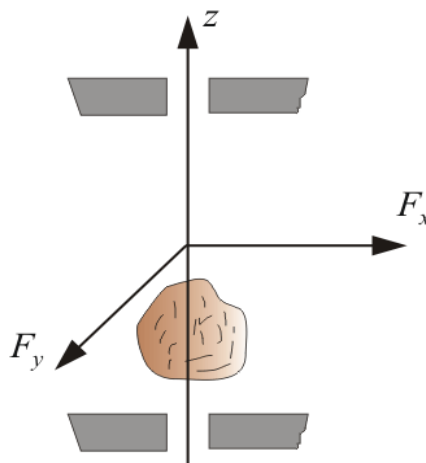


Рисунок 3.5 – Тіло, що обертається навколо нерухомої осі (z)

У цьому разі складові M – моменту зовнішніх сил, спрямовані уздовж x і y , компенсуються моментами сил реакції закріплення.

Обертання навколо осі z відбувається тільки під дією M_z .

Нехай деяке тіло обертається навколо осі z (рис. 3.6).

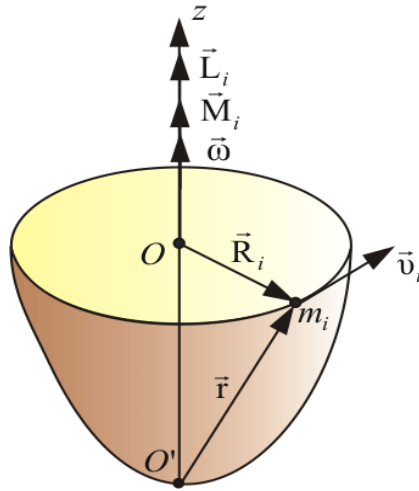


Рисунок 3.6 – Тіло обертається навколо осі z

Отримаємо рівняння динаміки для деякої точки m_i цього тіла, що знаходиться на відстані R_i від осі обертання. При цьому пам'ятаємо, що $\vec{L}_z$ і $\vec{M}_z$ спрямовані завжди вздовж осі обертання z , тому надалі опустимо значок z .

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i \vec{v}] = \vec{M}_i$$

Оскільки $\vec{v}_i$ у всіх точок різні, введемо, вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ причому $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$.

$$\text{Тоді} \quad \frac{d}{dt}(m_i R_i^2 \vec{\omega}) = \vec{M}_i.$$

Оскільки тіло абсолютно тверде, то в процесі обертання m_i і R_i залишаються незмінними. Тоді:

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i.$$

Позначимо I_i - момент інерції точки, що знаходиться на відстані R від осі обертання:

$$I_i = m_i R_i^2, \quad (3.11)$$

Оскільки тіло складається з величезної кількості точок і всі вони перебувають на різних відстанях від осі обертання, то момент інерції тіла дорівнює:

$$I = \int_0^m R^2 dm, \quad (3.12)$$

де R - відстань від осі z до dm .

Як видно, момент інерції I - величина скалярна.

Підсумувавши (3.12) по всіх i -их точках, отримаємо $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{M}$ або

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (3.13)$$

Це основне рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

(Порівняємо: $m\vec{a} = \vec{F}$ - основне рівняння динаміки поступального руху тіла).

$$Id\vec{\omega} = \vec{M}dt; \quad Id\vec{\omega} = d\vec{L}.$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (3.14)$$

де - $\vec{L}$ момент імпульсу тіла, що обертається навколо осі z

(Порівняємо: $\vec{p} = m\vec{v}$ - для поступального руху).

При цьому пам'ятаємо, що $\vec{L}$ й $\vec{M}$ динамічні характеристики обертального руху спрямовані завжди вздовж осі обертання.

Причому $\vec{L}$, визначається напрямком обертання, як і $\vec{\omega}$, а M - залежить від того, прискорюється чи сповільнюється обертання.

3.2 Окремі випадки відносного руху

Розглянемо окремі випадки відносного руху матеріальної точки, що відповідають різним видам переносного руху.

1. Якщо переносний рух рухливих осей поступальний, рівномірний і прямолінійний, то $a_{пер} = 0$, $a_{кор} = 0$, тоді $\vec{F}_{пер}^u = 0$; $\vec{F}_{кор}^u = 0$ і закон відносного руху звичайний:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i, \quad (3.15)$$

2. Якщо переносний рух рухливих осей поступальний, нерівномірний, то $a_{пер} \neq 0$, $a_{кор} = 0$, тому що $\vec{\omega}_{пер} = 0$, тоді $\vec{F}_{пер}^u \neq 0$; $\vec{F}_{кор}^u = 0$ і основне рівняння динаміки відносного руху прийме вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + F_{пер}^u.$$

3. Якщо при будь-якому нерівномірному переносному русі, точка стосовно рухливих осей перебуває в спокої, то для неї $\vec{a} = \vec{a}_{om} = 0$, тому що $\vec{V} = \vec{V}_{om} = 0$, отже $\vec{F}_{кор}^u = 0$, тоді:

$$\sum \vec{F}_i + F_{пер}^u = 0.$$

Принцип відносності класичної механіки

Порівняння рівнянь (3.1) і (3.14) показує, що при рівномірному прямолінійному поступальному русі рівняння (3.14), що визначає відносне прискорення матеріальної точки, не відрізняється від основного рівняння динаміки (3.1), що визначає абсолютне прискорення точки. У цьому випадку з динамічної точки зору відносний рух нічим не відрізняється від абсолютного.

Всі такі рухливі системи відліку є інерціальними й рух матеріальної точки щодо будь-який них їх можна вважати як абсолютний рух. Це показує на незмінність рівнянь динаміки при переході між інерціальними системами відліку.

Вочевидь, що спостереження над відносним рухом матеріальної точки в інерціальній системі відліку не дозволяють установити чи робить ця система рівномірний поступальний прямолінійний рух або перебуває в спокої. Це положення називається *принципом відносності класичної механіки: ніякі механічні явища, що відбуваються в інерціальному середовищі, не можуть виявити її прямолінійного й рівномірного поступального руху.*

Технічні приклади

Приклад 3.1

Дано: m ; $f = 0,15$; $y = 2t^3$; $x_0 = 0,4$ м; $V_0 = 0,8$ м/с.

Визначити: $x = f(t)$ - ?

Розв'язання

1. Вибираємо нерухливу систему відліку Oyz . Зв'язуємо з візком рухливу вісь Ox .

2. Записуємо початкові умови:

$$t = 0 \begin{cases} x_0 = 0,4 \text{ м,} \\ V_{Ox} = 0,8 \text{ м/с.} \end{cases}$$

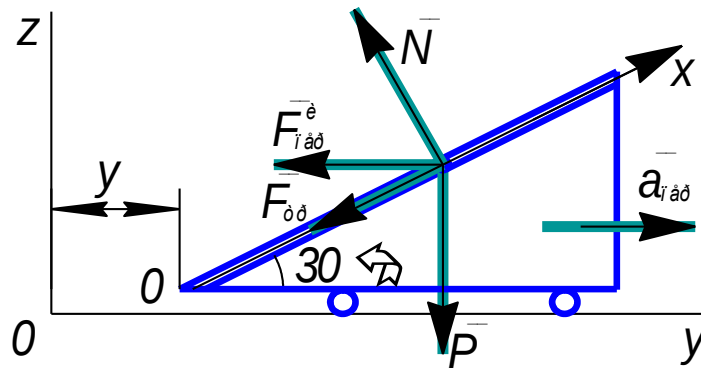


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема до прикладу 3.1

3. Складемо диференціальне рівняння відносного руху точки:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{nep}^u + \vec{F}_{кор}^u,$$

$$\vec{F}_{кор}^u = 0; a_{nep} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(2t^3) = 12t; \vec{F}_{nep}^u = ma_{nep} = 12mt;$$

$$F_{mp} = fN = fmg \cos 30^0; G = mg;$$

тоді: $m\ddot{x} = -fmg \cdot \cos 30^0 - mg \cdot \sin 30^0 - 12mt \cos 30^0,$

або: $\ddot{x} = -fg \cdot \cos 30^0 - g \cdot \sin 30^0 - 12t \cos 30^0.$

4. Вирішуємо диференціальне рівняння.

Позначимо: $a = -fg \cos 30^0 - g \sin 30^0 = -0,15 \cdot 10 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,5 = -6,3,$

$$b = -12 \cos 30^0 = -12 \cdot 0,866 = -10,4,$$

одержимо: $\ddot{x} = a + bt. \quad (1)$

Інтегруємо диференціальне рівняння (1):

$$\frac{dV}{dt} = a + bt, \quad dV = a \cdot dt + bt \cdot dt, \quad \int dV = a \cdot \int dt + b \int t \cdot dt;$$

$$V \Big|_{V_0}^{V_k} = at \Big|_0^t + b \frac{t^2}{2} \Big|_0^t; \quad V_x - V_0 = at + \frac{bt^2}{2}; \quad \frac{dx}{dt} = V_0 + at + \frac{bt^2}{2}.$$

$$dx = atdt + \frac{b}{2}t^2 \cdot dt + V_0 dt; \quad \int_{x_0}^x dx = a \int_0^t tdt + \frac{b}{2} \int_0^t t^2 \cdot dt + V_0 \int_0^t dt;$$

$$x - x_0 = a \frac{t^2}{2} + \frac{b}{6} t^3 + V_0 t; \quad x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{6};$$

$$x = 0,4 + 0,8t - 3,15t^2 - 1,73t^3.$$

Приклад 3.2

Вантаж 1 масою m спускається донизу по бічній грані призми 2, розташованої під кутом α до горизонту. Призма рухається горизонтальною площиною вправо з прискоренням W_e . Визначити прискорення вантажу відносно призми та тиск вантажу на бічну грань призми, якщо коефіцієнт тертя ковзання вантажу об бічну грань призми дорівнює f (рис. 3.8).

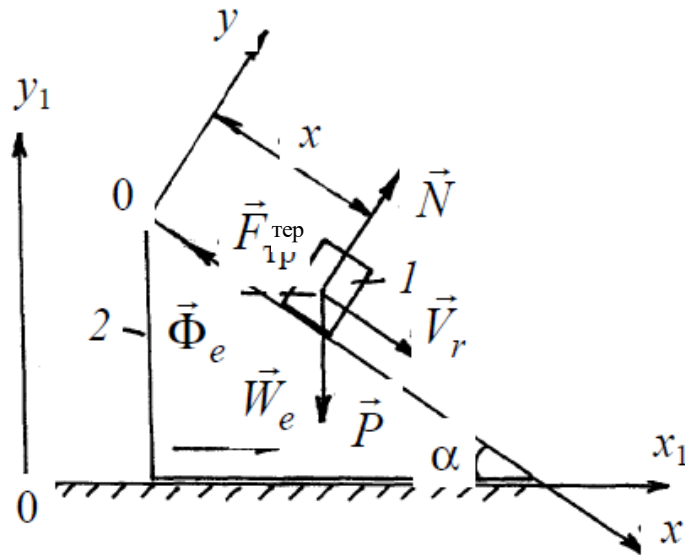


Рисунок 3.8 – Розрахункова схема до прикладу 3.2

Розв'язання

Рух вантажу 1 є складним, який може бути розкладено на переносний рух разом із призмою (це рух поступальний) і на відносний щодо призми 2 (це рух прямолінійний). На вантаж 1 діють сили: $\vec{P}$ - сила тяжіння вантажу; $\vec{N}$ - нормальна реакція бічної грані призми; $\vec{F}_{тер}$ - сила тертя ковзання, спрямована протилежно напрямку руху вантажу.

Для розв'язання задачі методом динаміки відносного руху точки до зазначених сил додаємо переносну та коріолісову сили інерції. Оскільки переносний рух поступальний, то $\vec{\Phi}_c = 0$. Переносна сила інерції $\vec{\Phi}_e$ спрямована протилежно вектору прискорення $\vec{W}_e$, тобто вліво і дорівнює за модулем $\Phi_e = mW_e$.

Спрямовуємо вісь x рухомої системи координат Oxy вздовж бічної грані призми. Диференціальні рівняння руху вантажу в проекціях на осі x і y мають вигляд

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{\text{тер}} - \Phi_e \cos \alpha; \\ m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha - \Phi_e \sin \alpha. \end{cases}, \quad (a)'$$

Оскільки відносно прискорення вантажу перпендикулярне осі y , то $\ddot{y} = 0$. Тоді:

$$N = mg \left(\cos \varphi + \frac{W_e}{g} \sin \varphi \right).$$

Тиск вантажу на бічну грань призми за величиною дорівнює нормальній реакції N . Сила тертя $F_{\text{тер}} = f \cdot N$.

Відносне прискорення $W_r = \ddot{x}$ визначається з першого рівняння системи (a')

$$W_r = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - W_e(\cos \alpha + f \sin \alpha), \quad (б)$$

Використовуючи це рівняння, можна знайти те значення прискорення призми, за якого вантаж 1 перебуватиме в спокої щодо призми, якщо його початкова відносна швидкість дорівнює нулю. Припускаючи в рівності (б) $W_r = 0$, отримаємо:

$$W_e = \frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{(\cos \alpha + f \sin \alpha)}.$$

3.3 Механічна система. Сили зовнішні й внутрішні

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення та рухи яких взаємозалежні.

Матеріальне тіло ми також будемо розглядати як систему матеріальних точок. Системи, як і окремі матеріальні точки, можуть бути вільними або невольними - обмеженими в'язями.

Приклад. Вільна – сонячна система, у якій всі тіла зв'язані силами взаємного притягання. Невільна (обмеженим зв'язками) – будь-яка машина або механізм, у якому всі тіла зв'язані шарнірами, стержнями, тросами, ремнями (геометричними або кінематичними в'язями).

Відомо, що механічна дія в'язей на точки системи виражається силами – реакціями в'язей. Таким чином, всі сили, що діють на систему невіільних точок, можна розділити на *активні (що задаються) сили й реакції в'язей*.

Сили, що діють на механічну систему, можна розділити й по іншій ознаці – розташуванню щодо системи: зовнішні $\bar{F}_i^e$ й внутрішні $\bar{F}_i^i$.

Зовнішніми $\bar{F}_i^e$ (e - exterieur) називаються сили, що діють на точки системи з боку інших точок, що не входять до складу системи.

Внутрішніми $\bar{F}_i^i$ (i – interieur) називаються сили взаємодії між матеріальними точками даної системи.

Та сама сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, залежно від того яка механічна система розглядається.

На підставі закону рівності дії й протидії кожній внутрішній силі відповідає інша внутрішня сила, рівна їй по модулі й протилежна по напрямку; із цього виходить: *головний вектор і головний момент всіх внутрішніх сил щодо довільної точки або осі дорівнюють нулю:*

$$\sum \bar{F}_i^i = 0; \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^i) = 0; \sum m_x(\bar{F}_i^i) = 0, \quad (3.16)$$

Із цього видно, що внутрішні сили взаємно врівноважуються й не впливають на рух системи: тому що вони прикладені до різних матеріальних точок, то можуть викликати взаємні переміщення точок усередині системи. Урівноваженими внутрішні сили будуть тільки тоді, коли система являє собою абсолютно тверде тіло.

3.4 Маса системи. Центр мас

Рух системи, крім діючих сил, залежить також від її сумарної маси й розподілу мас. Кожна точка механічної системи має певну масу m_i , а її положення визначається радіусом-вектором r_i або трьома координатами x_i, y_i, z_i .

Маса системи (M) дорівнює арифметичній сумі мас всіх точок або тіл, що утворюють систему:

$$M = \sum m_i, \quad (3.17)$$

В однорідному полі ваги ($g = \text{const}$) вага будь-якої частки тіла пропорційний її масі. Тому про розподіл мас у тілі можна судити по положенню його центра ваги.

Центром мас називається центр паралельних сил ваги $\bar{F}_i = m_i \bar{g}$ системи матеріальних точок: $r_c = \frac{1}{P} \sum P_i r_i$ (рис. 3.9).

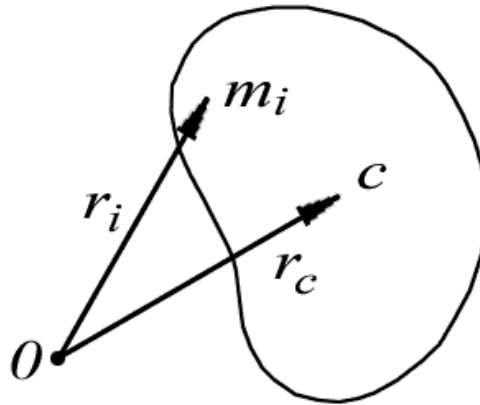


Рисунок 3.9 – Визначення центру мас системи точок

Перетворимо формули, що визначають координати центра ваги тіла до виду, що явно містить масу:

$$X_c = \frac{1}{M} \sum m_i x_i; \quad Y_c = \frac{1}{M} \sum m_i y_i; \quad Z_c = \frac{1}{M} \sum m_i z_i, \quad (3.18)$$

У векторній формі:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \bar{r}_i, \quad (3.19)$$

де $\bar{r}_i$ - радіуси-вектори точок, що утворюють систему.

Як видно положення центра мас залежить тільки від положень і мас кожних матеріальних точок системи, отже: положення центра мас характеризує розподіл мас у тілі або в будь-якій механічній системі.

Геометрична точка C , координати якої визначаються формулами (3.17) називається **центром мас** або **центром інерції** механічної системи.

Введення поняття *центра мас* дозволяє в ряді випадків звести задачу про рух системи матеріальних точок до завдання про рух центра мас.

3.5 Момент інерції тіла щодо осі

Згідно з визначенням інерція у фізиці - це здатність тіл зберігати стан спокою або руху за відсутності дії зовнішніх сил.

Якщо з самим поняттям інерції все зрозуміло на інтуїтивному рівні, то момент інерції - окреме питання. Погодьтеся, складно уявити в умі, що це таке.

Зі шкільного курсу відомо, що маса - міра інертності тіла. Якщо ми штовхнемо два візки різної маси, то зупинити складніше буде той, що важчий. Тобто що більша маса, то більший зовнішній вплив необхідний, щоб змінити рух тіла. Розглянуте стосується поступального руху, коли візок із прикладу рухається по прямій.

За аналогією з масою та поступальним рухом *момент інерції - це міра інертності тіла під час обертального руху навколо осі.*

Положення центра мас характеризує розподіл мас системи не повністю. *Наприклад:* суцільне колесо й маховик з однаковими масами й зовнішніми діаметрами мають однакові розташування центра мас і габарити, однак розподіл мас по-різному, що позначається на їхньому обертovому русі. Тому в механіку вводиться ще одна величина, що характеризує розподіл мас і інертність тіла – **момент інерції**.

Якщо при поступальному русі тіла мірою його інертності є маса, то при обертovому русі – *момент інерції твердого тіла* щодо осі обертання.

Тому до дослідження різних видів руху варто розглянути обчислення моментів твердого тіла.

Моментом інерції тіла (системи) щодо даної осі (*осьовим моментом інерції*) називається скалярна величина, рівна сумі добутків мас всіх точок тіла (системи) на квадрати їхніх відстаней від цієї осі:

$$I_z = \sum m_i h_i^2, \quad (3.20)$$

Осьовий момент інерції є *мірою інертності* тіла при обертальvому русі, також величиною позитивної й не рівної нулю ($[I_z] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$).

Для однієї матеріальної точки:

$$I_z = m h^2, \quad (3.21)$$

Для обчислення відстані від точок до осей можна виражати через координати x_i, y_i, z_i цих точок (наприклад: відстань до осі Ox дорівнює $\sqrt{y_i^2 + z_i^2}$). Тоді моменти інерції щодо осей $Oxyz$ визначаються формулами:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2); \quad I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Часто в ході розрахунків користуються поняттям радіуса інерції.

Радіусом інерції тіла щодо осі O_z називається лінійна величина обумовлена:

$$I_z = m\rho^2 \quad - \quad \rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}}, \quad (3.22)$$

Отже, радіус інерції геометрично дорівнює відстані від осі Oz до тієї точки, у якій треба зосередити масу всього тіла, щоб момент інерції цієї однієї точки дорівнював моменту інерції всього тіла.

Для твердого тіла при безперервному розподілі маси, розбиваючи його на елементарні частини, знайдемо, що сума в рівності (3.20), звернеться в інтеграл.

З огляду на, що

$$dm = \rho dV,$$

де ρ - щільність;

V - об'єм.

Одержимо:

$$I_z = \int_{(m)} h^2 dm \quad \text{або} \quad I_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV, \quad (3.23)$$

або:

$$I_x = \int_{(V)} \rho(y^2 + z^2) dV, \quad (3.24)$$

Інтеграл тут поширюється на весь об'єм тіла, а щільність і відстань залежать від координат точок тіла. Цими формулами зручно користуватися при визначенні моментів інерції однорідних тіл правильної форми.

Моменти інерції деяких однорідних тіл:

1. Тонкий однорідний стрижень (рис. 3.10):

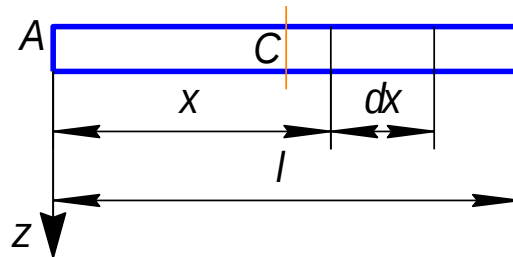


Рисунок 3.10 – Тонкий однорідний стрижень

Для елементарного відрізка: $dm = \rho_1 dx$, де $\rho_1 = M/l$,

тоді
$$I_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}, \text{ або}$$

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2, \quad (3.25)$$

2. Тонке кругле однорідне кільце (рисунок 3.11):

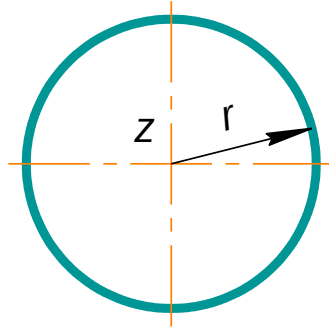


Рисунок 3.11 – Тонке кругле однорідне кільце

Тому що всі його точки перебувають від осі Oz на відстані r , то формула (3.19) дає:

$$I_z = \sum m_i r^2 = (\sum m_i) r^2 = Mr^2, \quad (3.26)$$

Такий же результат вийде для моменту інерції тонкої циліндричної оболонки маси M й радіуса r щодо її осі обертання.

3. Кругла однорідна пластина або циліндр (рис. 3.12):

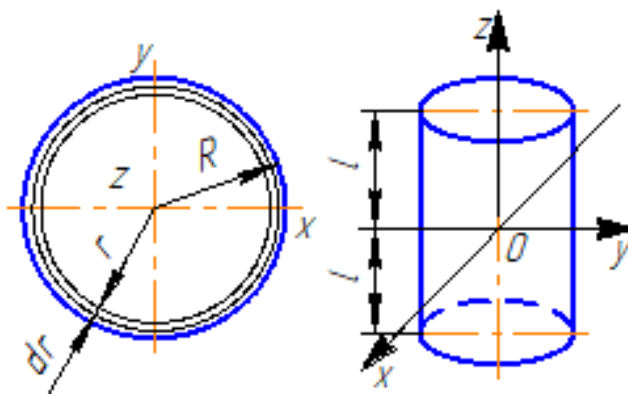


Рисунок 3.12 – Кругла однорідна пластина або циліндр

Виділимо елементарне кільце радіуса r шириною dr , його маса:

$$dm = \rho_2 2\pi r dr, \text{ де } \rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Тоді для кільця: $dI_z = r^2 dm = 2\pi\rho_2 r^3 dr$,

$$\text{для пластини: } I_z = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} 2\pi\rho_2 R^4,$$

або

$$I_c = \frac{1}{2} MR^2, \quad (3.27)$$

4. Куля (рис. 3.13):

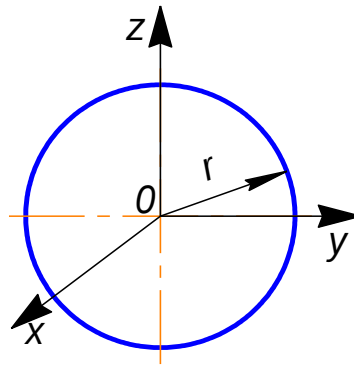


Рисунок 3.13 – Куля

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2, \quad (3.28)$$

5. Суцільна прямокутна пластина (рис. 3.14):

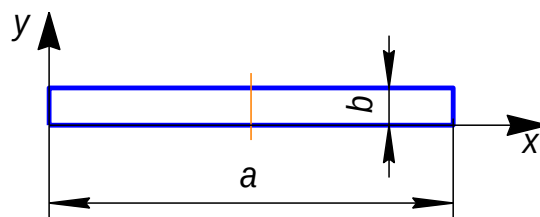


Рисунок 3.14 – Суцільна прямокутна пластина

$$I_x = m \frac{b^2}{3}, \quad (3.29)$$

$$I_y = m \frac{a^2}{3}, \quad (3.30)$$

6. Суцільний круглий конус із радіусом основи R (рис. 3.15).

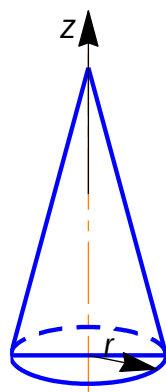


Рисунок 3.15 – Суцільний круглий конус

$$I_z = 0,3mR^2, \quad (3.31)$$

7. Моменти інерції неоднорідних тіл і тіл суцільної форми можна визначати експериментально за допомогою відповідних приладів.

3.6 Моменти інерції тіла щодо паралельних осей

Під час обчислення моменту інерції тіла, що обертається навколо осі, яка не проходить через центр інерції (рис. 3.16), слід користуватися теоремою про паралельне перенесення осей або теоремою Штейнера (Якоб Штейнер, швейцарський геометр 1796 - 1863 рр.).

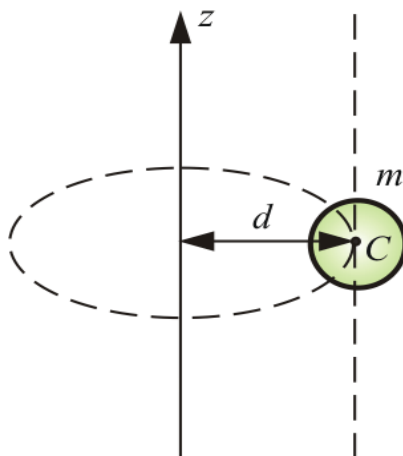


Рисунок 3.16 – Момент інерції тіла, що обертається навколо осі, яка не проходить через центр інерції

Моменти інерції даного тіла щодо різних осей будуть різними. Покажемо, як знаючи моменти інерції щодо якої-небудь осі, знайти момент інерції щодо іншої осі, їй паралельної (рис. 3.17).

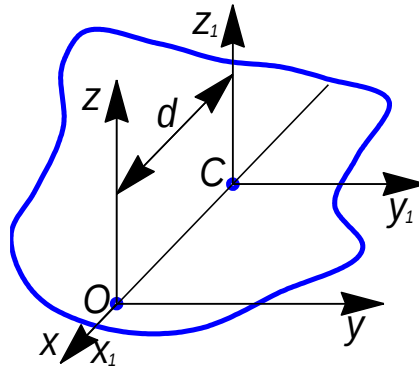


Рисунок 3.17 – Розрахункова схема

Проведемо через центр мас C тіла довільні осі $Cx'y'z'$, а через будь-яку іншу точку O осі $Oxyz$:

$$Oy \parallel Cy'; \quad Oz \parallel Cz'.$$

Відстань між осями $OC = d$, тоді:

$$I_{Oz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad I_{Oz'} = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2).$$

Для будь-якої точки тіла:

$$x_i = x_i' - d \quad \text{або} \quad x_i^2 = x_i'^2 + d^2 - 2x_i'd, \quad y_i = y_i',$$

тоді, підставляючи у вираження I_{Oz} одержимо:

$$I_{Oz} = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + (\sum m_i) d^2 - 2d(\sum m_i x_i'),$$

Тут:

$$\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = I_{Oz'}; \quad (\sum m_i) d^2 = Md^2,$$

на підставі (3.17) маємо:

$\sum m_i x_i' = Mx_C$ - координата центра ваги, але $x_C = 0$, то $2d(\sum m_i x_i') = 0$,
тоді:

$$I_{Oz} = I_{Oz'} + Md^2, \quad (3.32)$$

Теорема Гюйгенса: момент інерції відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції відносно осі, яка паралельна даній і проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Вісь 1 проходить через центр мас O , вісь 2 паралельна їй; відстань між осями дорівнює a (рис. 3.18).

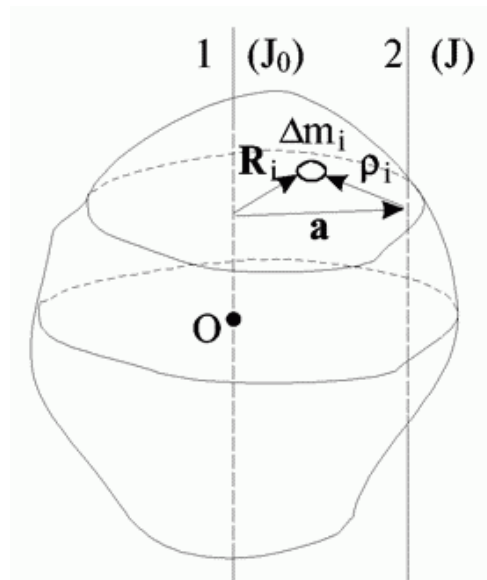


Рисунок 3.18 – Теорема Гюйгенса

Вектори R_i і ρ_i перпендикулярні осям 1 і 2. Вони проведені від осей у ту точку, де розташована маса Δm_i .

Момент інерції тіла відносно осі 2:

$$I = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 = \sum_i \Delta m_i (R_i - a)^2 = \sum_i \Delta m_i R_i^2 + \sum_i \Delta m_i a_i^2 - 2a \sum_i \Delta m_i R_i, \quad (3.33)$$

Остання дорівнює нулю, оскільки вісь 1 проходить через центр мас, отже:

$$I = I_0 + ma^2, \quad (3.34)$$

З формули треба (3.30), щоб $I_{oz} < I_{cz}$: із всіх паралельних осей, найменший момент інерції буде щодо тої осі, що проходить через центр мас.

3.7 Методи визначення моментів інерції тіл, складної конфігурації

Метод фізичного маятника (рис. 3.19)

Диференціальне рівняння коливань:

$$L_0 = I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (3.35)$$

де: I_0 - момент інерції щодо осі підвісу;

φ - кут відхилення осі статичної рівноваги;

L_0 - момент сили ваги щодо осі підвісу;

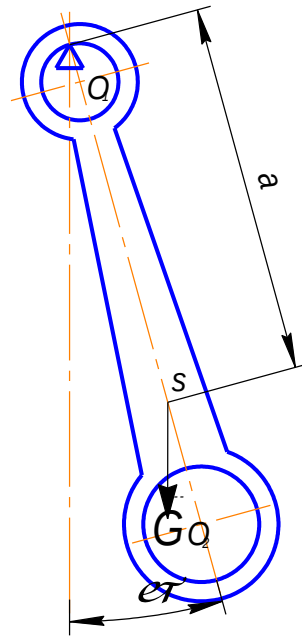


Рисунок 3.19 – Метод фізичного маятника

$$I_o \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -G \cdot a \cdot \sin \varphi, \quad (3.36)$$

У наслідок малого кута φ приймаємо $\sin \varphi = \varphi$, тоді:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{m \cdot g \cdot a \cdot \varphi}{I_o}.$$

Позначимо: $K^2 = \frac{m \cdot g \cdot a \cdot \varphi}{I_o};$

де: k – кругова частота коливань.

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + K^2 \varphi = 0, \quad (3.37)$$

Відповідно до теорії гармонійних коливань період коливань визначаємо по формулі:

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mga}}, \quad (3.38)$$

Звідси визначаємо момент інерції:

$$I_o = \frac{mgaT^2}{4\pi^2}, \quad (3.39)$$

$$I_s = I_0 - ma^2 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} - ma^2 = ma\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - a\right), \quad (3.40)$$

Метод крутильних коливань на уніфілярному підвісі (рисунок 3.20)

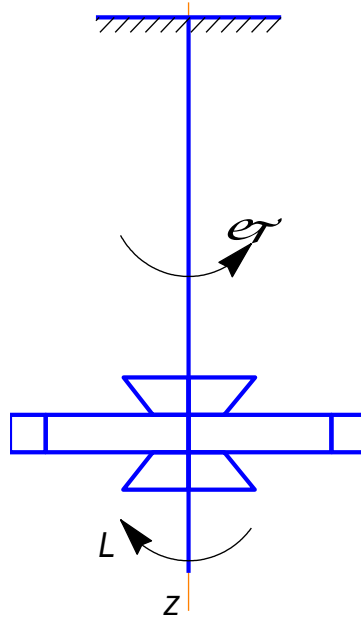


Рисунок 3.20 – Уніфілярний підвіс

$$L_z = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.41)$$

Зневажаючи опором повітря, визначимо момент зовнішніх сил. Це момент, що відновлює, обумовленою пружністю матеріалу дроту.

$$L_z = -C \cdot \varphi,$$

де: C – твердість дроту.

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I_z}\varphi = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + K^2\varphi = 0;$$

де: $K = \sqrt{\frac{C}{I_z}}$ - кругова частота крутильних коливань.

Період визначимо по формулі:

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{C}};$$

$$I_z = \frac{CT^2}{4\pi^2}.$$

Величину C визначимо експериментально по еталоні

$$I_e = \frac{m(D^2 + d^2)}{8}.$$

Одержуємо:
$$I_z = I_e \left(\frac{T}{T_e} \right)^2.$$

Кінетична енергія обертового тіла

Кінетична енергія – величина адитивна, тому кінетична енергія тіла, що рухається довільним чином, дорівнює сумі кінетичних енергій усіх n матеріальних точок, на яке це тіло можна подумки розбити:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (3.42)$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ то лінійна швидкість i -ої точки $\vec{v}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i - відстань до осі обертання.

Отже,

$$K_{оберт} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (3.43)$$

Зіставивши (3.28) і (3.43) можна побачити, що момент інерції тіла I - є мірою інертності під час обертального руху. Так само як маса m - міра інерції під час поступального руху.

У загальному випадку рух твердого тіла можна представити у вигляді суми двох рухів - поступального зі швидкістю v_c і обертального з кутовою швидкістю ω навколо миттєвої осі, що проходить через центр інерції. Тоді повна кінетична енергія цього тіла:

$$K_{поан} = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (3.44)$$

Тут I_c - момент інерції відносно миттєвої осі обертання, що проходить через центр інерції.

Закон збереження моменту імпульсу

Для замкнутої системи тіл момент зовнішніх сил $\vec{M}$ завжди дорівнює нулю, оскільки зовнішні сили взагалі не діють на замкнуту систему.

Тому
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0, \text{ тобто}$$

$$\vec{L} = const \quad \text{або} \quad I\vec{\omega} = const$$

Закон збереження моменту імпульсу - момент імпульсу замкнутої системи тіл відносно будь-якої нерухомої точки **не змінюється** з плином часу.

Це один із фундаментальних законів природи.

Аналогічно для замкнутої системи що обертаються навколо осі z :

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M} \equiv 0, \text{ звідси } \vec{L}_z = \text{const} \text{ або } I_z \vec{\omega} = \text{const}$$

Якщо момент зовнішніх сил щодо нерухомої осі обертання тотожно дорівнює нулю, то момент імпульсу щодо цієї осі не змінюється в процесі руху.

Момент імпульсу і для незамкнутих систем постійний, якщо результуючий момент зовнішніх сил, прикладених до системи, дорівнює нулю.

Дуже наочним є закон збереження моменту імпульсу в дослідах зі врівноваженим гіроскопом - тілом, що швидко обертається і має три ступені свободи (рис. 3.21).

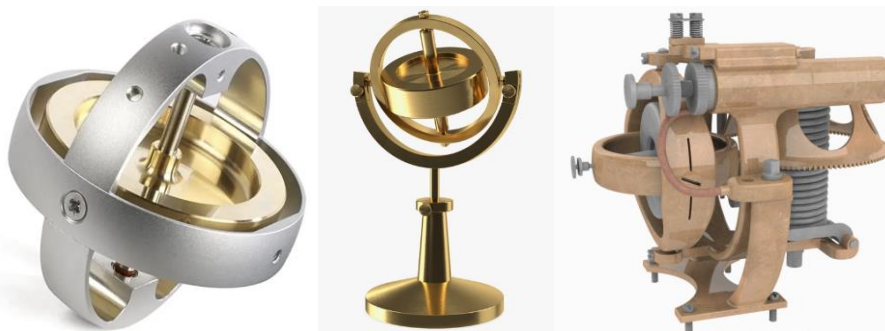


Рисунок 3.21 – Врівноважений гіроскоп

Використовується гіроскоп у різних навігаційних пристроях кораблів, літаків, ракет (гірокомпас, гірогоризонт). Один із прикладів навігаційного гіроскопа зображено на рисунку 3.22.



Рисунок 3.22 – Навігаційний гіроскоп

Саме закон збереження моменту імпульсу використовується танцюристами на льоду зміни швидкості обертання. Вивчені нами закони збереження є наслідком симетрії простору – часу. Принцип симетрії був завжди дороговказом фізиків, і вона їх не підводила. Але в 1956 р. Ву Цзянь, виявив асиметрію у слабких взаємодіях: він досліджував β - розпад ядер ізотопу Co-60 (кобальт) в магнітному полі і виявив, що число електронів, що випускаються вздовж напрямку магнітного поля не дорівнює числу електронів, що випускаються в протилежному напрямку. У цьому році Л. Ледерман і Р. Гарвін (США) виявили порушення симетрії при розпаді піонів і мюонів. Ці факти означають, що закони слабкої взаємодії, не мають дзеркальної симетрії.

Закони збереження та їх зв'язок із симетрією простору та часу

У попередніх розділах нами було розглянуто три фундаментальні закони природи: закон збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії. Слід розуміти, що ці закони виконуються лише у інерційних системах відліку. Справді, під час виведення цих законів ми користувалися другим і третім законами Ньютона, а останні застосовні лише у інерційних системах.

Нагадаємо також, що імпульс і момент імпульсу зберігаються в тому випадку, якщо систему можна вважати замкненою (сума всіх зовнішніх сил і, власне, всіх моментів сил дорівнює нулю). Для збереження енергії тіла умови замкнутості недостатньо – тіло має бути ще й адіабатично ізольованим (тобто не брати участь у теплообміні).

У всій історії розвитку фізики закони збереження виявилися чи не єдиними законами, що зберегли своє значення при заміні одних теорій іншими. Ці закони тісно пов'язані з основними властивостями простору та часу.

1 В основі *закону збереження енергії* лежить **однорідність часу**, т. е. рівнозначність всіх моментів часу (симетрія стосовно зрушення початку відліку часу).

Рівнозначність слід розуміти в тому сенсі, що заміна моментом часу t_1 на момент часу t_2 без зміни значень координат і швидкості частинок не змінює механічні властивості системи. Це означає те, що після вказаної заміни, координати та швидкості частинок мають у будь-який момент часу $t_2 + t$ такі ж значення, які мали до заміни, у момент часу $t_1 + t$.

2 У основі *закону збереження імпульсу* лежить **однорідність простору**, тобто однаковість властивостей простору переважають у всіх точках (симетрія стосовно зрушення початку координат). Однаковість слід

розуміти в тому сенсі, що паралельне перенесення замкнутої системи з одного місця простору в інше, без зміни взаємного розташування та швидкостей частинок, не змінює механічні властивості системи.

3. У основі закону збереження моменту імпульсу лежить **ізотропія простору**, тобто однаковість властивостей простору за всіма напрямками (симетрія стосовно повороту осей координат). Однаковість слід розуміти тому, що поворот замкнутої системи, як цілого, не відбивається з її механічних властивостях.

Між законами типу основного рівняння динаміки та законами збереження є важлива різниця. Закони динаміки дають нам уявлення про детальний перебіг процесу.

Так, якщо задана сила, що діє на матеріальну точку та початкові умови, то можна знайти закон руху, траєкторію, величину і напрямок швидкості в будь-який момент часу і т. п. Закони ж збереження не дають нам прямих вказівок на те, як має йти той чи інший процес. Вони говорять лише про те, які процеси заборонені, і тому в природі не відбуваються.

Таким чином, закони збереження виявляються як **принципи заборони**: будь-яке явище, у якому не виконуються хоча б один із законів збереження, заборонено, й у природі таких явищ ніколи не спостерігаються. Будь-яке явище, у якому не порушується жоден із законів збереження, може відбуватися.

Розглянемо приклад

Чи може тіло, що покоїться, за рахунок внутрішньої енергії почати рухатися? Цей процес не суперечить закону збереження енергії. Потрібно лише, щоб кінетична енергія, що виникає, точно дорівнювала убутку внутрішньої енергії. Насправді, такий процес ніколи не відбувається, бо він суперечить закону збереження імпульсу. Якщо тіло спочивало, то його імпульс дорівнював нулю. А якщо воно рухатиметься, то його імпульс сам собою збільшиться, що неможливо. Тому внутрішня енергія тіла не може перетворитися на кінетичну, якщо тіло не розпадеться на частини.

Якщо ж допустити можливість розпаду цього тіла на частини, то заборона, що накладається законом збереження імпульсу, знімається.

При цьому осколки, що виникли, можуть рухатися так, щоб їх центр мас залишався в спокої, - а тільки цього і вимагає закон збереження імпульсу.

Отже, щоб внутрішня енергія тіла, у спокою, могла перетворитися на кінетичну, це тіло має розпадатися на частини. Якщо ж є ще один закон,

який забороняє розпад цього тіла на частини, то його внутрішня енергія і маса спокою будуть постійними величинами.

Фундаментальність законів збереження полягає в їхній універсальності. Вони справедливі щодо будь-яких фізичних процесів (механічних, теплових, електромагнітних, та інших.). Вони однаково застосовні у релятивістському та нерелятивістському русі, у мікросвіті, де справедливі квантові уявлення та в макросвіті.

Подібність та відмінність лінійних та кутових характеристик руху

Формули кінематики та динаміки обертального руху легко запам'ятовуються, якщо зіставити їх із формулами поступального руху.

Поступальний рух	Обертальний рух
$v = \frac{dS}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
$v = v_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$S = \int_0^t v dt$	$\varphi = \int_0^t \omega dt$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$m\vec{v} = const$	$I\vec{\omega} = const$
$\frac{mv^2}{2} + mgh = const$	$\frac{I\omega^2}{2} + mgh = const$

Контрольні питання

- 3.1 У яких системах відліку справедливі 1, 2 і 3 закони динаміки?
- 3.2 Яка система відліку називається інерційній?

- 3.3 Що таке відносний, переносний, абсолютний рух?
- 3.4 Основний закон динаміки справедливий для відносного, переносного або абсолютного руху?
- 3.5 Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки.
- 3.6 Що характеризують сили інерції?
- 3.7 Які бувають сили інерції?
- 3.8 Чи можна з динамічної точки зору відносний рух розглядати як абсолютне?
- 3.9 Результатом чого є прискорення в інерційній і неінерційній системі відліку?
- 3.11 Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної крапки.
- 3.12 У якому випадку переносні сили інерції дорівнюють нулю?
- 3.13 У якому випадку коріолісова сила інерції дорівнює нулю?
- 3.14 У якому випадку ліва частина диференціального рівняння відносного руху матеріальної точки дорівнює нулю.
- 3.15 Чи зміниться рівняння динаміки при переході між інерційними системами відліку?
- 3.16 Що називають системою матеріальних точок?
- 3.17 Чи можна матеріальне тіло розглядати як систему матеріальних точок?
- 3.18 Які системи матеріальних точок називають вільними й невольними?

Тестові завдання до теми 3

1. Осьовий момент інерції тіла характеризує:

1. Міру інертності при обертовому русі.
2. Міру інертності при поступовому русі.
3. Міру інертності при плоско-паралельному русі.
4. Міру інертності при складному русі.

2. Осьовий момент інерції тіла масою 1 кг дорівнює 2 кг·м². Момент інерції відносно паралельної осі, що відстоїть на відстані 2 м дорівнює:

1. 6 кг·м²
2. 4 кг·м²
3. 5 кг·м²
4. 9 кг·м²

3. Для визначення характеру руху твердого тіла необхідно знати:

1. Закон руху центра мас.
2. Закон руху будь-якої точки.
3. Закон відносного руху.
4. Закон переносного руху.

4. Теорема про рух центра мас системи:

1. Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи та на яку діють усі зовнішні сили, що діють на систему.
2. Центр мас системи рухається як тверде тіло, маса якого дорівнює масі усієї системи та на яку діють усі зовнішні сили, що діють на систему.
3. Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи та на яку діють внутрішні сили.
4. Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи та на яку діють сили інерції.

5. Якщо тіло рухається поступово, то:

1. Його рух повністю визначається рухом центра мас.
2. Його рух не визначається рухом центра мас.
3. Його рух не залежить від руху центра мас.
4. Його рух не залежить від зовнішніх сил.

6. Якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему дорівнює нулю, то:

1. Швидкість центру мас постійна.
2. Прискорення центру мас постійна.
3. Нормальне прискорення постійне.
4. Модуль швидкості центру мас постійний.

7. Якщо сума зовнішніх сил, що діють на систему не дорівнює нулю, то:

1. Центр мас рухається нерівномірно.
2. Швидкість центра мас постійна.
3. Положення центра мас системи не змінюється.
4. Модуль швидкості центру мас постійний.

8. Чому дорівнює маса системи матеріальних точок?

1. Арифметичній сумі мас матеріальних точок системи.
2. Алгебраїчній сумі мас точок.
3. Геометричній сумі.
4. Добутку мас точок.

9. Що таке центр мас матеріальної системи? Визначається за формулою:

$$1. x_c = \frac{\sum x_k m_k}{M};$$

$$2. y_c = \frac{\sum y_k m_k}{M};$$

$$3. z_c = \frac{\sum z_k m_k}{M};$$

$$4. \gamma_c = \frac{\sum \gamma_k m_k}{M}.$$

10. Одиниці вимірювання моменту інерції тіла відносно осі

1. $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;
2. $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;
3. $\text{Н} \cdot \text{м}^2$;
4. $\text{Н} \cdot \text{м}$.

11. Моментом інерції матеріальної системи відносно осі називають суму добутків мас точок на величини, які потрібно вказати у відповіді:

1. Відстані точок до осі;
2. Квадрати відстаней точок до осі;
3. Відстань центру мас до осі;
4. Квадрат відстані центру мас до осі;

12. Момент інерції маховика дорівнює добутку маси маховика на величину, яку потрібно вказати у відповідь:

1. Радіус маховика;
2. Квадрат радіуса маховика;
3. Діаметр маховика;
4. Квадрат радіуса інерції.

13. Момент інерції відносно осі це...

1. Добуток сили інерції тіла на відстань до осі обертання;
2. Добуток мас матеріальних точок, що складають тіло, на відстань від кожної точки до осі;
3. Відношення обертового моменту до маси тіла, що обертається;
4. Сума добутків мас матеріальних точок, що складають тіло, на квадрат відстані до осі.

14. Яким може бути статичний момент площі плоскої фігури?

1. Завжди більший за нуль.
2. Завжди менший за нуль.
3. Завжди дорівнює нулю.
4. Завжди дорівнює нулю відносно центральних осей.

15. Яким має бути осьовий момент інерції плоскої фігури?

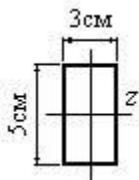
1. Завжди менше нуля.
2. Завжди більший за нуль.
3. Завжди дорівнює нулю відносно центральних осей.
4. Завжди дорівнює нулю відносно головних осей інерції перерізу.

16. Яким може бути відцентровий момент інерції плоскої фігури?

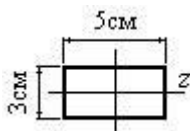
1. Завжди більший за нуль.
2. Завжди менше нуля.
3. Завжди дорівнює нулю щодо головних осей інерції перерізу.
4. Завжди дорівнює нулю відносно центральних осей.

17. Який із наведених на рисунку поперечних перерізів має більший осьовий момент інерції відносно горизонтальної осі z?

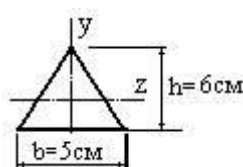
1.



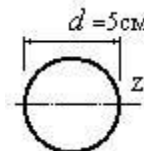
2.



3.



4.



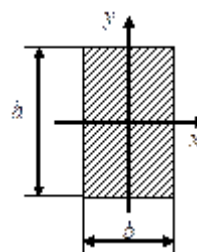
18. Чому дорівнює осьовий момент інерції перерізу відносно центральної осі x?

1. $\frac{b \cdot h^3}{12}$;

2. $\frac{b \cdot h^3}{6}$;

3. $\frac{b^3 \cdot h}{12}$;

4. $\frac{b \cdot h}{12}$;



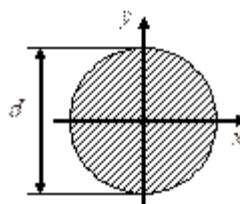
19. Чому дорівнює осьовий момент інерції перерізу відносно центральної осі x?

1. $\frac{\pi \cdot d^4}{32}$;

2. $\frac{\pi \cdot d^4}{64}$;

3. $\frac{\pi \cdot d^4}{12}$;

4. $\frac{\pi \cdot d^2}{4}$



20. Який знак мають осьові моменти інерції?

1. Позитивний;
2. Від'ємний;
3. Дорівнюють нулю.

Повне рішення *основної задачі динаміки* системи полягало б у тім, щоб, знаючи задані сили й накладені в'язі, проінтегрувати диференціальні рівняння й таким шляхом визначити *закон руху* кожної із точок системи або *реакції в'язей*.

Однак такий шлях рішення звичайно не застосовується по двох причинах:

1. Цей шлях занадто складний і майже завжди пов'язаний з непереборними математичними труднощами, які вдається вирішити аналітично лише в окремих випадках при малій кількості точок системи.

2. Часто немає необхідності визначення закону руху кожної точки системи, а досить знайти якісь певні сумарні характеристики руху системи в цілому, а не руху її окремих точок.

Наприклад: для повного визначення руху кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.1), досить знати закон обертання кривошипа $\varphi = \varphi(t)$.

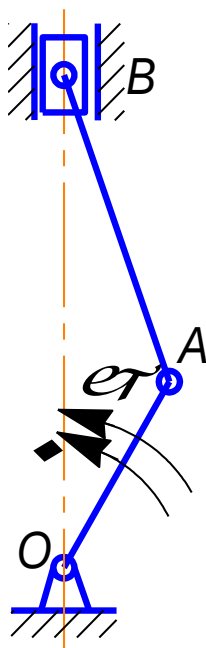


Рисунок 4.1 - Кривошипно-повзунний механізм

В інженерній практиці частіше для цих цілей застосовують *загальні теореми динаміки системи*.

Приклад 4.1

Вантаж 1 на пружині C_1 робить змушені коливання під дією сили $Q_x = Q_0 \cdot \sin(p \cdot t)$, що обурює (рис. 4.2). Визначити, при яких умовах можна погасити ці коливання, прикріпивши на пружині C_2 вантаж 2 з масою m_2 .

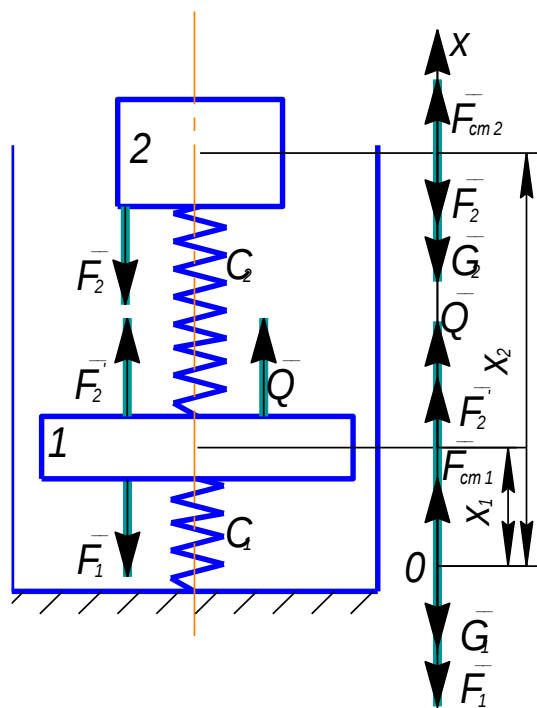


Рисунок 4.2 – Розрахункова схема до прикладу 4.1

Вісь $0x$ направимо вгору убік подовження пружини C_1 . Положення вантажів визначаються координатами x_1 й x_2 відліченими від положення статичної рівноваги.

$$G_1 = F_{cm1}, \quad G_2 = F_{cm2}.$$

$$\lambda_1 = x_1, \quad \lambda_2 = x_2 - x_1,$$

$$F_2 = C_2 \cdot \lambda_2, \quad \bar{F}_2 = -F_2, \quad F_1 = C_1 \cdot \lambda_1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot \bar{a}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i \\ m_2 \cdot \bar{a}_2 = \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -G + F_{cm1} - F_1 + Q + F_2 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -F_2 - G + F_{cm1} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot (x_2 - x_1) + Q_0 \cdot \sin(pt) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -C_2 \cdot x_2 \end{array} \right.$$

Для гасіння коливань $x_1 = 0$. Тоді:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 \cdot x_2 + Q_0 \cdot \sin(pt) = 0 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -C_2 \cdot x_2 \end{array} \right., \quad (4.3)$$

$$\text{З першого рівняння (4.3): } x_2 = -\frac{Q_0}{C_2} \cdot \sin(pt), \quad \ddot{x}_2 = \frac{Q_0}{C_2} \cdot p^2 \cdot \sin(pt).$$

Підставляємо в друге рівняння (4.3):

$$m_2 \cdot \frac{Q_0}{C_2} \cdot p^2 \cdot \sin(pt) = C_2 \cdot \frac{Q_0}{C_2} \cdot \sin(pt),$$

$m_2 \cdot p^2 = C_2$ - умови гасіння коливань задається масою.

4.2 Теорема про рух центра мас системи

У ряді випадків для визначення характеру руху системи (особливо твердого тіла) досить знати закон руху її центра мас.

Для встановлення цього закону звернемося до рівнянь руху системи (4.2) і складемо почленно їх ліві й праві частини. Одержимо:

$$\sum m_i \cdot \bar{a}_i = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^i, \quad (4.4)$$

Перетворимо ліву частину рівності.

Радіус-вектор центра мас визначається по формулі:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot \bar{r}_i, \quad (4.5)$$

тоді:

$$\sum m_i \cdot \bar{r}_i = M \cdot \bar{r}_c, \quad (4.6)$$

Двічі диференціюючи рівність за часом одержимо:

$$\sum m_i \cdot \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = M \cdot \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2}, \quad (4.7)$$

або:

$$\sum m_i \cdot \bar{a}_i = M \cdot \bar{a}_c, \quad (4.8)$$

де $\bar{a}_c$ – прискорення центра мас системи.

Тому що по властивості внутрішніх сил системи $\sum \bar{F}_i^i = 0$, то підставляючи всі знайдені значення в (4.4) одержимо:

$$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_i^e, \quad (4.9)$$

Теорема про рух центра мас системи: центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи й до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.

Проектуючи на осі координат, одержимо диференційовані рівняння руху центра мас у координатній формі:

$$M \cdot \ddot{x}_c = \sum \bar{F}_{ix}^e;$$

$$M \cdot \ddot{y}_c = \sum \bar{F}_{iy}^e, \quad (4.10)$$

$$M \cdot \ddot{z}_c = \sum \bar{F}_{iz}^e.$$

Значення теореми полягає в наступному:

- 1) Розглядаючи матеріальне тіло, як матеріальну точку, визначають закон рухів центра мас цього тіла. Якщо тіло рухається поступально, то його рух повністю визначається рухами центрів мас.
- 2) Теорема дозволяє виключати з розгляду всі невідомі внутрішні сили.

Закон збереження руху центра мас

З теореми про рух центра мас системи отримані важливі наслідки:

- 1) Нехай сума зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю:

$$\sum F_i^e = 0,$$

тоді з рівняння (5.9) треба, щоб: $\bar{a}_c = 0$ або $\bar{V}_c = const$.

Отже, якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається рівномірно й прямолінійно.

Якщо на початку центр мас був у спокої, то він і залишиться в спокої. Дія внутрішніх сил рух центра мас не зміниться.

- 2) Нехай сума зовнішніх сил, що діють на систему не дорівнює нулю, але сума проекцій їх на яку-небудь вісь дорівнює нулю:

$$\sum F_{ix}^e = 0, \text{ тоді: } \ddot{x}_c = 0, \dot{x}_c = V_{cx} = const.$$

Отже, якщо сума проекцій всіх діючих зовнішніх сил на яку-небудь вісь дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас системи на цю вісь – величина постійна.

Якщо в початковий момент $V_{cx} = 0$, то завжди $V_{cx} = 0$ й центр мас системи уздовж осі Ox не переміщається.

Всі ці результати виражають собою закон збереження руху центра мас системи.

Приклад 4.2

Вантажі P_1, P_2, P_3 з'єднані недеформованою ниткою й рухаються по гладкій поверхні тіла A вагою P_0 . Визначити в яку сторону й на скільки переміщається тіло A , якщо вантаж P_1 зміщується стосовно тіла A на 100 см. Опором рухам тіла A зневажити.

Дані: $P_0 = 200H, P_1 = 40H, P_2 = 20H, P_3 = 10H$.

Динамічні міри руху й загальні теореми

У кінематиці встановлено, що однієї із просторово-тимчасових характеристик руху є швидкість.

У динаміці рух матеріальних тіл розглядається з урахуванням взаємодій. Тіло, що рухається, неминуче вступає у взаємодію з навколишнім середовищем, у результаті чого відбувається зміна руху й такої міри руху як швидкість стає недостатньо, тому що при цьому не враховується маса тіла, що рухається. Практичний досвід показує, що на зміну швидкості впливає маса тіла й час дії на тіло. Зміна руху залежить від m, V, t . Тому другий закон динаміки зв'язує всі три елементи руху: швидкість V , масу m й час t :

$$\frac{d(m\cdot\bar{V})}{dt} = \bar{F}, \quad (4.11)$$

Таким чином, при простому механічному переносі руху від одного тіла до іншому кількісною мірою руху варто вважати $m\cdot\bar{V}$ - кількість руху. При перетворенні руху в інші форми, чим механічну, кількісною мірою служить інша міра руху – кінетична енергія $\frac{m\cdot V^2}{2}$.

Основні залежності між динамічними мірами руху й мірами дії сил установлюються загальними теоремами динаміки:

- теорема про кількість руху;
- теорема про кінетичний момент;
- теорема про кінетичну енергію.

Вони є наслідками основного рівняння динаміки й третій закон - рівності дії й протидії.

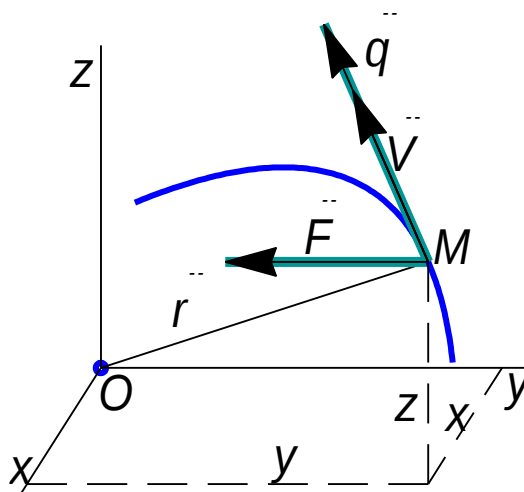
Кількість руху. Імпульс сили

Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, що дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\bar{q} = m\cdot\bar{V}, \quad (4.12)$$

Поняття кількості руху (живої сили) було введено в механіку Декартом і покладено в основу механіки Ньютоном.

Спрямовано вектор кількості руху $\bar{q}$ також як і швидкість, тобто по дотичній до траєкторії. Розмірність: $[\bar{q}] = [m\cdot\bar{V}] = 1H\cdot c = 1\frac{kg\cdot m}{c}$.

Рисунок 4.4 – Напрямок вектору кількості руху $\bar{q}$

Проекції вектора $\bar{q}$ на осі координат визначаються:

$$\begin{aligned} q_x &= m \cdot V_x = m \cdot \frac{dx}{dt}; \\ q_y &= m \cdot V_y = m \cdot \frac{dy}{dt}, \\ q_z &= m \cdot V_z = m \cdot \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

де V_x, V_y, V_z - проекції швидкості на осі координат.

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}, \quad (4.14)$$

Кількістю руху матеріальної системи називається векторна сума (головний вектор) кількостей руху всіх матеріальних точок системи (рис. 4.5). Якщо окрема точка $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ системи має масу m_i й швидкість V_i , то вектор кількості руху системи $\bar{Q}$ дорівнює:

$$\bar{Q} = \sum m_i \cdot \bar{V}_i, \quad (4.15)$$

Вектор $\bar{Q} = \sum m_i \cdot \bar{V}_i$ є головним вектором кількості руху й дорівнює геометричній сумі кількостей руху точок системи й називається **кількістю руху всієї системи**.

Проекції головного вектора кількості руху на осі координат визначаються:

$$Q_x = \sum m_i \cdot \frac{dx_i}{dt}; \quad Q_y = \sum m_i \cdot \frac{dy_i}{dt}; \quad Q_z = \sum m_i \cdot \frac{dz_i}{dt},$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}, \quad (4.16)$$

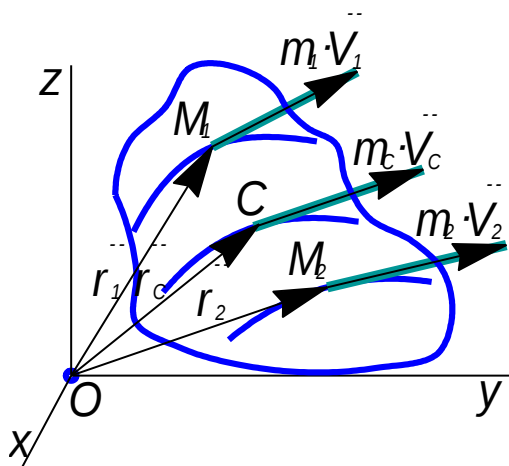


Рисунок 4.5 - Головний вектор кількості руху

Кількість руху можна виразити через масу системи й швидкість центра мас: тому що:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \cdot \bar{r}_i}{M} \longrightarrow M \cdot \bar{r}_C = \sum m_i \cdot \bar{r}_i,$$

де $M = \sum m_i$, то:

$$\bar{Q} = \sum m_i \cdot \bar{v}_i = \sum m_i \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \cdot \bar{r}_i = \frac{d}{dt} (M \cdot \bar{r}_C) = M \cdot \bar{v}_C.$$

Головний вектор кількості руху механічної системи дорівнює кількості руху центра мас системи, тобто добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\bar{Q} = M \cdot \bar{v}_C, \quad (4.17)$$

Аналогічно визначається кількість руху системи в проекціях на осі координат:

$$\bar{Q}_x = m \cdot \bar{v}_{cx}; \quad \bar{Q}_y = m \cdot \bar{v}_{cy}; \quad \bar{Q}_z = m \cdot \bar{v}_{cz}.$$

З формули видно, що якщо при русі тіла центр мас залишається нерухливим (обертання), то $Q = 0$. Якщо рух є складним – то величина Q не характеризує обертальну частину руху (кочення колеса). У такий спосіб: *кількість руху характеризує тільки поступальну частину руху системи разом із центром мас.*

Імпульс сили

Ефект дії сили за деякий проміжок часу вимірюється *імпульсом сили* $\bar{S}$. Імпульс сили характеризує передачу матеріальній точці або системі механічного руху з боку діючих тіл за даний проміжок часу.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина $d\bar{S}$, рівна добутку сили $\bar{F}$ на елементарний нескінченно малий проміжок часу dt протягом якого вона діє:

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt, \quad (4.18)$$

Напрямок вектора імпульсу $\bar{S}$ збігається з напрямком діючої сили $\bar{F}$. Розмірність у системі СІ: $[S] = [F \cdot t] = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

Імпульс змінної сили за деякий кінцевий проміжок часу t складається з елементарних імпульсів і дорівнює певному інтегралу від елементарного імпульсу в межах від 0 до t :

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} \cdot dt, \quad (4.19)$$

У проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \bar{S}_x &= \int_0^t \bar{F}_x \cdot dt; \\ \bar{S}_y &= \int_0^t \bar{F}_y \cdot dt, \\ \bar{S}_z &= \int_0^t \bar{F}_z \cdot dt. \end{aligned} \quad (4.20)$$

де F_x , F_y , F_z - проекції сили F на осі координат.

Якщо сила $\bar{F}$ постійна по модулі й напрямку ($\bar{F} = \text{const}$), то:

$$\bar{S} = \bar{F} t, \quad (4.21)$$

У випадку дії системи сил $P_1, P_2, \dots, P_n$ головний вектор дорівнює геометричній їхній сумі $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n$. Помножимо обидві частини цієї рівності на dt й проінтегруємо за часом у межах від 0 до t :

$$\int_0^t \bar{R} dt = \int_0^t \bar{P}_1 dt + \int_0^t \bar{P}_2 dt + \dots + \int_0^t \bar{P}_n dt,$$

тому що кожний член цієї рівності являє собою імпульс відповідної сили, то:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_n,$$

тоді:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{R} dt \quad \text{або} \quad \bar{S} = \Sigma \bar{S}_i, \quad (4.22)$$

Зміна руху при взаємодії тіл відбувається в часі. Мірою руху тіл є кількість руху.

Отже: між кількістю руху й імпульсом повинна бути кількісний взаємозв'язок, що виражається наступною теоремою.

4.3 Теорема про зміну кількості руху точки

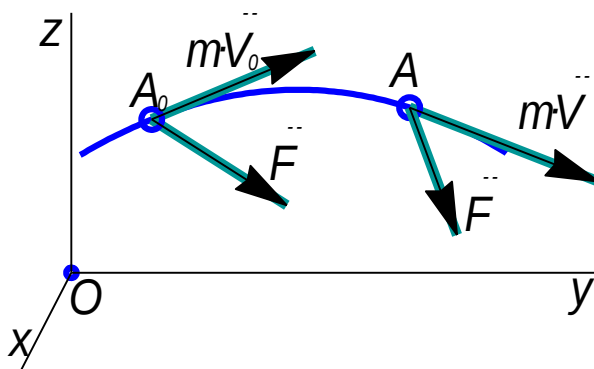


Рисунок 4.6 – До теореми про зміну кількості руху точки

Нехай матеріальна точка масою m робить рух під дією змінної рівнодіючої сили $\bar{F}$. Запишемо основне рівняння динаміки в диференціальній формі:

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F}_i \rightarrow d(m\bar{V}) = \bar{F}_i dt, \quad (4.23)$$

теорема про зміну кількості руху точки в диференціальній формі: диференціал кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу рівнодіючої сили, прикладеної до цієї точки.

Установимо залежність між зміною кількості руху й імпульсами діючих на точку сил. Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int_{V_0}^{V_1} d(m\bar{V}) = \int_0^t \bar{F}_i \cdot dt,$$

тому що права частина являє собою імпульс $\bar{S}$ сили $\bar{F}$ за проміжок часу від 0 до t , то:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \bar{S}.$$

Помітимо, що імпульс $\bar{S}$ рівнодіючої $\bar{F}$ складається з імпульсів $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ складових сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, тоді:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \Sigma \bar{S}_i, \quad (4.24)$$

теорема про зміну кількості руху точки в кінцевому виді (або в інтегральній формі): зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу всіх діючої на точку сили за той же проміжок часу.

У проекціях на осі координат:

$$m\bar{V}_{1x} - m\bar{V}_{0x} = \bar{S}_{ix}, \quad m\bar{V}_{1y} - m\bar{V}_{0y} = \bar{S}_{iy}, \quad m\bar{V}_{1z} - m\bar{V}_{0z} = \bar{S}_{iz}, \quad (4.25)$$

Зміна проекції кількості руху на яку-небудь вісь дорівнює проекції імпульсу діючої сили на ту ж вісь.

Наслідки:

1. Нехай сума проекцій всіх сил на вісь x дорівнює нулю, тобто $\Sigma F_{ix} = 0$, тоді:

$$m\bar{V}_{1x} = m\bar{V}_{0x} = \text{const}, \quad (4.26)$$

Це закон збереження проекції кількості руху.

2. Нехай $\bar{F} = 0$. У цьому випадку $m\bar{V} = \text{const}$, тобто точка рухається прямолінійно й рівномірно – *закон інерції*.

Таким чином, якщо точка рухається за інерцією, то вона не робить ніякого впливу на навколишнє середовище й не є джерелом виникнення сили.

3. Нехай $F_x = \text{const}$: $m\bar{V}_x - m\bar{V}_{0x} = F_x \cdot t$.

4. Нехай $F = \text{const}$: $m\bar{V} - m\bar{V}_0 = F \cdot t$.

При рішенні *другої задачі динаміки* при заданих силах визначають їхні імпульси й визначають, як змінюються швидкості точок. Імпульси можна обчислити, коли сили постійні або залежать тільки від часу.

4.4 Теорема про зміну кількості руху системи

Розглянемо систему, що складається з n матеріальних точок.

Другий закон динаміки для однієї точки:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \quad (4.27)$$

складемо їх почленно для всіх крапок системи й одержимо:

$$\frac{d(\Sigma m_i \cdot \bar{V}_i)}{dt} = \Sigma \bar{F}_i^e + \Sigma \bar{F}_i^i.$$

З огляду на, що $\bar{Q} = \Sigma m_i \cdot \bar{V}_i$ й $\Sigma \bar{F}_i^i = 0$, одержимо:

$$\frac{dQ}{dt} = \Sigma \bar{F}_i^e, \quad (4.28)$$

Вираз (4.28) - теорема про зміну кількості руху системи в диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

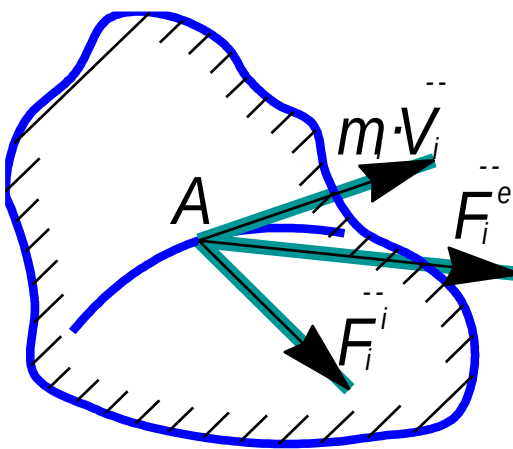


Рисунок 4.7 – До теореми про зміну кількості руху системи

У проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_x}{dt} &= \Sigma \bar{F}_{ix}^e; \\ \frac{d\bar{Q}_y}{dt} &= \Sigma \bar{F}_{iy}^e, \\ \frac{d\bar{Q}_z}{dt} &= \Sigma \bar{F}_{iz}^e. \end{aligned} \quad (4.29)$$

З рівнянь треба, щоб зміна кількості руху механічної системи викликалась тільки зовнішніми силами.

Знайдемо інше вираження теореми, що зв'язує зміна кількості руху системи з імпульсами діючих на цю систему сил. Нехай у момент $t_0 = 0$ кількість руху системи дорівнює Q_0 , а момент часу t стає Q . Розділимо змінні й проінтегруємо рівняння (4.28):

$$\int_{Q_0}^Q d\bar{Q} = \int_0^t \Sigma \bar{F}_i^e dt,$$

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \int_0^t \Sigma \bar{F}_i^e dt, \quad (4.30)$$

Тому що $\int_0^t \Sigma \bar{F}_i^e dt = \bar{S}^e$ - головний імпульс зовнішніх сил, то інакше запишемо:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e, \quad (4.31)$$

Формула (4.31) - *теорема про зміну кількості руху системи в інтегральній формі або теорема імпульсів: зміна кількості рухів системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той же проміжок часу.*

У проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{1x} - \bar{Q}_{0x} &= \Sigma \bar{S}_{ix}^e; \\ \bar{Q}_{1y} - \bar{Q}_{0y} &= \Sigma \bar{S}_{iy}^e, \\ \bar{Q}_{1z} - \bar{Q}_{0z} &= \Sigma \bar{S}_{iz}^e. \end{aligned} \quad (4.32)$$

З отриманих теорем виходить, що теореми про рух центра мас і про зміну кількості руху являють собою дві різні форми однієї й тої ж теореми - основного закону динаміки. Важливі додатки ці теореми мають у теорії удару й при вивченні реактивного руху. Практична їхня цінність полягає в тому, що вони дозволяють виключити з розгляду наперед невідомі внутрішні сили.

Наслідки теореми:

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кількість руху системи.
2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху матеріальної системи залишається постійним:

$$\text{якщо } \Sigma \bar{F}_i^e = 0, \text{ то } \bar{Q} = \text{const}.$$

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил, прокладених до системи, на вісь координат дорівнює нулю, то проекція кількості руху на цю вісь залишається постійною:

$$\text{якщо } \Sigma \bar{F}_{ix}^e = 0, \text{ то } \bar{Q}_x = \text{const}.$$

Наслідки (2) і (3) називаються *законами збереження руху механічної системи*. З них треба, що внутрішні сили змінити сумарну кількість рух системи не можуть: зміну кількості руху системи відбувається тільки під дією зовнішніх сил.

Технічні приклади

Приклад 4.3

Дано: $m_1 = 18 \text{ кг}$, $m_2 = 6 \text{ кг}$, $U_0 = 2 \text{ м/с}$, $S(t) = 0,4 \cdot (2t^2 - 1)$, м.

Визначити: U_1 при $t_1 = 1 \text{ с}$.

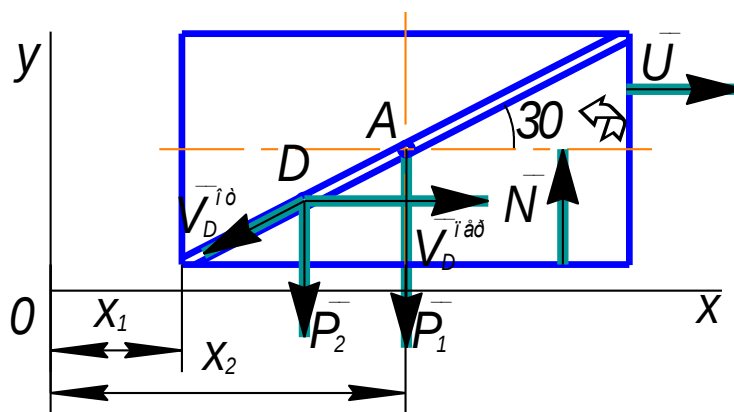


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема до прикладу 4.3

Розв'язання

Скористаємося теоремою про зміну кількості руху системи в проекції на вісь Ox у диференціальній формі:

$$\frac{d\bar{Q}_x}{dt} = \Sigma \bar{F}_{ix}^e; \quad \Sigma \bar{F}_{ix}^e = 0; \quad \frac{d\bar{Q}_x}{dt} = 0; \quad \bar{Q}_x = C_1, \quad (1)$$

$$\bar{Q} = \bar{Q}^{PL} + \bar{Q}^D,$$

де $\bar{Q}^{PL} = m_1 \cdot \bar{U}$, $\bar{Q}^D = m_2 \cdot \bar{V}^D$.

Тоді

$$\bar{Q}_x^{PL} + \bar{Q}_x^D = C_1 \text{ або } m_1 \cdot \bar{U}_x + m_2 \cdot \bar{V}_x^D = C_1, \quad (2)$$

Розглянемо рух вантажу D як складний, вважаючи рух платформи переносним, а рух вантажу стосовно платформи – відносним, тоді:

$$\bar{V}_x^D = \bar{V}_x^{D\ otn} + \bar{V}_x^{D\ per}.$$

Тут:

$$\bar{V}_x^{D\ per} = U_x = U_1, \quad \bar{V}_x^{D\ otn} = -\bar{V}^{D\ otn} \cdot \cos 30^\circ, \quad \bar{V}^{D\ otn} = \frac{dS}{dt} = 1,6t,$$

$$\bar{V}_x^{D\ otn} = -1,6t \cdot \cos 30^\circ.$$

тоді:

$$\bar{V}_x^D = U_x - 1,6t \cdot \cos 30^\circ, \quad (3)$$

Після підстановки (3) в (2) одержуємо:

$$m_1 \cdot \bar{U}_x + m_2 \cdot U_x - 1,6 \cdot m_2 \cdot t \cdot \cos 30^\circ = C_1, \quad (4)$$

Визначаємо постійну інтегрування:

при $t = 0, U = U_0$,

тоді:

$$C_1 = (m_1 + m_2) \cdot U_0, \quad (5)$$

$$(m_1 + m_2) \cdot U_x - 1,6 \cdot m_2 \cdot t \cdot \cos 30^\circ = (m_1 + m_2) \cdot U_0, \quad (6)$$

звідси визначаємо U :

$$U_x = U_0 + \frac{1,6 \cdot m_2 \cdot t \cdot \cos 30^\circ}{m_1 + m_2} \quad (7)$$

При $t = 1\text{с}$ одержимо:

$$U_x = 2 + \frac{1,6 \cdot 61 \cdot \cos 30^\circ}{18 + 6} = 2,35 \text{ м/с.}$$

Момент кількості руху точки

У розділі «Статика» було введено поняття моменту сили, що характеризує обертальний ефект сили. Якщо перша міра механічного руху $m\bar{V}$ характеризує поступальний рух тіла, то для характеристики обертового руху, мабуть, повинна застосовуватися інша міра – *момент кількості руху (або кінетичний момент)*.

Нехай матеріальна точка M масою m рухається по заданій траєкторії під дією сили $\bar{F}$ зі швидкістю $\bar{V}$ при початкових умовах:

$\bar{r}_0 \neq 0, \bar{V}_0 \neq 0$. Тоді $m\bar{V}$ - кількість руху, спрямована по дотичній до траєкторії.

За аналогією з моментом $m_0(\bar{F})$ сили $\bar{F}$, визначимо момент кількості руху точки щодо центра O :

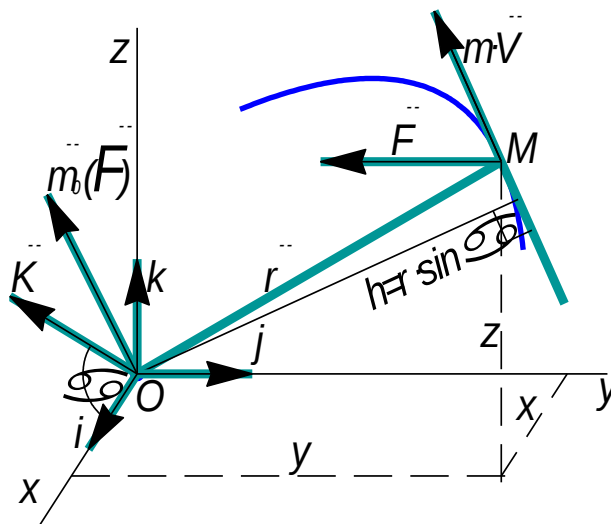


Рисунок 4.9 – Момент кількості руху точки щодо центра O

$$\begin{aligned} m_0(m\bar{V}) &= m\bar{V} \cdot h \\ m_0(m\bar{V}) &= m\bar{V} \cdot r \cdot \sin \alpha = |\bar{r} \times m\bar{V}|, \\ m_0(m\bar{V}) &= \bar{r} \times m\bar{V} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Або:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{V}, \quad (4.34)$$

Моментом кількості руху матеріальної точки щодо центра називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора положення цієї точки на вектор кількості руху.

Вектор $\bar{K}_0$ прикладений у точці O й спрямований перпендикулярно площини, утвореної $\bar{r}$ й $m\bar{V}$ у ту сторону, звідки видний поворот від $(\bar{r} \times m\bar{V})$ позитивним (проти ходу годинної стрілки).

Моменти кількості руху точки щодо центра й щодо координатних осей, що проходять через цей центр, зв'язані наступними залежностями:

$$\begin{aligned} \cos(\bar{K}_0 \wedge \bar{i}) &= \frac{K_x}{K_0}; \\ \cos(\bar{K}_0 \wedge \bar{j}) &= \frac{K_y}{K_0}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\cos(\bar{K}_0 \wedge \bar{k}) = \frac{K_z}{K_0}.$$

Проекція моменту кількості руху матеріальної точки щодо деякого центра на вісь, що проходить через цей центр, дорівнює моменту кількості руху точки щодо цієї осі.

Аналітичні вирази моментів кількості руху точки щодо осей координат («статика») мають вигляд:

Визначимо вектор моменту кількості руху по його проєкціях (рис. 4.10).

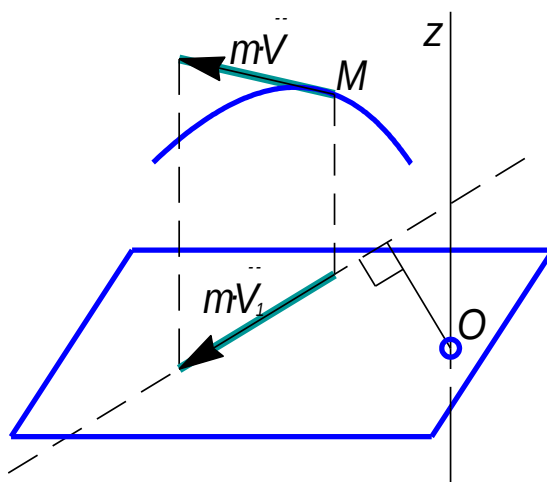


Рисунок 4.10 - Момент кількості руху матеріальної точки

Тому що:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

то:
$$m\bar{V} = m\bar{V}_x \cdot \bar{i} + m\bar{V}_y \cdot \bar{j} + m\bar{V}_z \cdot \bar{k},$$

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\bar{V}_x & m\bar{V}_y & m\bar{V}_z \end{vmatrix} =$$

$$(m\bar{V}_z \cdot y - m\bar{V}_y \cdot z) \cdot \bar{i} + (m\bar{V}_x \cdot z - m\bar{V}_z \cdot x) \cdot \bar{j} + (m\bar{V}_y \cdot x - m\bar{V}_x \cdot y) \cdot \bar{k}$$

або

$$K_0 = K_{0x} \cdot \bar{i} + K_{0y} \cdot \bar{j} + K_{0z} \cdot \bar{k}, \quad (4.36)$$

Визначимо проєкції вектора $\bar{K}_0$ на осі координат:

$$\begin{cases} K_{0x} = m\bar{V}_z \cdot y - m\bar{V}_y \cdot z \\ K_{0y} = m\bar{V}_x \cdot z - m\bar{V}_z \cdot x, \\ K_{0z} = m\bar{V}_y \cdot x - m\bar{V}_x \cdot y \end{cases} \quad (4.37)$$

$$K_0 = \sqrt{K_{0x}^2 + K_{0y}^2 + K_{0z}^2}, \quad (4.38)$$

Введемо поняття моменту кількості руху щодо осі.

$$m_z(m\bar{V}) = \pm m\bar{V}_1 \cdot h, \quad (4.39)$$

Момент кількості руху матеріальної точки щодо осі є алгебраїчна величина, рівна добутку проекції кількості руху на площину, перпендикулярну осі, на найкоротшу відстань від лінії дії цієї проекції до точки перетинання осі й площини.

Аналітично момент кількості руху щодо осі визначається по формулах:

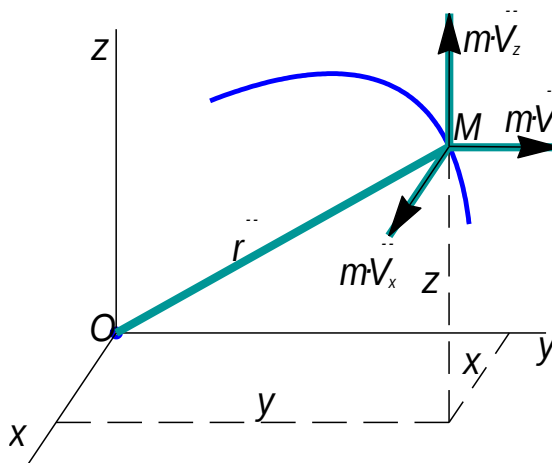


Рисунок 4.11 – Момент кількості руху щодо осі

$$\begin{cases} K_x = mV_z \cdot y - mV_y \cdot z \\ K_y = mV_x \cdot z - mV_z \cdot x, \\ K_z = mV_y \cdot x - mV_x \cdot y \end{cases} \quad (4.40)$$

Наслідок з вищевикладеного встановлює зв'язок між проекціями на вісь моменту кількості руху точки й моментом кількості руху щодо осі:

$$\begin{cases} K_{0x} = K_x \\ K_{0y} = K_y, \\ K_{0z} = K_z \end{cases} \quad (4.41)$$

Проекція моменту кількості руху на вісь дорівнює моменту кількості руху щодо тої ж осі.

Головний момент кількості руху механічної системи (кінетичний момент)

Кінетичний момент є динамічною мірою обертового руху всієї системи. *Головним кінетичним моментом K_0 механічної системи щодо центра O називається геометрична сума моментів кількостей руху всіх точок системи щодо цього центра:*

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \cdot m_i \cdot \bar{V}_i), \quad (4.42)$$

Відомо, що:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \cdot \bar{r}_i}{M} \quad \text{та} \quad M \cdot \bar{r}_c = \sum m_i \cdot \bar{r}_i;$$

Продиференціюємо за часом:

$$\begin{aligned} M \frac{d\bar{r}_c}{dt} &= \frac{d}{dt} (\sum m_i \cdot \bar{r}_i); \\ M \cdot \bar{V}_c &= \sum m_i \cdot \bar{V}_i; \\ \bar{K}_0 &= \bar{r}_c \times M \cdot \bar{V}_c, \end{aligned} \quad (4.43)$$

Щоб зрозуміти механічний зміст величини K_0 , обчислимо кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухливої осі z , тому що визначення вектора K_0 зводиться до визначення його проекцій:

$$K_z = \sum m_i \cdot V_i \cdot h_i,$$

для будь-якої точки обертового тіла її швидкість дорівнює $V_i = \omega h_i$, тоді:

$$K_z = \sum m_i (\omega \cdot h_i) \cdot h_i \quad \text{або} \quad K_z = \omega \cdot \sum m_i \cdot h_i^2;$$

тут сума представляє момент інерції I_z тіла щодо осі z , тоді:

$$K_z = \omega \cdot I_z, \quad (4.44)$$

Приклад 4.4

$$K_0 = K_{0_1} + K_{0_2}$$

$$K_0 = I_0 \cdot \omega + m\vec{V} \cdot \vec{r} = I_0 \cdot \omega + m\omega \cdot \vec{r} \cdot \vec{r} = \omega(I_0 + m\vec{r}^2),$$

або

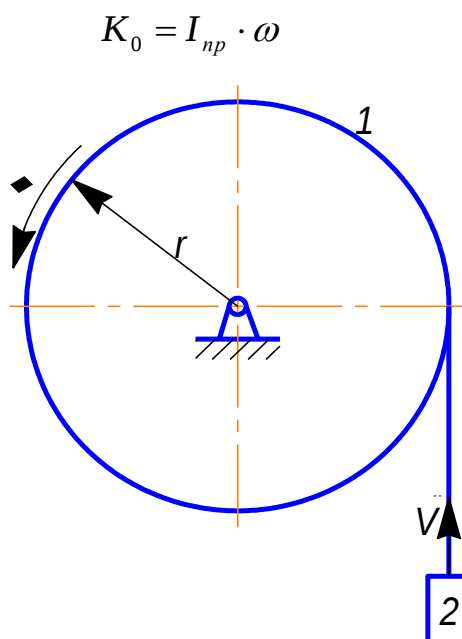


Рисунок 4.12 – Розрахункова схема до прикладу 4.4

4.5 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки



Рисунок 4.13 – Зміна моменту кількості руху матеріальної точки

На підставі основного закону динаміки:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}.$$

Перемножимо ліву й праву частину векторної рівності на радіус-вектор:

$$\bar{r} \times \frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{r} \times \bar{F};$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \bar{m}_0(\bar{F}).$$

Інакше запишемо:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}), \quad (4.45)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки щодо центра О, дорівнює моменту сили щодо того ж центра.

У проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= m_x(\bar{F}); \\ \frac{dK_y}{dt} &= m_y(\bar{F}), \\ \frac{dK_z}{dt} &= m_z(\bar{F}). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Проінтегрувавши вираження (4.46), одержимо:

$$\begin{aligned} d\bar{K}_0 &= \bar{m}_0(\bar{F})dt; \\ \int_{K_0}^K d\bar{K}_0 &= \int_0^t \bar{m}_0(\bar{F})dt; \\ \bar{K}_0 - \bar{K}_{00} &= \int_0^t \bar{m}_0(\bar{F})dt, \end{aligned} \quad (4.47)$$

Теорема про зміну моменту кількості руху в інтегральній формі.

У проекціях на осі координат одержимо:

$$K_x - K_{x0} = \int_0^t m_x(\bar{F})dt, \quad K_y - K_{y0} = \int_0^t m_y(\bar{F})dt, \quad K_z - K_{z0} = \int_0^t m_z(\bar{F})dt, \quad (4.48)$$

а) Якщо $\bar{F} = 0$, то $\bar{K}_0 = \bar{K}_{00} = \text{const}$ - закон збереження моменту кількості руху.

б) Якщо $F = 0$, то $K_x = K_{x0} = \text{const}$ - закон збереження проекції моменту кількості руху.

4.6 Теорема про зміну кінетичного моменту системи

Теорема, доведена для однієї матеріальної точки, буде справедлива для кожної точки механічної системи. Визначимо кінетичний момент для однієї точки механічної системи:

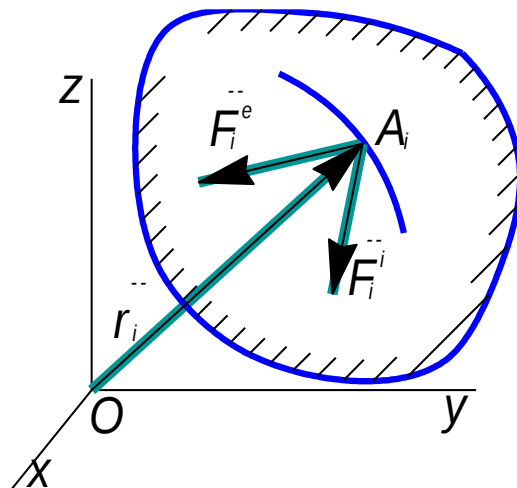


Рисунок 4.14 – Кінетичний момент для однієї точки механічної системи

$$\frac{d\bar{K}_{0i}}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) + \bar{m}_0(\bar{F}_i^i), \quad (4.49)$$

Просумуємо покроково вираження для всіх точок системи:

$$\frac{d\bar{K}_{0i}}{dt} = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) + \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^i),$$

по властивості внутрішніх сил $\sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^i) = 0$, тоді:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_i^e) \text{ або } \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{L}_0^e, \quad (4.50)$$

Теорема моментів для системи: похідна за часом від кінетичного моменту системи щодо нерухливого центра O, дорівнює головному моменту зовнішніх сил щодо того ж центра. Проектуючи на осі Oxuz :

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z^e, \quad (4.51)$$

Теорема моментів щодо будь-якої нерухливої осі.

Доведеною теоремою широко користуються при вивченні обертального й плоскопаралельного руху, у теорії гіроскопа, у теорії удару. Якщо при вивченні плоскопаралельного руху за полюс вибрати центр мас, то поступальна частина руху вивчається за допомогою теореми

про рух центра мас, а обертальна - за допомогою теореми моментів. Практична її цінність складається також у тім, що можливо вивчати обертовий рух без розгляду наперед невідомих внутрішніх сил.

Інтегруючи вираження (4.50), одержимо:

$$\bar{K}_O - \bar{K}_{O0} = \int_0^t \bar{L}_O^e dt, \quad (4.52)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі: зміна кінетичного моменту дорівнює повному імпульсу головного моменту зовнішніх сил.

У проекціях:

$$K_x - K_{x0} = \int_0^t L_{Ox}^e dt,; K_y - K_{y0} = \int_0^t L_{Oy}^e dt,; K_z - K_{z0} = \int_0^t L_{Oz}^e dt, \quad (4.53)$$

Для обертального руху навколо осі Z :

$$I_z \cdot \omega - I_z \cdot \omega_0 = \int_0^t L_z^e dt, \quad (4.54)$$

З теореми можна одержати наступні важливі *наслідки*:

а) Якщо головний імпульс діючих зовнішніх сил $L_z^e = \text{const}$, то $I_z \omega - I_z \omega_0 = L_z^e t$.

б) Якщо головний імпульс діючих зовнішніх сил щодо деякого центра $\bar{L}_O^e = 0$, то з теореми $\bar{K}_O = \bar{K}_{O0} = \text{const}$ - закон збереження головного моменту кількостей руху системи. Із цього треба, що внутрішні сили змінити головний момент кількостей руху системи не можуть.

в) Якщо при обертовій осі щодо нерухливої системі $L_z^e = 0$, то $K_z = K_{z0} = I_z \omega = \text{const}$. Звідси приходимо до наступних висновків: якщо система *незмінна* (абсолютно тверде тіло), то $I_z = \text{const}$, а значить і $\omega = \text{const}$; якщо система *змінювана*, то під дією внутрішніх сил її точки можуть наближатися з осі обертання, що приводить до зменшення I_z , або віддалятися від осі обертання, що приводить до збільшення I_z . Але тому що $I_z \omega = \text{const}$, то при зменшенні I_z кутова швидкість системи ω збільшується, при збільшенні I_z - ω зменшується.

Ці властивості проявляються в досвідах із платформою Жуковського, при розгойдуванні гойдалок, при обертанні снаряда в каналі стовбура, реактивний момент гвинта.

4.7 Теорема Резаля

Побудуємо годограф кінетичного моменту - CD , де $\bar{U}$ - швидкість кінця вектора $\bar{K}_0$.

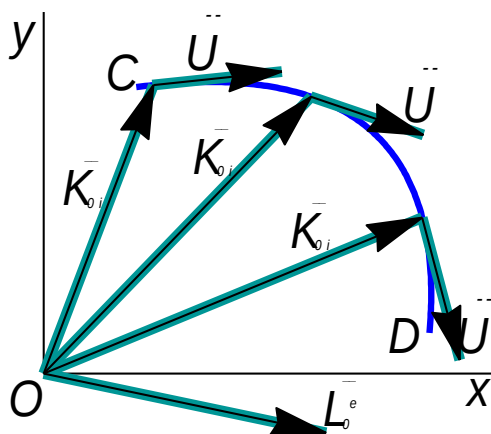


Рисунок 4.15 - Годограф кінетичного моменту

$$\bar{U} = \frac{d\bar{K}_0}{dt}.$$

Однак: $\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{L}_0^e, .$

Отже:

$$\bar{U} = \bar{L}_0^e, \quad (4.55)$$

Теорема Резаля: Швидкість зміни кінетичного моменту дорівнює головному моменту зовнішніх сил.

Приклад 4.5

Дані: I, t, f, r ;

Визначити: P .

В основу рішення покладемо теорему про зміну кінетичного моменту для обертового тіла:

$$I_0 \cdot \omega - I_0 \cdot \omega_0 = L_z^e \cdot t, \text{ тому що } L_z^e = \text{const}$$

Тут $I_0 \cdot \omega = 0$, тому що колесо зупиняється.

$$-I_0 \cdot \omega_0 = -F_{mp} \cdot r \cdot t; \quad F_{mp} = f \cdot P; \quad -I_0 \cdot \omega_0 = -f \cdot P \cdot r \cdot t;$$

звідси: $P = \frac{I_0 \omega_0}{f r t}.$

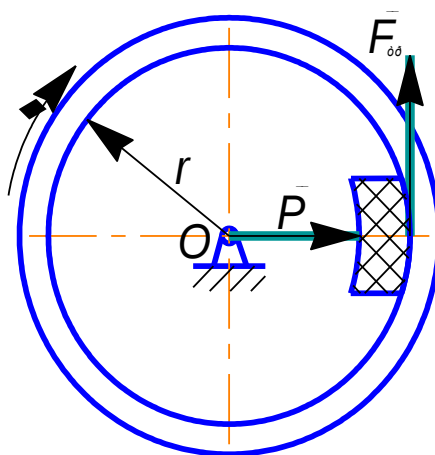


Рисунок 4.16 – Розрахункова схема до прикладу 4.5

4.8 Кінетична енергія. Робота й потужність сили

Кінетична енергія - кількісна міра руху, що враховує перетворення енергії в різні форми.

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, рівна половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{m \cdot V^2}{2}, \quad (4.56)$$

Кінетична енергія є характеристикою поступального й обертового рухів. Головна відмінність кількості руху Q й кінетичного моменту K_0 від T полягає в тому, що кінетична енергія є величиною скалярної й завжди позитивної. а також на її зміну впливають внутрішні сили, оскільки під їхньою дією змінюються модулі швидкостей точок системи.

Якщо механічна система складається з декількох тіл, то *кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх її точок:*

$$T = \sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2}, \quad (4.57)$$

Окремі випадки:

1. Поступальний рух

У цьому випадку всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, рівними швидкості руху центра мас:

$$V_1 = V_c.$$

Тоді:

$$T = \sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = \frac{V_c^2}{2} \cdot \sum m_i \text{ або } T = \frac{M \cdot V_c^2}{2}, \quad (4.58)$$

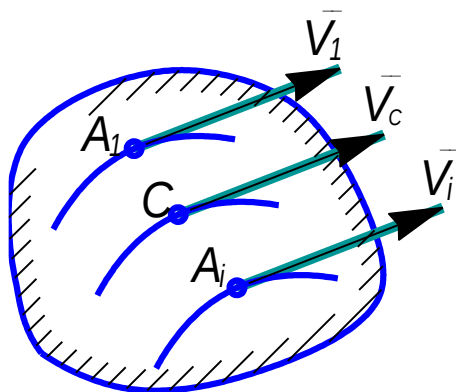


Рисунок 4.17 - Поступальний рух

2. Обертальний рух

Якщо тіло обертається навколо нерухливої осі, то швидкість будь-якої його точки дорівнює $V_i = \omega h_i$, тоді одержимо:

$$T = \sum \frac{m_i \cdot \omega^2 \cdot h_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m_i \cdot h_i^2,$$

остання сума являє собою момент інерції I , тоді:

$$T = \frac{I \cdot \omega^2}{2}, \quad (4.59)$$

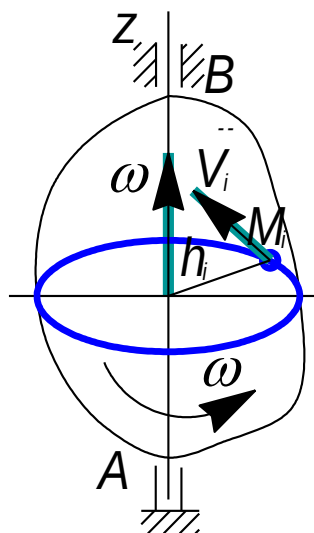


Рисунок 4.18 – Обертальний рух

3. Плоскопаралельний рух

Плоскопаралельний рух складається з поступального й обертального рухів, отже, кінетична енергія в цьому випадку визначається як сума кінетичних енергій поступального й обертального рухів:

Робота сили $\vec{F}$ на кінцевому переміщенні виражається криволінійним інтегралом і, отже, залежить від закону зміни сили й довжини шляху, а також від форми траєкторії:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.62)$$

Це не ставиться до роботи сили ваги.

2. Координатна форма

Для висновку аналітичного вираження елементарної роботи розкладемо силу $\vec{F}$ на складові $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ по напрямках координатних осей:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}.$$

Елементарне переміщення dS складається з переміщень dx, dy, dz :

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}.$$

Тоді роботу сили $\vec{F}$ на переміщенні dS можна обчислити як суму робіт її складових $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ на відповідних переміщеннях dx, dy, dz :

$$dA = F_x \cdot dx \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + F_y \cdot dy \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + F_z \cdot dz \cdot \vec{k} \cdot \vec{k},$$

тому що $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, то:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz, \quad (4.63)$$

Аналітичне вираження елементарної роботи сили.

Повна робота змінної сили на кінцевому переміщенні по криволінійній траєкторії обчислюється як інтегральна сума відповідних елементарних робіт і буде дорівнює:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz), \quad (4.64)$$

3. Природна форма

При природному способі завдання руху $|d\vec{r}| = dS$, тоді:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}).$$

Або

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (4.65)$$

Повна робота визначається криволінійним інтегралом:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (4.66)$$

Якщо сила постійна, то, позначаючи переміщення через S , одержимо:

$$A = F \cdot S.$$

Робота сили ваги дорівнює добутку модуля сили на елементарне переміщення dS й на косинус кута між напрямком сили й напрямком переміщення:

$$A(P) = PS \cos \alpha.$$

Наслідки:

а) робота сили дорівнює нулю, якщо сила перпендикулярна переміщенню.

б) робота сили $\max$, коли сила й переміщення збігаються по напрямку.

в) знак $(\cdot)$ перед роботою говорить про прискорення або сповільнення руху.

Потужність

Характеризуючи здатність сили робити роботу за проміжок часу, приходять до поняття потужності.

Потужність – величина визначальну роботу, чинену силою в одиницю часу. Якщо робота відбувається рівномірно, то:

$$N_{cp} = \frac{A}{t}, \quad (4.67)$$

У загальному випадку:

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad (4.68)$$

Одиницею виміру потужності в системі СІ є *Ват*: $[N] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{Вт}$,

Інші одиниці: $1 \text{лс} = 736 \text{Вт}$.

1. Векторна форма:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V};$$

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V}, \quad (4.69)$$

2. Координатна форма:

$$N = F_x \cdot V_x + F_y \cdot V_y + F_z \cdot V_z, \quad (4.70)$$

3. Природна форма:

$$N = F \cdot V \cdot \cos \alpha, \quad (4.71)$$

Окремі випадки визначення роботи

1. Робота постійної сили на прямолінійному переміщенні.

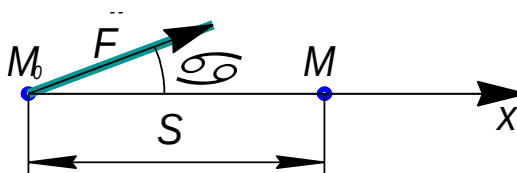


Рисунок 4.20 - Робота постійної сили на прямолінійному переміщенні

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha; \quad \begin{cases} \alpha = 90^\circ; & A = 0; \\ \alpha = 0^\circ; & A = F \cdot S; \\ \alpha = 180^\circ; & A = -F \cdot S. \end{cases}$$

2. Робота сили ваги.

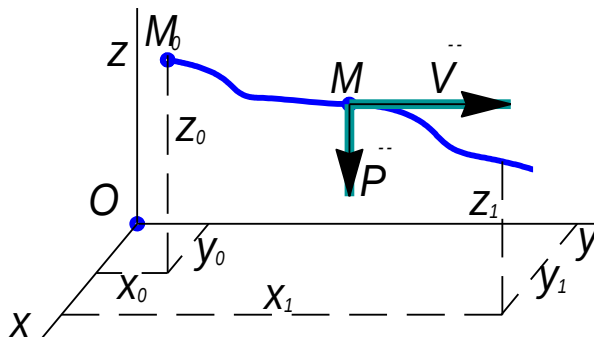


Рисунок 4.21 - Робота сили ваги

Точка M вагою $P = m \cdot g$ робить переміщення із точки M_0 в точку M_1 . Робота сили ваги:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz).$$

Тут $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -P$,

$$\text{тоді } A = - \int_{M_0}^{M_1} P \cdot dz.$$

Тому що $P = m \cdot g = \text{const}$, криволінійний інтеграл перетворюється у звичайний:

$$A = -m \cdot g \cdot \int_{z_0}^{z_1} dz = m \cdot g \cdot (z_0 - z_1)$$

Або

$$A = \pm m \cdot g \cdot H, \quad (4.72)$$

У такий спосіб: *робота сили ваги не залежить ні від довжини шляху, ні від траєкторії й визначається добутком сили ваги на вертикальне переміщення матеріальної точки.*

3. *Робота сили пружності.*

Тому що $F_x = -F = -c \cdot x$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, те робота на переміщенні λ дорівнює:

$$A = \int_0^{\lambda} F_x dx = - \int_0^{\lambda} c \cdot x \cdot dx.$$

Або:

$$A = -\frac{c \cdot \lambda^2}{2}, \quad (4.73)$$

4. *Робота сили тертя*

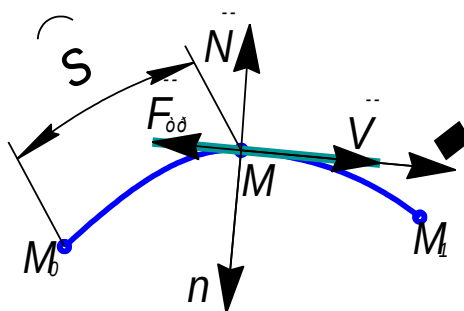


Рисунок 4.22 - Робота сили тертя

$$F_{mp} = f \cdot N;$$

$$F_{mp\tau} = -f \cdot N,$$

То

$$A = - \int_{M_0}^{M_1} F_{mp} dS = \int_{M_0}^{M_1} f \cdot N \cdot dS;$$

Якщо $F_{mp} = \text{const}$, то

$$A = -F_{mp} \cdot S, \quad (4.74)$$

5. Робота й потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухливої осі.

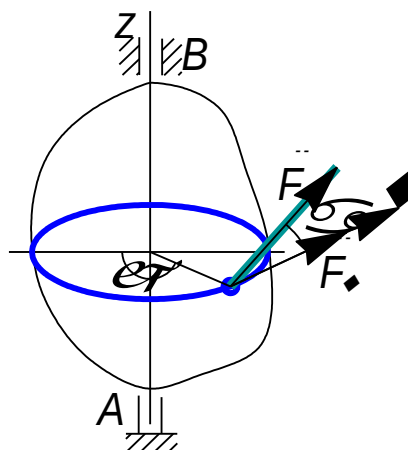


Рисунок 4.23 - Робота й потужність сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухливої осі

Робота сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\varphi$ дорівнює:

$$dA = F_\tau \cdot dS = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi,$$

тому що $dS = h \cdot d\varphi$.

Інакше: $dA = L_z \cdot d\varphi$,

де $L_z = F_\tau \cdot h$ - момент зовнішньої сили щодо осі обертання.

На кінцевому переміщенні:

$$A = \int_0^\varphi L_z \cdot d\varphi,$$

якщо $L_z = \text{const}$, то

$$A = L_z \cdot \varphi, \quad (4.75)$$

$$N = L_z \cdot \omega, \quad (4.76)$$

Робота сили дорівнює добутку обертаючого моменту на кут повороту.

Потужність сили дорівнює добутку обертаючого моменту на кутову швидкість.

4.9 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Нехай матеріальна точка рухається під дією змінної сили $\bar{F}$ по криволінійній траєкторії:

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F},$$

множимо скалярно на $d\bar{r}$:

$$m \cdot \frac{d\bar{V} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

або

$$m \cdot \bar{V} \cdot d\bar{V} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

$$\text{де } \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}; \quad \bar{F} \cdot d\bar{r} = dA; \quad m \cdot \bar{V} \cdot d\bar{V} = d\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right)$$

тоді:

$$dA = d\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right), \quad (4.77)$$

диференціальна форма теореми.

Розділивши на dt й, з огляду на, що $\frac{dA}{dt} = N$ - потужність, одержимо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m \cdot V^2}{2}\right) = N, \quad (4.78)$$

Похідна за часом від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює потужності, підведеної до цієї точки.

Інтегруючи обидві частини, одержимо теорему в інтегральній формі:

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2} = A, \quad (4.79)$$

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на якому-небудь переміщенні дорівнює роботі сили, що діє на точку на тім же переміщенні.

4.10 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Доведена теорема справедлива для будь-якої точки системи, отже, для кожної точки буде:

$$d\left(\frac{m_i \cdot V_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^i,$$

де dA_i^e , dA_i^i - елементарні роботи діючих на точку зовнішніх і внутрішніх сил.

Становлячи такі рівняння для кожної із точок системи й підсумовуючи ліві й праві їхні частини почленно, одержимо:

$$d\Sigma\left(\frac{m_i \cdot V_i^2}{2}\right) = \Sigma dA_i^e + \Sigma dA_i^i$$

Або

$$dT = \Sigma dA_i^e + \Sigma dA_i^i, \quad (4.80)$$

- *теорема про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі: диференціал від кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт всіх внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на систему.*

Проінтегрувавши обидві частини рівності в межах відповідному переміщенню системи: від t_0 коли $T = T_0$ до t , коли $T = T$, одержимо теорему в кінцевому виді або в інтегральному виді:

$$T = T_0 = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i, \quad (4.81)$$

Зміна кінетичної енергії механічної системи при її переміщенні з одного положення в інше, дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему, на відповідних переміщеннях точок системи.

На відміну від попередніх теорем, внутрішні сили в рівняннях (4.80) і (4.81) не виключаються.

Розглянемо два окремих випадка.

1. *Незмінна система* (система, у якій відстані між точками додатка внутрішніх сил при русі не змінюються, окремий випадок – абсолютно тверде тіло, нерозтяжна нитка).

Нехай дві довільні точки системи діють один на одного із силами $\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$ й за проміжок часу dt зроблять елементарні переміщення $dS_1 = dS_2$. Тоді роботи сил $A_1 = F_{12}^i dS_1$, $A_2 = F_{21}^i dS_2$ рівні по модулі, мають протилежні знаки й у сумі дадуть нуль.

Значить: для незмінної механічної системи сума робіт всіх внутрішніх сил дорівнює нулю й рівняння приймає вид:

$$T = T_0 = \Sigma A_i^e, \quad (4.82)$$

2. *Система з ідеальними в'язями* (деформаціями можна зневажити, тертя у в'язах відсутнє). Розділимо всі діючі на систему зовнішні й внутрішні сили на активні й реакції в'язей. Тоді рівняння прийме вид:

$$dT = \Sigma dA_i^a + \Sigma dA_i^r,$$

де dA_i^a , dA_i^r - елементарні роботи активних сил і реакцій в'язей.

Оскільки в ідеальних в'язях реакції роботи не виконують, то самі в'язі не впливають на зміну кінетичної енергії системи при її русі й для них виконується умова:

$$\Sigma F_i^r = 0, \text{ тоді теорема прийме вид:}$$

$$T - T_0 = \Sigma dA_i^a.$$

Зміна кінетичної енергії системи з ідеальними в'язями при будь-якому її переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил системи на тім же переміщенні.

Практична цінність теореми полягає в тому, що вона дозволяє виключати з рівняння руху все наперед не відомі реакції в'язей.

Контрольні питання

- 4.1 Диференціальні рівняння руху точки, системи.
- 4.2 У чому складається основна задача динаміки?
- 4.3 Як зв'язані радіус-вектор центра мас системи й радіуси-вектори її точок?
- 4.4 Теорема про рух центра мас.
- 4.5 Диференціальні рівняння руху центра мас.
- 4.6 Рух якої точки повністю визначає поступальний рух усього тіла?
- 4.7 Які сили не розглядаються в теоремі про рух центра мас?
- 4.8 Як рухається центра мас системи, якщо рівнодіюча зовнішніх сил дорівнює нулю?
- 4.9 Який закон динаміки зв'язує три елементи руху: масу, швидкість, час?
- 4.10 Як визначається, що характеризує, як спрямований і яка розмірність кількості руху матеріальної точки?
- 4.11 Як визначаються проекції кількості руху на осі координат?
- 4.12 Чим визначається кількість руху?
- 4.13 Яка величина називається кількістю руху матеріальної системи?
- 4.14 Як визначається головний вектор кількості руху механічної системи?
- 4.15 Який рух характеризує кількість руху?
- 4.16 Яка розмірність імпульсу сили?
- 4.17 Як визначається імпульс змінної, постійної сили?
- 4.18 Як визначається імпульс механічної системи?

4.19 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки, механічної системи в інтегральній і диференціальній формі?

4.20 Як зміниться імпульс, якщо сума зовнішніх сил дорівнює нулю $\Sigma F_{ix} = 0$?

4.21 Як виглядає теорема про зміну кількості руху, якщо діючі зовнішні сили постійні?

4.22 Які сили впливають на зміну кількості руху?

4.23 Теорема про зміну кількості руху в проекції на координатні осі?

4.24 Що характеризує момент кількості руху (кінетичний момент)?

4.25 Як визначається кінетичний момент матеріальної точки щодо центра й осі, як спрямований його вектор, яка його розмірність?

Тестові завдання до теми 4

1. Якщо на систему, що складається з тіл масами 1 кг та 2 кг діє сила 3 Н, то прискорення її центра мас дорівнює:

1. 1 м/с²;
2. 6 м/с²;
3. 4 м/с²;
4. 8 м/с².

2. Знайти координату центра мас системи, яка складається з тіл масами 2 кг і 6 кг, координати яких відповідно дорівнюють 6 м і 2 м:

1. $x_c = 3$ м;
2. $x_c = 4$ м;
3. $x_c = 8$ м;
4. $x_c = 12$ м.

3. Направлений вектор кількості руху:

1. По дотичній до траєкторії;
2. По нормалі до траєкторії;
3. Під кутом до дотичній траєкторії;
4. Під кутом до нормалі траєкторії.

4. Кількість руху матеріальної точки характеризується:

1. Точкою прикладення, значенням, напрямом;
2. Значенням;
3. Значенням, напрямом;
4. Точкою прикладення, значенням.

5. Ефект дії сили за деякий проміжок часу визначається:

1. Імпульсом сили;
2. Кінетичною енергією;
3. Моментом кількості руху;

4. Роботою сили.

6. Виходячи з теореми про зміну кількості руху системи можливо встановити, що:

1. Внутрішніми силами неможливо змінити кількість руху системи;
2. Внутрішні сили змінюють кількість руху системи;
3. Зовнішні сили не змінюють кількості руху системи;
4. Зовнішні сили не впливають на рух центра мас;

7. Момент кількості руху (кінетичний момент) характеризує:

1. Запас енергії у обертальному русі;
2. Запас енергії у поступальному русі;
3. Обертальний ефект сили;
4. Плоско-паралельний рух тіла.

8. Момент кількості руху характеризується:

1. Точкою прикладення, значенням, напрямом;
2. Значенням;
3. Значенням, напрямом;
4. Точкою прикладення, значенням.

9. Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі характеризується:

1. Модулем, знаком;
2. Точкою прикладення, модулем;
3. Точкою прикладення, модулем, напрямом;
4. Точкою прикладення, модулем, напрямом, знаком.

10. Мірою дії сили на переміщенні є:

1. Робота сили;
2. Момент сили;
3. Імпульс сили;
4. Потужність.

11. Робота сили дорівнює нулю коли:

1. Сила перпендикулярна переміщенню;
2. Сила паралельна переміщенню;
3. Сила та переміщення напрямлені вздовж однієї прямої;
4. Напрями сили та переміщення співпадають.

12. Робота сили максимальна коли:

1. Сили та переміщення напрямлені вздовж однієї прямої в одну сторону;
2. Сила перпендикулярна переміщенню;
3. Сила паралельна переміщенню;
4. Сила та переміщення напрямлені в одну сторону.

13. Робота позитивна коли:

1. Сила та переміщення напрямлені в одну сторону;
2. Сила та переміщення напрямлені в різні сторони;
3. Сила перпендикулярна переміщенню;
4. Сила паралельна переміщенню.

14. Робота негативна коли:

1. Сила та переміщення напрямлені в різні сторони;
2. Сила та переміщення напрямлені в одну сторону;
3. Сила перпендикулярна переміщенню;
4. Сила паралельна переміщенню.

15. Потужність це:

1. Робота виконана в одиницю часу;
2. Робота виконана на одиниці довжини;
3. Сила, що розвиває певне прискорення;
4. Сила діюча за одиницю часу.

16. Робота сили тяжіння залежить від:

1. Початкової та кінцевої висоти матеріальної точки;
2. Форми траєкторії, що описує матеріальна точка;
3. Довжини шляху, пройденого матеріальною точкою;
4. Форми траєкторії та довжини шляху, пройденого матеріальною

точкою.

17. Робота сили тертя:

1. Завжди негативна;
2. Завжди позитивна;
3. Завжди дорівнює нулю;
4. Може бути позитивною та негативною.

18. Загальна властивість усіх матеріальних об'єктів:

1. Інертність;
2. Швидкість.
3. Прискорення;
4. Момент інерції.

19. В системі СІ одиницею вимірювання потужності є:

1. [Вт] ;
2. [Дж] ;
3. [Н] ;
4. [к.с.].

20. В системі СІ одиницею вимірювання роботи сили є:

1. [Дж] ;
2. [Вт] ;
3. [Н] ;

4. [кГ].

21. Робота сили пружності залежить від:

1. Переміщення точки її прикладень;
2. Форми траєкторії, що описує матеріальна точка;
3. Маса матеріальної точки;
4. Прискорення матеріальної точки.

22. Потужність сили, що прикладена до обертового тіла залежить від:

1. Моменту цієї сили відносно осі обертання та кутової швидкості тіла;
2. Моменту цієї сили відносно осі обертання та кута повороту;
3. Модулю діючої на тіло сили та кутової швидкості тіла;
4. Модулю діючої на тіло сили та кута повороту.

22. Елементарна робота сили, яка прикладена до тіла, що обертається дорівнює...

1. Добутку моменту цієї сили відносно осі на елементарний кут повороту;
2. Добутку модулю сили прикладеної до тіла на кутову швидкість;
3. Добутку моменту цієї сили відносно осі на кутову швидкість;
4. Добутку моменту цієї сили відносно осі обертання на кут повороту.

23. Повна робота сили, яка прикладена до тіла що обертається дорівнює...

1. Інтегралу від елементарної роботи;
2. Добутку моменту сили на кут повороту;
3. Добутку сили, що прикладена до тіла на кутову швидкість;
4. Інтегралу від моменту сили.

24. Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює...

1. Половині добутку маси точки на квадрат її швидкості;
2. Добутку маси точки на її швидкість;
3. Добутку маси точки на її прискорення;
4. Половині добутку маси точки на квадрат її прискорення.

25. Кінетична енергія механічної системи це...

1. Скалярна величина, яка дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих точок, що складають систему;
2. Векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі кінетичних енергій окремих точок, що складають систему;
3. Добуток маси системи на швидкість її центру мас;
4. Половина добутку маси системи на прискорення її центру мас.

26. Кінетична енергія тіла, яка рухається поступально дорівнює...

1. Половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас;
2. Добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас;
3. Подвійному добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас;
4. Половині добутку маси тіла на квадрат прискорення центра мас.

27. Кінетична енергія тіла, яка обертається дорівнює...

1. Половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості;
2. Половині добутку маси тіла на квадрат кутової швидкості;
3. Подвійному добутку моменту інерції відносно осі на квадрат кутової швидкості;
4. Добутку маси тіла на кутове прискорення.

28. Кінетична енергія тіла, яка рухається плоскопаралельно дорівнює...

1. Сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас;
2. Добутку енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас;
3. Половині добутку енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас;
4. Подвійній сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас та обертального руху навколо центра мас.

29. Кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання залежить від:

1. Моменту інерції тіла відносно осі і кутової швидкості тіла;
2. Моменту інерції тіла відносно осі і кутового прискорення тіла;
3. Моменту інерції тіла відносно осі та кута повороту тіла;
4. Половині моменту інерції тіла відносно осі та кутової швидкості тіла.

30. Елементарний імпульс сили це...

1. Векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії;
2. Скалярна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на елементарний проміжок часу її дії;
3. Векторна величина, яка дорівнює половині добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії;
4. Векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарне переміщення.

ТЕМА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

План

- 5.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки
- 5.2 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок
- 5.3 Принципи можливих переміщень і можливих швидкостей
- 5.4 Умови рівноваги системи в узагальнених координатах
- 5.5 Рівняння Лагранжа

У цьому розділі ми відповімо на запитання, що таке відцентрова сила та чи існують так звані сили інерції?

Принцип Даламбера, до розгляду якого ми переходимо, істотно відрізняється від загальних теорем динаміки.

Якщо останні дозволяють отримати перший інтеграл і просунутися на один крок у розв'язанні задачі Коші для диференціального рівняння руху, то принцип Даламбера в математичному аспекті нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки.

Однак цей принцип має важливе методологічне значення, даючи змогу звести за формою розв'язання першої задачі динаміки до задачі статички.

Крім того, цей принцип знаходить ефективне застосування спільно з принципом можливих переміщень, розглянутим у наступному розділі.

5.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Форма запису рівняння руху відповідно до законів Ньютона не є єдиною. Ці рівняння можуть бути записані й в інших формах. Одну з таких можливостей представляє принцип Даламбера, який формально дає змогу диференціальним рівнянням руху надати вигляду рівнянь рівноваги.

Цей принцип можна розглядати як самостійну аксіому, що замінює другий закон Ньютона. Використаємо його як засіб розв'язання задач і виведемо його із закону Ньютона.

Розглянемо матеріальну точку M з масою m , що рухається під дією сили $\vec{F}$.

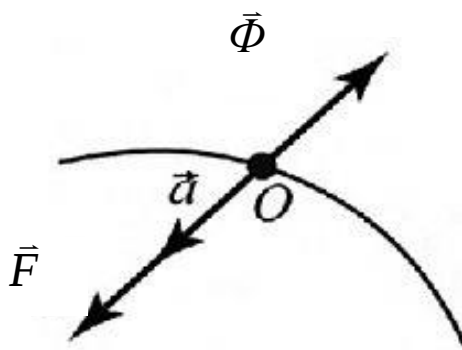


Рисунок 5.1 - До визначення принципу Даламбера для матеріальної точки

Основне рівняння динаміки для цієї точки:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (5.1)$$

можна записати у вигляді:

$$F + \Phi = 0, \quad (5.2)$$

де Φ – сила інерції, або даламберова сила:

Рівняння (5.2) і є принципом Даламбера для вільної матеріальної точки: *якщо до прикладених до точки сил додати силу інерції, то точка перебуватиме в стані рівноваги.*

Строго кажучи, висловлене положення не є принципом Даламбера в тій формі, в якій він був сформульований автором.

Даламбер розглядав невідільний рух точки, не використовуючи принцип звільнюваності від в'язей, не вводячи реакцію в'язі. Зазначаючи, що за наявності в'язі прискорення точки не збігається за напрямком із силою, він увів поняття втраченої сили P і висловив твердження, що додавання до точки втраченої сили не порушує її стан рівноваги, оскільки втрачена сила врівноважується реакцією зв'язку.

Рівняння (5.2) за формою збігається з рівнянням статички, і його застосування нерідко виявляється зручнішим, ніж використання рівняння (5.1).

5.2 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок

Розглянемо систему n матеріальних точок M_i с масами m_i . Записуючи рівняння (5.2) для кожної i -ої точки:

$$F_i^{(e)} + F_i^{(i)} + \Phi_i = 0, \quad (5.3)$$

а потім, підсумовуючи по всіх точках системи, отримаємо:

$$R^{(e)} + \Phi_0 = 0, \quad (5.4)$$

де $R^{(e)} = \sum F_i^{(e)}$ – головний вектор зовнішніх сил;

$\Phi_0 = \sum \Phi_i$ – головний вектор сил інерції системи.

Помноживши (5.3) векторно зліва на радіус-вектор r_i , а потім підсумувавши по всіх точках системи, отримаємо:

$$M_0^{(e)} + M_0^{in} = 0, \quad (5.5)$$

де $M_0^{(e)} = \sum (r_s \times F_s^{(e)})$ – головний момент зовнішніх сил;

$M_0^{in} = \sum (r_i \times \Phi_i)$ – головний момент сил інерції системи щодо центру приведення О.

Таким чином, принцип Даламбера для системи можна сформулювати в такому вигляді.

У кожен момент часу сума головного вектора зовнішніх сил і головного вектора сил інерції, а також сума головного моменту зовнішніх сил і головного моменту сил інерції дорівнюють нулю.

Головний вектор і головний момент сил інерції можна виразити через кінематичні параметри системи, якщо спочатку за допомогою (5.4) і (5.5) виразити їх через прикладене до системи навантаження, а потім скористатися теоремою про зміну кількості руху:

$$\frac{dQ}{dt} = R^{(e)},$$

і теоремою про зміну кінетичного моменту системи:

$$\frac{dK_0}{dt} = M_0^{(e)}.$$

Відповідні формули з урахуванням $Ma_c = M \left(\frac{dv_c}{dt} \right) = R^{(e)}$ набудуть вигляду:

$$\Phi_0 = -\frac{dQ}{dt} = -Ma_c, \quad (5.6)$$

де M - маса системи;

a_c - прискорення центру мас.

$$M_0^{in} = -\frac{dK_0}{dt}, \quad (5.7)$$

Примітки:

1. Головний вектор Φ_0 не залежить, а головний момент M_0^{in} залежить від вибору центру приведення.
2. Два векторних рівняння (5.4) і (5.5) еквівалентні трьом скалярним на площині та шести скалярним у просторі.

Приведення сил інерції твердого тіла

У загальному випадку сили інерції, прикладені до кожної точки твердого тіла, можна замінити головним вектором Φ_0 і головним моментом M_0^{in} , які визначаються виразами (5.6) і (5.7).

Розглянемо приведення сил інерції твердого тіла залежно від виду його руху.

Поступальний рух тіла

Теорема. При поступальному русі ТТ сили інерції приводяться до рівнодійної, що прикладена в центрі мас і дорівнює:

$$\Phi_0 = -Ma_c, \quad (5.8)$$

де M - маса тіла;

a_c - прискорення центру мас.

Доказ. Обираючи за центр приведення центр мас і враховуючи, що під час поступального руху прискорення всіх точок тіла дорівнюють: $a_i = a_c$, отримаємо:

$$\Phi_c = -Ma_c, \quad (5.9)$$

$$M_c^{in} = \sum (\vec{r}_i \times \Phi_i) = -\sum (\vec{r}_i \times m_i a_i) = -\sum (m_i \vec{r}_i) = -M\vec{r}_i \times a_c$$

оскільки $\vec{r}_i = 0$. Таким чином, $\Phi_c \neq 0$, $M_c^{in} = 0$, звідки випливає, що головний вектор еквівалентний рівнодійній сил інерції: $\Phi_c \sim \Phi$.

Теорему доведено.

Обертання тіла навколо нерухомої головної центральної осі

Теорема. Під час обертання тіла навколо нерухомої головної центральної осі сили інерції приводяться до пари сил з моментом, що дорівнює добутку моменту інерції відносно осі обертання на кутове прискорення:

$$M_c^{in} = -J_z \varepsilon, \quad (5.9)$$

Доказ. Нехай тіло обертається навколо головної центральної осі Oz з кутовим прискоренням $\varepsilon (0, 0, \varepsilon_z)$.

Обираючи як центр приведення центр мас, що лежить на цій осі, згідно з формулами (5.6) і (5.7) отримаємо:

$$\Phi_c = -Ma_c = 0,$$

$$M_c^{ih} = -\frac{dK_c}{dt}.$$

де

$$K_c = K_x i + K_y j + K_z k,$$

а з урахуванням формул:

$$K_x = -J_x \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z;$$

$$K_y = -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y + J_{yz} \omega_z;$$

$$K_z = -J_{xz} \omega_x + J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z.$$

$$M_c^{ih} = J_{xz} \varepsilon_z i + J_{yz} \varepsilon_z j - J_z \varepsilon_z k = -J_z \varepsilon_z k = -J_z \varepsilon_z$$

оскільки для головної осі інерції Oz :

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Отже, $\Phi_c = 0$, $M_c^{ih} \neq 0$, звідки випливає, що система еквівалентна парі сил.

Теорему доведено.

Примітка

Якщо вісь, навколо якої обертається тіло, не є центральною, то головний вектор сил інерції $\Phi_c \neq 0$, при цьому

$$\Phi_c = \Phi_c^\omega + \Phi_c^\varepsilon,$$

де $\Phi_c^\omega = -Ma_c^\omega$ та $\Phi_c^\varepsilon = -Ma_c^\varepsilon$ відповідно є відцентровою та обертальною силами інерції, прикладеними в центрі мас цього тіла.

Плоский рух тіла з площиною симетрії

Теорема. При плоскому русі тіла з площиною симетрії сили інерції приводяться до головного вектора і головного моменту:

$$\begin{aligned}\Phi_c &= -Ma_c = 0, \\ M_c^{in} &= -J_z \varepsilon,\end{aligned}\quad (5.10)$$

Доказ. Оскільки тіло має площину симетрії, його центр мас лежить у цій площині, а вісь, що проходить через нього і перпендикулярна цій площині, буде головною центральною віссю інерції тіла.

Вибираючи як центр приведення центр мас, що лежить на цій осі, згідно з формулами (5.6) і (5.7) отримаємо (5.10).

Теорему доведено.

Приклад 5.1

Визначити прискорення вантажу A - a_A і реакцію підшипника N_B , приймаючи барабан B за однорідний циліндр і вважаючи $m_A = m_B$ (рис. 5.2, а).

Розв'язання

Система складається з двох тіл: вантажу A , що поступально рухається і барабана B , що обертається.

Відповідно до принципу Даламбера прикладаємо до системи активні сили P_A і P_B та реакцію підшипника N_B (рис. 5.2, б).

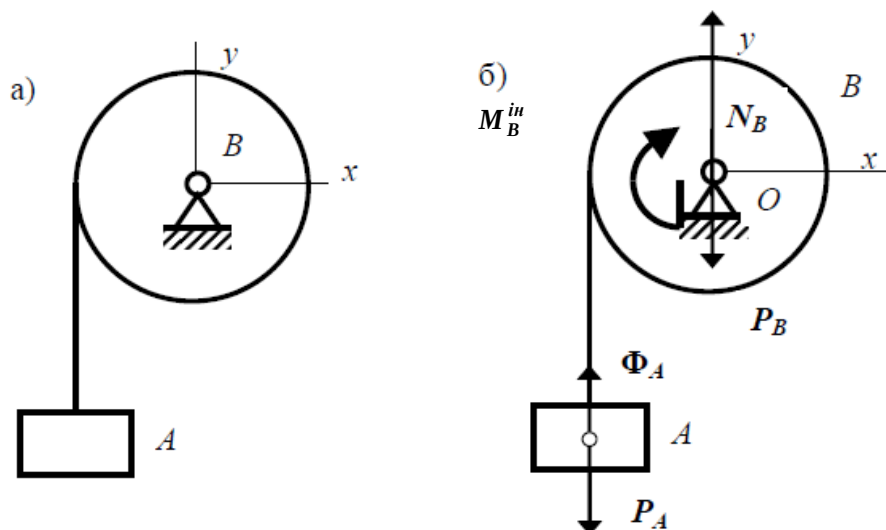


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема до прикладу 5.1

Сили інерції тіла A , що поступально рухається, замінюємо згідно з (5.8) рівнодійною:

$$|\Phi_A| = \Phi_A = m_A a_A,$$

а сили інерції барабана B - згідно з (5.9) моментом:

$$M_B^{ih} = J_B \varepsilon_B = \left(\frac{m_B R^2}{2} \right) \left(\frac{a_A}{R} \right) = \left(\frac{m_B R}{2} \right) \cdot a_A.$$

Визначення невідомих a_A і N_B за формою не відрізняється від визначення опорних реакцій балок.

Щоб знайти a_A , складемо рівняння, яке не містить N_B :

$$\sum M_0 = 0; \quad (P_A - \Phi_A) \cdot R - M_B^{ih} = 0;$$

$$(m_A g - m_A a_A) \cdot R - \left(\frac{m_B R}{2} \right) \cdot a_A = 0.$$

$$\text{звідки } a_A = \left(\frac{2}{3} \right) g.$$

Реакцію N_B знайдемо з умови:

$$\sum Y = 0; \quad -P_A + \Phi_A + N_B - P_B = 0.$$

звідки

$$N_B = P_A - \Phi_A + P_B = mg - ma_A + mg = mg - \left(\frac{2}{3} \right) mg = \left(\frac{4}{3} \right) mg.$$

Для перевірки розв'язання можна скористатися рівнянням:

$$\sum M_A = -M_B^{ih} + N_B R - P_B R = -\left(\frac{mR}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \right) g + \left(\frac{4}{3} \right) mgR - mgR = 0.$$

$$\text{Відповідь: } a_A = \left(\frac{2}{3} \right) g; \quad N_B = \left(\frac{4}{3} \right) mg.$$

Приклад 5.2

Визначити силу натягу ниток T_{AB} і T_{BC} , приймаючи B і C за однорідні циліндри і вважаючи кут $\alpha = 30^\circ$, а маси всіх тіл однаковими і рівними m (рис. 5.3).

Розв'язання

Будемо вважати знайдене раніше прискорення тіла A - a_A відомим і для зазначених даних рівним:

$$a_A = \left(\frac{8}{15} \right) \cdot (1 - 0,5 \sin \alpha) g = \left(\frac{8}{15} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \right) g = \left(\frac{2}{5} \right) g$$

Тоді для визначення T_{AB} і T_{BC} достатньо розглянути динамічну рівновагу тіла A і барабана B .

У першому випадку прикладаємо до тіла A , що рухається поступально, активну силу P_A , силу натягу нитки T_{AB} і силу інерції Φ_A (рис. 5.3, б).

Проектуючи векторну рівність:

$$P_A + T_{AB} + \Phi_A = 0,$$

на напрям вектора P_A , отримаємо:

$$P_A - T_{AB} - \Phi_A = 0,$$

звідки:

$$T_{AB} = P_A - \Phi_A = m(g - a_A) = \left(\frac{3}{5}\right)mg.$$

Для знаходження T_{BC} розглянемо динамічну рівновагу барабана B , доклавши до нього активну силу - вагу P_B , реакції зв'язків N_{BX} , N_{BY} , T_{BA} , T_{BC} і головний момент сил інерції M_B^{ih} (рис. 5.3, в).

Умова рівності нулю суми моментів усіх сил відносно осі його обертання - $\sum M_B = 0$ набуде вигляду:

$$(T_{BC} - T_{BA})K + M_B^{ih} = 0,$$

звідки:

$$T_{BC} = \frac{M_B^{ih}}{R} + T_{BA} = -\left(\frac{mR^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_A}{R^2}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)mg = -\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)g + \left(\frac{3}{5}\right)mg = \left(\frac{2}{5}\right)mg$$

Перевіримо правильність знайденого рішення за допомогою рівняння:

$\sum M_P^{(c)} = 0$, де P - миттєвий центр швидкостей диска C (рисунок 5.3г), розглядаючи його динамічну рівновагу під дією сили ваги P_C , реакцій зв'язків: N_C , F_C , T_{CB} , а також головного вектора Φ_C і головного моменту M_C^{ih} сил інерції:

$$\begin{aligned} & (\Phi_C + P_C \sin \alpha)R + M_C^{ih} - T_{CB}2R = \\ & = (m_C a_C + m_C g \sin 30^\circ)R + \left(\frac{m_C R^2}{2}\right) \cdot \varepsilon_C - T_{CB}2R = \end{aligned}$$

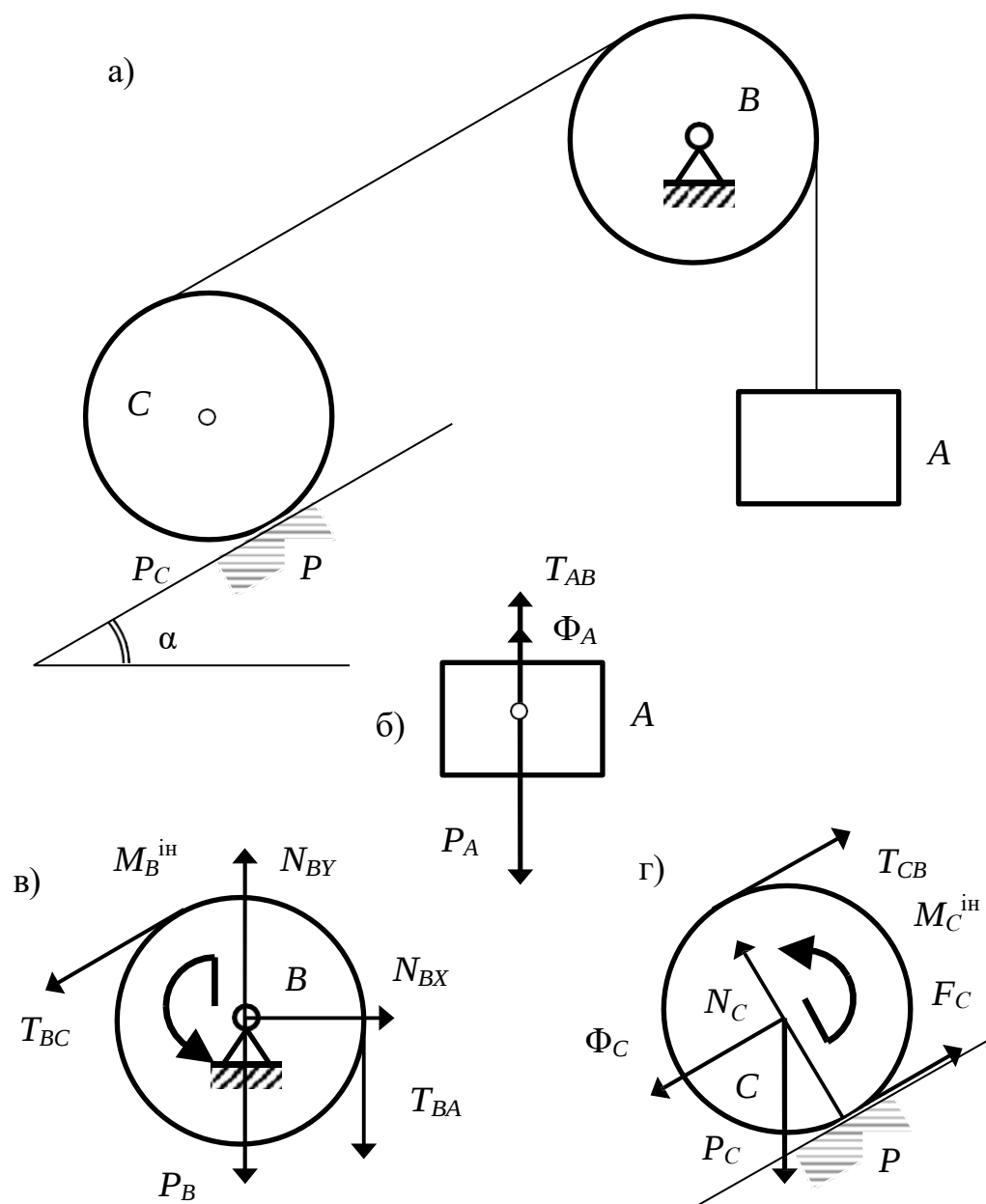


Рисунок 5.3 – Розрахункова схема до прикладу 5.2

$$\begin{aligned}
 &= \left[m_C \left(\frac{a_A}{2} \right) + \frac{m_C g}{2} \right] \cdot R + \left(\frac{m_C R^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{a_A}{2R} \right) - \left(\frac{4}{5} \right) mgR = \\
 &= mR \left[\left(\frac{1}{5} \right) g + \left(\frac{1}{2} \right) g + \left(\frac{1}{10} \right) g - \left(\frac{4}{5} \right) g \right] = \\
 &= \left(\frac{mgR}{20} \right) \cdot (4 + 10 + 2 - 16) = 0.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $T_{AB} = T_{BA} = \left(\frac{3}{5} \right) mg$;

$$T_{BC} = T_{CB} = \left(\frac{2}{5}\right)mg.$$

Примітки:

1. Зазначимо, що в останньому прикладі було б нераціонально одночасно визначати прискорення a_A і натяг ниток T_{BA} і T_{BC} за допомогою принципу Даламбера, оскільки, по-перше, довелося б розв'язувати систему трьох рівнянь із трьома невідомими, а, по-друге, ми не змогли б ефективно перевірити правильність знайденого розв'язання.

2. Розглядаючи динамічну рівновагу диска C , можна знайти динамічну силу тертя F_C .

Приклад 5.3

Однорідний стрижень OA вагою P і довжиною l опускається без початкової швидкості з положення нестійкої рівноваги ($\varphi = 0$). Знайти реакції шарніра O при $\varphi = \pi/2$ (рис. 5.4).

Розв'язання

Розглянемо динамічну рівновагу стрижня в той момент часу, коли він займає горизонтальне положення, докладаючи до нього активну силу ваги P , складові реакції шарніра N_x , N_y і сили інерції.

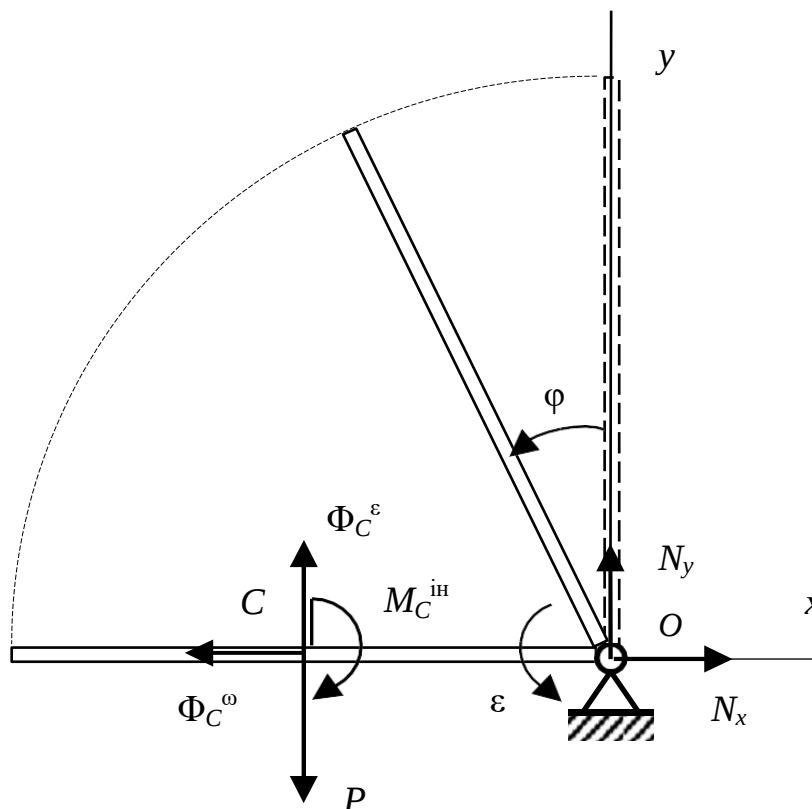


Рисунок 5.4 – Розрахункова схема до прикладу 5.3

Останні, оскільки стрижень обертається навколо осі, яка не є центральною, приводяться до головного вектора і головного моменту – як у загальному випадку плоского руху тіла:

$$\begin{aligned}\Phi_C &= ma_C; \\ M_c^{in} &= J_z \varepsilon = \left(\frac{ml^2}{12} \right) \cdot \varepsilon,\end{aligned}\tag{a}$$

де $m = (P/g)$ – маса стержня.

Центр мас стержня рухається по колу радіуса $l/2$, тому його прискорення має доцентрову та обертальну складові:

$$a_C = a_C^\omega + a_C^\varepsilon,$$

яким відповідають відцентрова та обертальна сили інерції, рівні за модулем:

$$\Phi_C^\omega = ma_C^\omega = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (m\omega^2 l),\tag{б}$$

$$\Phi_C^\varepsilon = ma_C^\varepsilon = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (m\omega \cdot l),\tag{в}$$

Невідомими в даній задачі будуть: N_x , N_y , ε і ω , а оскільки кількість невідомих перевищує кількість рівнянь принципу Даламбера, знайдемо попередньо кутову швидкість стержня за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_2 - T_1 = A_{12},\tag{г}$$

де $T_2 = \left(\frac{1}{2} \right) J_0 \omega^2 = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{ml^2}{3} \right) \cdot \omega^2$, $T_1 = 0$ – за умовою задачі, а робота сили тяжіння стержня $A_{12} = mg \left(\frac{1}{2} \right)$.

Підставляючи в (г), отримаємо:

$$\left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{ml^2}{3} \right) \cdot \omega^2 = mg \left(\frac{1}{2} \right),$$

звідки знайдемо шукану швидкість стержня в горизонтальному положенні:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Щоб знайти кутове прискорення ε , складемо рівняння $\sum M_0 = 0$, яке не містить N_x і N_y :

$$(P - \Phi_C^\varepsilon) \left(\frac{l}{2} \right) - M_C^{in} = 0.$$

Підставляючи сюди (а) і (в), отримаємо:

$$\left[mg = m \left(\frac{\varepsilon \cdot l}{2} \right) \right] \cdot \left(\frac{l}{2} \right) = \left(\frac{m \cdot l^2}{12} \right) \cdot \varepsilon,$$

звідки

$$6g = \varepsilon \cdot l(3 + 1)$$

або

$$\varepsilon = \left(\frac{6g}{2 \cdot l} \right).$$

Тепер, знаючи ω і ε , легко знайти шукані реакції N_x і N_y , скориставшись рівняннями $\sum X_i = 0$ та $\sum Y_i = 0$:

$$N_x = \Phi_C^\omega = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (m\omega^2 l) = \left(\frac{3}{2} \right) mg = \left(\frac{3}{2} \right) \cdot P;$$

$$N_y = P - \Phi_C^\varepsilon = P - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (m\varepsilon \cdot l) = P - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{P}{g} \right) \cdot \left(\frac{3g}{2} \right) = \frac{P}{4}$$

$$\text{Відповідь: } N_x = \left(\frac{3}{2} \right) \cdot P; \quad N_y = \frac{P}{4}.$$

Визначення динамічних реакцій

Відомо, що вісь, навколо якої обертається тіло і про яку йдеться в попередньому параграфі, має бути центральною – з цією метою проводять балансування коліс, маховиків та інших деталей, що обертаються.

Однак ця умова є недостатньою, і якщо вісь обертання є центральною, але не *головною*, з'являються *динамічні опорні реакції*, яких не було в стані спокою.

Розглянемо це явище на такому прикладі. Нехай стрижень DE масою M і довжиною l закріплений у підшипниках A і B під кутом α до

вертикальної осі Oz і обертається навколо неї з постійною кутовою швидкістю ω (рисунок 5.5).

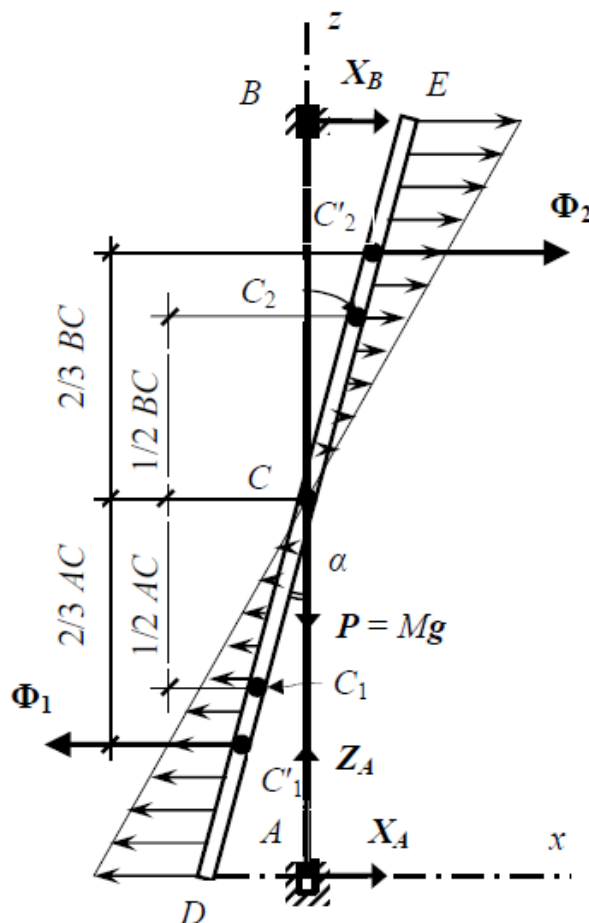


Рисунок 5.5 – Визначення динамічних реакцій

Зазначимо, що в стані спокою горизонтальні опорні реакції в підшипниках A і B , розташованих на одній горизонталі з точками D і E , дорівнюватимуть нулю, а реакція Z_A дорівнюватиме вазі стержня $P = Mg$.

На кожну точку стержня, що обертається, діє доцентрове прискорення $a_\omega = \omega^2 R$, де R – відстань точки від осі обертання, а відповідно до принципу Даламбера – *відцентрова сила інерції*.

Будемо аналізувати рух стержня в системі координат xAz , пов'язаній зі стержнем і розташованій із ним в одній площині.

Розглянемо динамічну рівновагу стержня, що обертається, доклавши до нього активну силу $P = Mg$, реакції в'язей X_A , Z_A , X_B і відцентрові сили інерції, що змінюються за лінійним законом.

Вибираючи центр мас C як центр приведення сил інерції, отримаємо, що відповідно до формули (5.6) головний вектор сил інерції дорівнює нулю:

$$\Phi_C = -ma_C = 0,$$

оскільки точка C залишається нерухомою, а головний момент сил інерції M_C^{in} дорівнюватиме моменту пари сил (Φ_1, Φ_2) , де Φ_1 - рівнодійна сил інерції, прикладених до нижньої, а Φ_2 - до верхньої частини стержня.

При цьому за модулем сили Φ_1 і Φ_2 дорівнюють головним векторам сил інерції відповідних частин стрижня, які за формулою (5.6) дорівнюють:

$$|\Phi_{C1}| = \left(\frac{M}{2}\right)a_{C1} = \left(\frac{M}{2}\right)\omega^2|x_{C1}| = \left(\frac{M\omega^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{4}\right)\sin\alpha = \left(\frac{M\omega^2 l}{8}\right) \cdot \sin\alpha;$$

$$|\Phi_{C2}| = \left(\frac{M}{2}\right)a_{C2} = \left(\frac{M\omega^2 l}{8}\right) \cdot \sin\alpha$$

і відрізняються від головних векторів тільки точками прикладання – рівнодійні Φ_1 і Φ_2 будуть прикладені в точках C'_1 і C'_2 відповідно. Ці точки розташовані проти центрів ваги трикутників, що представляють розподілене навантаження.

Отже, сили інерції всього стрижня приводяться до пари сил (Φ_1, Φ_2) з моментом:

$$M_C^{in} = \Phi_1 \left(\frac{2}{3}\right)AB = \left(\frac{M\omega^2 l}{8}\right) \cdot \sin\alpha \left(\frac{2}{3}\right) \cdot l \cdot \cos\alpha = \left(\frac{M\omega^2 l^2}{12}\right) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Тепер, склавши рівняння рівноваги $\sum M_A = 0$, отримаємо:

$$-X_B \cdot l \cdot \cos\alpha - M_C^{in} = 0,$$

звідки знайдемо шукані динамічні реакції:

$$X_B = -X_A = -\frac{M_C^{in}}{l \cdot \cos\alpha} = \left(\frac{M\omega^2 l^2}{12}\right) \cdot \sin\alpha.$$

$$\text{Відповідь: } X_A = \left(\frac{M\omega^2 l^2}{12}\right) \cdot \sin\alpha;$$

$$X_B = -\left(\frac{M\omega^2 l^2}{12}\right) \cdot \sin\alpha$$

5.3 Динаміка відносного руху точки

Принцип Даламбера зручний під час розгляду складного руху точки, коли остання переміщується відносно тіла, з яким пов'язана локальна система відліку, і одночасно пересувається разом із цим тілом, беручи участь у переносному русі.

Уже зазначалося, що якщо система відліку не є інерціальною, у ній не виконується основне рівняння динаміки, а закони руху точки в локальній і глобальній системах будуть різними.

Нагадаємо, що відповідно до теореми про прискорення точки в складному русі її абсолютне прискорення дорівнює геометричній сумі трьох прискорень – відносного, переносного і коріолісового:

$$a^a = a^r + a^e + a^k,$$

тому співвідношення (5.1) і (5.2) набудуть вигляду:

$$ma^r = F + \Phi^e + \Phi^k,$$

$$F + \Phi^r + \Phi^e + \Phi^k,$$

де F рівнодійна всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до точки, а $\Phi^r = -ma^r$; $\Phi^e = -ma^e$ і $\Phi^k = -ma^k$ – відповідно: *відносна, переносна і коріолісова* сили інерції.

При цьому залежність (5.11) – являє собою диференціальне рівняння відносного руху точки в локальній системі координат, пов'язаній із рухомим тілом:

$$\frac{m(d^2r)}{(dt^2)} = F + \Phi^e - 2m \left[\omega^e \times \frac{(dr)}{(dt)} \right],$$

де r – радіус-вектор точки в локальній системі відліку;

ω^e - кутова швидкість обертання пов'язаного з нею тіла.

Таким чином, відносний рух точки під дією сили F у неінерціальній системі відліку не відрізняється від руху тієї самої точки в інерціальній системі відліку, на яку, крім сили F , діють додатково сили Φ^e і Φ^k . Аналогічне зауваження можна зробити і щодо формули (5.12).

Під час розв'язання більшості технічних проблем систему координат, пов'язану із Землею, вважають інерціальною, нехтуючи тим самим двома останніми доданками у виразі (5.11). Однак у деяких випадках, наприклад за великих значень відносної швидкості $v^r = (dr)/(dt)$, їхнє врахування

стає необхідним, оскільки разом із v^r зростає прискорення Коріоліса $a^k = 2[\omega^e \times v^r]$, а отже, і Φ^k .

Приклад 5.4

Визначити величину прискорення Коріоліса для супутника, виведеного на кругову полярну орбіту на висоті $H = 100$ км.

Розв'язання

На супутник із масою m діє сила тяжіння, обернено пропорційна квадрату відстані від центру Землі:

$$F = \frac{(mgR^2)}{x^2},$$

де R – радіус Землі.

Визначимо спочатку, дотримуючись умов задачі, швидкість руху супутника, розглядаючи його рух як абсолютний. Проектуючи основне рівняння динаміки на напрямок нормалі до заданої траєкторії, отримаємо:

$$\frac{m(v^r)^2}{(R+H)} = \frac{(mgR^2)}{(R+H)^2},$$

Звідки

$$v = \sqrt{\frac{(gR^2)}{(R+H)}} = R \sqrt{\frac{g}{(R+H)}};$$

$$v = 6370 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{(9,81)}{(6470 \cdot 10^3)}} = 7840 \text{ м/с.}$$

Шукане прискорення Коріоліса досягатиме максимального значення на полюсі, де абсолютна швидкість супутника збігається з відносною v^r :

$$a^k = 2|\omega^e| \cdot |v^r|;$$

$$a^k = 2 \cdot 0,726 \cdot 10^{-4} \cdot 0,784 \cdot 10^{-4} = 1,13 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

де

$$\omega^e = \frac{(2\pi)}{(24 \cdot 60 \cdot 60)};$$

$$\omega^e = \frac{(2 \cdot 3,14)}{(24 \cdot 60 \cdot 60)} = 0,726 \cdot 10^{-4} \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

- кутова швидкість обертання Землі.

Відповідна цьому прискоренню коріолісова сила інерції Φ^k у північній півкулі спрямована вправо і викликає відхід супутника з полярної орбіти.

Відповідь: $a^k = 1,13(\text{м/с}^2)$.

Прискорення Коріоліса впливає на виникнення й особливості перебігу багатьох природних процесів, включно з морськими та повітряними течіями. Ним, зокрема, пояснюється та обставина, що у річок, які течуть у північній півкулі, високим буває правий, а в південній - лівий берег.

Примітки:

1. Можна навести ще один приклад, коли система відліку, пов'язана із Землею, не може вважатися інерційною і необхідно враховувати прискорення Коріоліса.

Під час конфлікту між Аргентиною і Великою Британією з приводу Фолклендських островів ескадра ВМС останньої перебазувалася з північної півкулі на південну і приступила до бойових операцій. Для пристріляних за місцем постійної дислокації корабельних гармат за дальності стрільби в 10 кілометрів і початкової швидкості снаряда, що дорівнює 500 м/с, його відхилення від цілі через зміну напрямку прискорення Коріоліса становило 25 метрів.

2. Щоб безпосередньо на собі відчувати дію прискорення Коріоліса, достатньо, скориставшись трамваем, проїхати від зупинки до зупинки.

Коли трамвай повертатиме праворуч, потрібно пройти по вагону до кабіни водія. За швидкості трамвая, що дорівнює 18 км/год, відносної швидкості пасажира 3,6 км/год і середнього радіусу кривизни рейок у 10 метрів переносне відцентрове і коріолісове прискорення за модулем відповідно дорівнюватимуть:

$$a^e = (\omega^e)^2 \cdot \rho = \frac{(v^e)^2}{\rho};$$

$$a^e = \frac{5^2}{10} = 2,5 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$a^k = 2 \cdot \omega^e \cdot v^r = \frac{2(v^e \cdot v^r)}{\rho};$$

$$a^k = \frac{2 \cdot 5 \cdot 1}{10} = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

При цьому $a^k \uparrow \uparrow a^e$ і сили інерції Φ^e і Φ^k спрямовані *ліворуч* за ходом руху пасажирів і трамвая. Якщо пасажир рухається вагоном у зворотному напрямку, то $a^k \uparrow \downarrow a^e$ і $\Phi^k \uparrow \uparrow \Phi^e$. Зазначимо, що сила Φ^k з'являється, на відміну від Φ^e , тільки за $v^r \neq 0$.

3. Вантаж, підвішений на нитці, що перебуває у стані відносного спокою, демонструє різницю між силою тяжіння Землі F і вагою тіла P , що дорівнює силі натягу нитки:

$$P = |P| = |F + \Phi^e|.$$

5.4 Принципи можливих переміщень і можливих швидкостей

Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень (ПМП) є основоположним у механіці. Його успішно використовують під час розв'язання статичних і динамічних задач теоретичної механіки, опору матеріалів, теорії пружності та будівельної механіки.

Основний внесок в обґрунтування і впровадження в практику ПМП був внесений Ж. Лагранжем.

Визначення. *Можливими переміщеннями точки називаються уявні нескінченно малі переміщення, що допускаються в кожен момент часу накладеними на неї зв'язками.*

Під *можливими переміщеннями* системи ми будемо розуміти множину можливих переміщень усіх її точок.

Розглянемо систему двох матеріальних точок A і B , розміщених на кінцях важеля, закріпленого в центрі O , і віддалених від цього центру на відстані l_A та l_B відповідно (рис. 5.6).

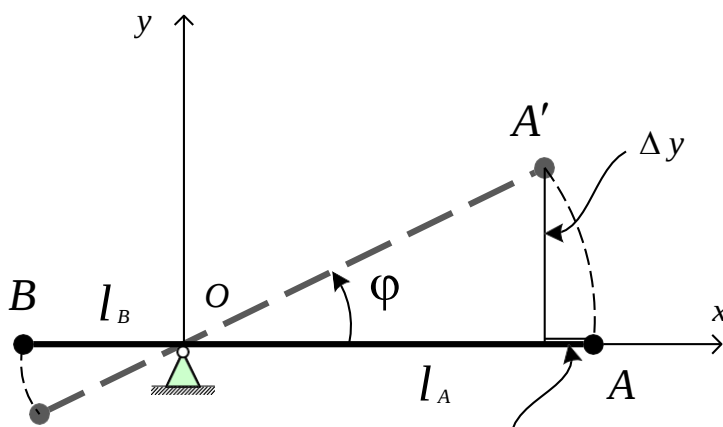


Рисунок 5.6 - Система двох матеріальних точок A і B

Така система має, очевидно, одну ступінь свободи, і її положення однозначно визначається завданням кута повороту стержня φ .

Кінцеве переміщення точки A зображується вектором $\Delta r = AA'$, проекції якого на осі координат дорівнюють приростам координат точки A :

$$\Delta x = x_{A'} - x_A = -l_A(1 - \cos \varphi);$$

$$d\Delta y = y_{A'} - y_A = l_A \sin \varphi$$

Елементарне переміщення точки A визначається вектором dr , проекції якого на осі координат дорівнюють диференціалам координат точки A :

$$dx = \left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} d\varphi = -l_A(\sin \varphi) \Big|_{\varphi=0} d\varphi = 0;$$

$$dy = \left[\frac{\partial(\Delta y)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} d\varphi = l_A(1 - \cos \varphi) \Big|_{\varphi=0} d\varphi = l_A d\varphi.$$

Можливим переміщенням точки A буде вектор $\delta r(\delta x, \delta y)$, який відрізняється від вектора $dr(dx, dy)$ тільки тим, що є не дійсним, а уявним, і його проекції на осі координат називаються не *диференціалами*, а *варіаціями* координат:

$$\delta x = \left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} \delta \varphi = 0;$$

$$\delta y = \left[\frac{\partial(\Delta y)}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0} \delta \varphi = l_A \delta \varphi.$$

Перехід від кінцевих до елементарних або можливих переміщень точки A має наочну геометричну інтерпретацію і в даному випадку означає, що переміщення по дузі кола радіуса l_A замінюється переміщенням по дотичній до цього кола.

Зазначимо, що в розглянутому прикладі система підпорядкована геометричним, стаціонарним і двостороннім в'язям.

З'ясуємо, які умови в загальному випадку накладають в'язі на можливі переміщення точок системи.

Теорема 1. У кожен момент часу можливі переміщення точки лежать у площині, дотичній до поверхні в'язі.

Справді, можливе переміщення точки:

$$\partial r = \partial x i + \partial y j + \partial z k,$$

де δx , δy , δz - варіації її координат, має задовольняти рівнянню в'язі:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

тобто:

$$f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, t) = 0.$$

Розкладаючи останній вираз у ряд, отримаємо з точністю до нескінченно малих першого порядку:

$$f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, t) = f(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial z = 0,$$

звідки випливає, що

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial z = (\text{grad} f \cdot \partial r) = 0,$$

де вектор $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)k$ спрямований за нормаллю

до поверхні в'язі.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для стаціонарних в'язей елементарні дійсні переміщення точки належать до числа можливих: $dr = \delta r$, для нестаціонарних в'язей $dr \neq \delta r$.

Дійсно, траєкторія точки, підпорядкованої стаціонарній з'язі, належить поверхні цієї в'язі $f(x, y, z) = 0$, тому з безлічі можливих переміщень, які лежать у площині, дотичних до поверхні в'язі, завжди знайдеться δr , що збігається з елементарним дійсним переміщенням dr , направленим по дотичній до траєкторії.

Точка, на яку накладено нестаціонарну в'язь $f(x, y, z, t) = 0$, бере участь у складному русі. У кожен момент часу $t = t_1$ вона переміщується у відносному русі поверхнею в'язі $f(x, y, z, t_1) = 0$ і водночас у переносному русі переміщується разом із в'яззю $f(x, y, z, t) = 0$.

При цьому абсолютна траєкторія точки в загальному випадку не належить поверхні $f(x, y, z, t_1) = 0$, а отже $dr \neq \delta r$.

Теорему доведено.

Елементарна робота сил, прикладених до точок системи, на її можливих переміщеннях дорівнює $\delta A = \sum F_i \delta r_i$ і залежить від вибору δr_i .

Позначимо через N_i реакції в'язей, прикладених до точок системи.

Визначення. Зв'язки, прикладені до точок системи, називаються

ідеальними, якщо для будь-якого можливого переміщення системи виконується співвідношення:

$$\sum N_i \partial r_i = 0, \quad (5.11)$$

Прикладом системи, підпорядкованої ідеальним в'язям, є циліндр із намотаною на нього ниткою, який піднімається без прослизання похилою площиною (рисунок 5.3г).

Реакціями таких в'язей, прикладеними до тіла, будуть: N_1 – сила нормального тиску поверхні та N_2 – сила тертя.

Оскільки ці сили прикладено в точці контакту, що є миттєвим центром швидкостей, то для них виконується співвідношення (5.11).

Принципи можливих переміщень і можливих швидкостей

Принцип можливих переміщень (ПМП) еквівалентний рівнянням рівноваги елементарної статyki. Він формулюється таким чином.

Для рівноваги системи, підпорядкованої ідеальним, стаціонарним і двостороннім в'язям, необхідно і достатньо рівності нулю суми робіт усіх активних сил на будь-яких можливих переміщеннях системи:

$$\sum F_i \partial r_i = 0, \quad (5.12)$$

Принцип можна застосовувати також для систем із неідеальними й односторонніми в'язями. При цьому треба включити реакції таких в'язей до числа активних сил і переконатися, що на можливих переміщеннях системи вони зберігають свій знак

З огляду на те, що $v_i = dr_i/dt$, а для стаціонарних в'язей дійсні переміщення належать до числа можливих, рівнянню (5.12) можна надати форму принципу можливих швидкостей:

$$\sum (F_i v_i) = 0, \quad (5.13)$$

Він означає, що ***для рівноваги системи, підпорядкованої ідеальним, стаціонарним і двостороннім в'язям, необхідно і достатньо рівності нулю суми потужностей усіх активних сил на будь-яких можливих переміщеннях системи.***

За допомогою цього принципу можна визначати співвідношення між силами і моментами, прикладеними до рухомої механічної системи - механізму, а також знаходити опорні реакції нерухомих систем.

Щоб знайти залежність між силами і моментами, прикладеними до рухомої механічної системи, треба безпосередньо застосувати співвідношення (5.12) або (5.13), при цьому в першому випадку розв'язання зводиться до формальних математичних операцій, а в другому

– спирається на положення кінематики твердого тіла.

Для того щоб визначити опорні реакції нерухомої системи, заздалегідь треба скористатися принципом звільнення від в'язей.

Приклад 5.5

У кулісному механізмі під час хитання важеля OC навколо шарніра O повзун A , переміщаючись уздовж OC , приводить у рух стержень AB , який рухається в напрямних K . Знайти залежність між Q і P , якщо $OC = R$, $OK = l$ (рис. 5.7).

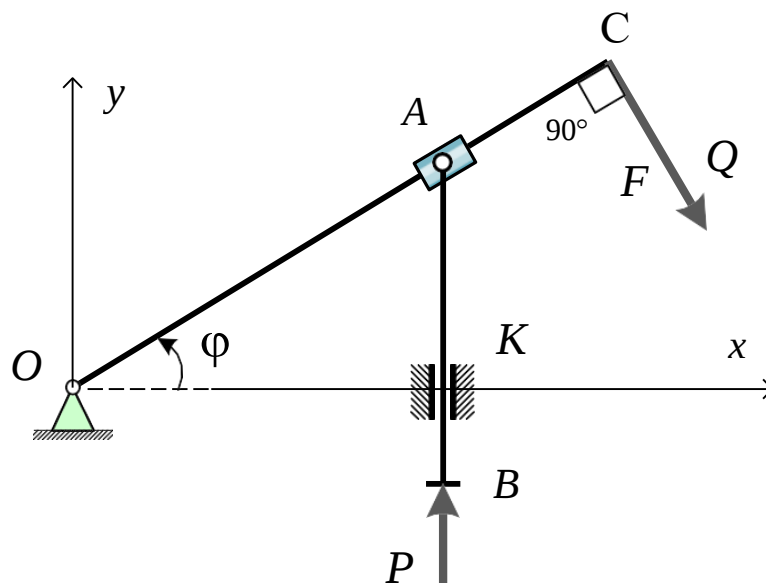


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема до прикладу 5.5

Розв'язання

Для нашої системи співвідношення (5.12) набуде вигляду:

$$P \cdot \partial r_i + Q \cdot \partial r_C = 0,$$

або в координатній формі:

$$P_x \cdot \partial x_A + P_y \cdot \partial y_A + Q_x \cdot \partial x_C + Q_y \cdot \partial y_C = 0, \quad (a)$$

де

$$P_x = 0; P_y = P; Q_x = Q \cdot \sin \varphi; Q_y = -Q \cdot \cos \varphi, \quad (б)$$

Враховуючи, що $y_A = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$; $x_C = R \cdot \cos \varphi$, а $y_C = R \cdot \sin \varphi$, за допомогою звичайних правил диференціювання знайдемо варіації координат для цих точок системи:

$$\partial y_A = \left(\frac{\partial y_A}{\partial \varphi} \right) \partial \varphi = \left(\frac{l}{\cos^2 \varphi} \right) \partial \varphi;$$

$$\partial x_C = -R \cdot \sin \varphi \partial \varphi, \quad (B)$$

$$\partial y_C = -R \cdot \cos \varphi \partial \varphi.$$

Підставляючи (б) і (в) у (а), прийдемо до співвідношення:

$$\left[\frac{(P \cdot l)}{(\cos^2 \varphi)} - Q \cdot R (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right] \partial \varphi = 0,$$

звідки отримаємо шукану залежність:

$$Q = \frac{(P \cdot l)}{R \cdot (\cos^2 \varphi)}.$$

Приклад 5.6

Визначити співвідношення між силою F і моментом M , за якого механізм, зображений на кресленні, перебуває в рівновазі, якщо $OA = r$ (рис. 5.8а).

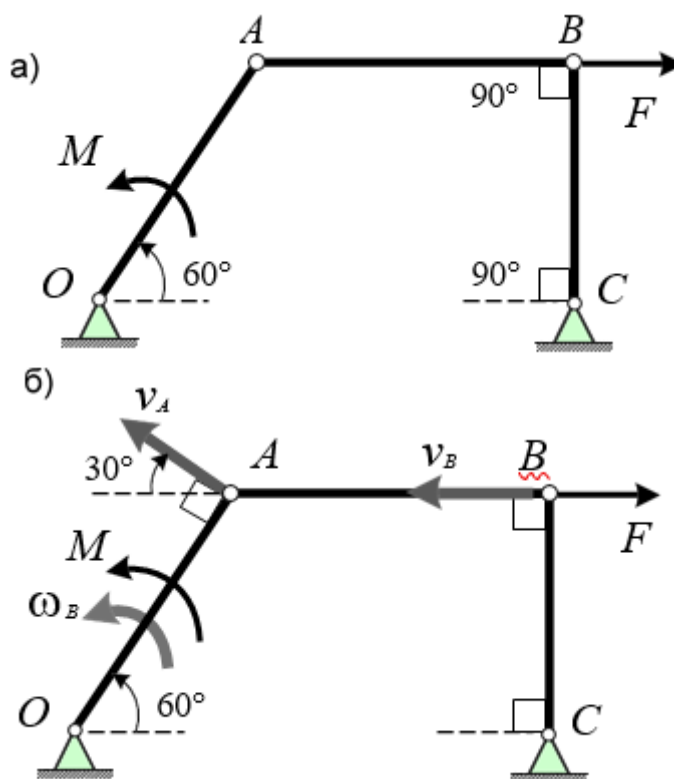


Рисунок 5.8 – Розрахункова схема до прикладу 5.6

Розв'язання

Скористаємося для розв'язання задачі співвідношенням (5.13). Із цієї метою надамо ланці OA можливу кутову швидкість ω_0 . Оскільки цей механізм має одну ступінь свободи, точки A і B також отримають можливі лінійні швидкості v_A і v_B (рисунок 5.8б).

При цьому $v_A \perp OA$ і $v_A = \omega_0 \cdot r$, а швидкість v_B точки B , що належить ланці AB , перпендикулярна до CB , і її можна знайти за допомогою миттєвого центру швидкостей або за теоремою про проєкції швидкостей двох точок плоскої фігури, згідно з якою $np_{AB} v_A = np_{AB} v_B$, звідки $v_B = v_A \cos 30^\circ = \omega_0 r \cdot (\sqrt{3}/2)$.

Для нашої задачі навантаження представлене тільки парою сил з моментом M , прикладеному до ланки OA і силою F , прикладеною в точці B , тому співвідношення (5.13) матиме вигляд:

$$M \omega_0 + (F \cdot v_B) = 0$$

або

$$M \omega_0 - F \cdot \omega_0 \cdot r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0,$$

звідки $M = F \cdot r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Відповідь: $M = F \cdot r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Примітки:

1. Розв'язання задачі, розглянутої в прикладі (5.5), звичайними методами статички призводить до ускладнень, у чому неодноразово переконувалися викладачі, коли пропонували цю задачу першокурсникам на студентській олімпіаді.

2 Вимога малості переміщень у визначенні можливих переміщень і у формулюванні ПМП для механіки твердого тіла не є принциповою.

Еквівалентність ПМП і умов рівноваги системи

Як уже зазначалося, принцип можливих переміщень еквівалентний рівнянням рівноваги елементарної статички. Доведемо, що справедлива така теорема.

Теорема. *Необхідною і достатньою умовою рівноваги системи,*

підпорядкованої ідеальним, стаціонарним і двостороннім в'язям, є рівність нулю суми робіт усіх активних сил на будь-яких можливих переміщеннях системи:

$$\sum F_i \delta r_i = 0, \quad (5.14)$$

1. *Доказ необхідності.* Нехай система матеріальних точок перебуває в стані рівноваги. Тоді для кожної точки системи виконується співвідношення:

$$F_i + N_i = 0.$$

Помноживши на δr_i і підсумувавши по всіх точках системи, отримаємо:

$$\sum (F_i + N_i) \delta r_i = \sum F_i \delta r_i + \sum N_i \delta r_i = 0.$$

звідки, з урахуванням (5.11) і впливає (5.14).

2. *Доказ достатності.* Нехай до системи, що перебувала в стані спокою, доклали сили, що задовольняють (5.14). Покажемо, що система залишиться в стані рівноваги.

Припустимо протилежне: нехай хоча б одна j -а точка системи вийшла зі стану рівноваги. Тоді $F_j + N_j = R_j \neq 0$, і під дією сили R_j точка M_j отримає переміщення dr_j , яке з огляду на початкові умови буде колінеарним R_j : $dr_j \uparrow\uparrow R_j$.

Оскільки в'язі стаціонарні, існує можливе переміщення δr_j , що дорівнює елементарному дійсному переміщенню dr_j , тому з урахуванням (5.11) ми отримаємо:

$$R_j dr_j = R_j \delta r_j = F_j \delta r_j + N_j \delta r_j = F_j \delta r_j > 0.$$

Але тоді:

$$\sum F_j \delta r_j = F_j \delta r_j > 0,$$

що суперечить (5.14), тому наше припущення невірне і система залишатиметься в положенні рівноваги.

За допомогою розглянутої теореми і співвідношення (5.14) можна знаходити залежності між силами, прикладеними до точок системи так само, як за допомогою звичайних рівнянь рівноваги.

За допомогою цього принципу можна визначати співвідношення між силами і моментами, прикладеними до рухомої механічної системи - механізму, а також знаходити опорні реакції нерухомих систем.

Для того щоб визначити опорні реакції нерухомої системи,

попередньо треба скористатися принципом звільнення від в'язей.

Примітки:

1. Як впливає з теореми, за допомогою ПМП, як і з використанням звичайних рівнянь рівноваги, можна розглядати тільки статично визначені системи.

2. Перевага ПМП перед рівняннями елементарної статyki стає особливо помітною під час розрахунку складних складових систем із великим числом невідомих. Під час розв'язання таких задач важливо отримати хорошу структуру системи алгебраїчних рівнянь для визначення опорних реакцій.

Пояснимо, що це означає. У загальному випадку матриця системи таких рівнянь є суцільно заповненою і має вигляд (а):

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 \times & \times & \times & & \times & 0 & 0 & & \times & 0 & 0 \\
 \times & \times & \times & (a) & \times & \times & 0 & (b) & 0 & \times & 0 & (в) \\
 \times & \times & \times & & \times & \times & \times & & 0 & 0 & \times
 \end{array} \quad (5.15)$$

де знаком « $\times$ » позначено коефіцієнти, відмінні від нуля. Розв'язання такої системи рівнянь становить найбільші труднощі.

Набагато привабливішою є матриця трикутного вигляду, структура якої представлена на схемі (б). Вона дає змогу знайти з першого рівняння перше невідоме, а після підстановки його в друге рівняння знайти друге невідоме і так далі.

Ідеальною є представлена на схемі (в) діагональна матриця, за якої система розпадається на окремі рівняння і невідомі визначаються незалежно одне від одного.

Нижче буде показано, що ПМП, на відміну від рівнянь елементарної статyki, завжди дає змогу отримати систему рівнянь саме з такою діагональною матрицею. Таким чином, ми завжди зможемо знайти опорну реакцію, яка нас цікавить, незалежно від інших опорних реакцій.

Застосування ПМП для визначення опорних реакцій балок

Розглянемо процедуру визначення опорних реакцій багатопролітної шарнірно-консольної балки, яка з погляду статyki являє собою складову, або зчленовану, статично визначувану систему.

Будемо дотримуватися такого плану розв'язання задачі:

1) відповідно до принципу звільнення від в'язей відкидаємо в'язь, яка відповідає шуканому зусиллю, і замінюємо її реакцією R_i ;

- 2) повідомляємо точці прикладання $\mathbf{R}_i$ в отриманій системі з одним ступенем свободи можливе переміщення δs_i ;
- 3) записуємо умову рівності нулю суми робіт усіх активних сил, додаючи до цих сил невідому реакцію $\mathbf{R}_i$;
- 4) виражаємо можливі переміщення всіх точок системи через варіацію однієї узагальненої координати;
- 5) визначаємо шукану реакцію $\mathbf{R}_i$;
- 6) перевіряємо за можливістю правильність розв'язання задачі.

Примітки:

1. У загальному випадку під $\mathbf{R}_i$ треба розуміти узагальнену силу, а під δs_i – узагальнене переміщення, які являють собою звичайну силу і лінійне переміщення для лінійних і, відповідно, момент і кутове переміщення – для моментних зв'язків.

2. Щоб правильно побудувати ламану форму - схему балки, що відповідає можливому переміщенню точки i , у якій прикладена реакція $\mathbf{R}_i$, потрібно:

- проаналізувати задану складову балку й уточнити, з яких елементарних балок вона утворена;
- з'ясувати, яка точка елементарної балки, що розглядається, залишиться нерухомою, коли точка i внаслідок заданого можливого зсуву займе в просторі положення i' , або який параметр цієї балки залишиться незмінним через крайові умови;
- провести пряму лінію через точку i' і знайдену нерухому точку або пряму, що відповідає заданим крайовим умовам, і визначити, яке положення в просторі займуть граничні точки елементарної балки;
- виконати таку саму процедуру для суміжних балок.

Приклад 5.7

Визначити реакцію опори В складеної балки (рис. 5.9, а).

Розв'язання

Розглянута складна балка утворена з двох елементарних балок, з'єднаних шарніром D . Відповідно до наведеного вище плану відкидаємо опору В, замінюючи її невідомою реакцією R_B .

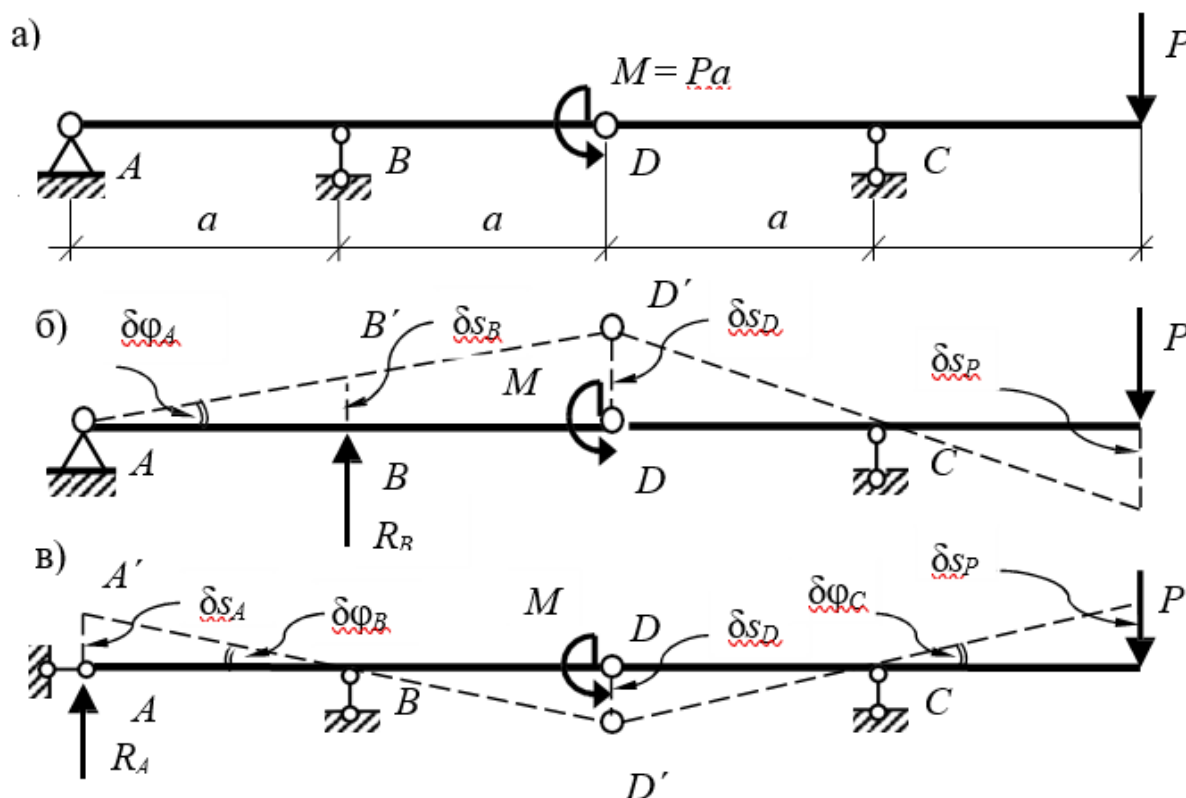


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема до прикладу 5.7

Повідомляємо точці B можливе переміщення $\delta s_B = BB'$, у результаті чого всі незакріплені точки балки отримають можливі переміщення.

Для побудови схеми балки проводимо пряму лінію через точку B' і нерухому точку A лівої елементарної балки - AD і визначаємо в такий спосіб положення її крайової точки D' . Після цього переходимо до розгляду правої елементарної балки і визначаємо положення її крайньої правої точки, проводячи пряму через точку D' і нерухому точку C (рис. 5.9, б).

Рівняння (5.14) для нашої задачі набуде вигляду:

$$R_B \delta s_B + M \delta \varphi_A + P \delta s_P = 0.$$

Виражаючи можливі переміщення δs_B і δs_P через $\delta \varphi_A$, отримаємо:

$$R_B a \delta \varphi_A + M \delta \varphi_A + P \cdot 2a \delta \varphi_A = 0,$$

звідки, поділивши на $\delta \varphi_A \neq 0$, знайдемо шукану реакцію:

$$R_B = -\left(\frac{M}{a} + 2P\right) = -3P.$$

Зазначимо, що в цьому прикладі не вдається перевірити правильність знайденого результату, якщо додатково не визначити реакцію R_A . Тому визначимо також і цю реакцію.

Нерухома опора A еквівалентна двом лінійним в'язям. Горизонтальній в'язі відповідає складова X_A , вертикальній - Y_A .

Розглянута складна балка завантажена системою паралельних сил, тому реакція цієї опори спрямована вертикально: $X_A = 0$, $Y_A = R_A$.

Відповідно до наведеного вище плану відкидаємо вертикальну в'язь у точці A , замінюючи його невідомою реакцією R_A .

Повідомляємо точці A можливе переміщення $\delta s_A = AA'$, у результаті чого всі незакріплені точки балки отримають можливі переміщення.

Для побудови схеми балки проводимо пряму лінію через точку A' і нерухому точку B елементарної балки ABD і визначаємо таким чином положення її граничної точки D' . Після цього переходимо до розгляду правої елементарної балки і визначаємо положення точки прикладання сили P , проводячи пряму через точку D' і нерухому точку C (рис. 5.9, в).

Рівняння (5.14) для нашої задачі набуде вигляду:

$$a R_A \partial S_A + M \partial \varphi_B + P \partial S_P = 0.$$

Виражаючи можливі переміщення ∂S_A і ∂S_P через $\partial \varphi_B$, отримаємо:

$$R_A a \partial \varphi_B + M \partial \varphi_B + P a \partial \varphi_B = 0,$$

звідки, поділивши на $\partial \varphi_B \neq 0$, знайдемо шукану реакцію:

$$R_A = \left(\frac{M}{a} + P\right) = 2P$$

Щоб переконатися в правильності знайденого рішення, складемо рівняння:

$$-R_A \cdot 2P - R_B \cdot a = -2P \cdot 2a - (-3P) \cdot a + M = -4Pa + 3Pa + Pa = 0.$$

$$\text{Відповідь: } R_A = 2P; \quad R_B = -3P.$$

5.5 Умови рівноваги системи в узагальнених координатах

Узагальнені координати, швидкості й прискорення

Число координат, що визначають положення механічної системи, залежить як від кількості тіл, що входять у систему, так і від числа й

характеру накладених в'язей (надалі будемо розглядати тільки геометричні в'язі).

Числом ступенів свободи механічної системи, як відомо, називається число незалежних між собою можливих переміщень системи. Геометричні зв'язки зменшують на рівну кількість одиниць і кількість незалежних можливих переміщень, і число незалежних між собою координат, що визначають положення системи.

Отже: *число незалежних координат, що визначають положення системи з геометричними в'язями, дорівнює числу ступенів свободи цієї системи.*

Такі координати можна вибирати як параметри, що мають будь-яку розмірність і будь-який геометричний або фізичний зміст (відрізки прямих або дуг, кути, площі й т.д.).

При використанні декартових координат у рішенні задач динаміки виникають математичні труднощі. Тому що ці координати виявляються незалежними, то при спрощенні руху системи (зменшенні числа ступенів свободи) задача з математичної точки зору ускладнюється: збільшується число невідомих величин, що підлягають визначенню й число розв'язних рівнянь.

Тому, Лагранж запропонував вибирати не три декартових координати, а систему незалежних недекартових координат, які назвав узагальненими:

$$q_i \ (i=1, 2, \dots, S).$$

Узагальненими координатами називається сукупність незалежних між собою параметрів, що однозначно визначають положення матеріальної системи в просторі.

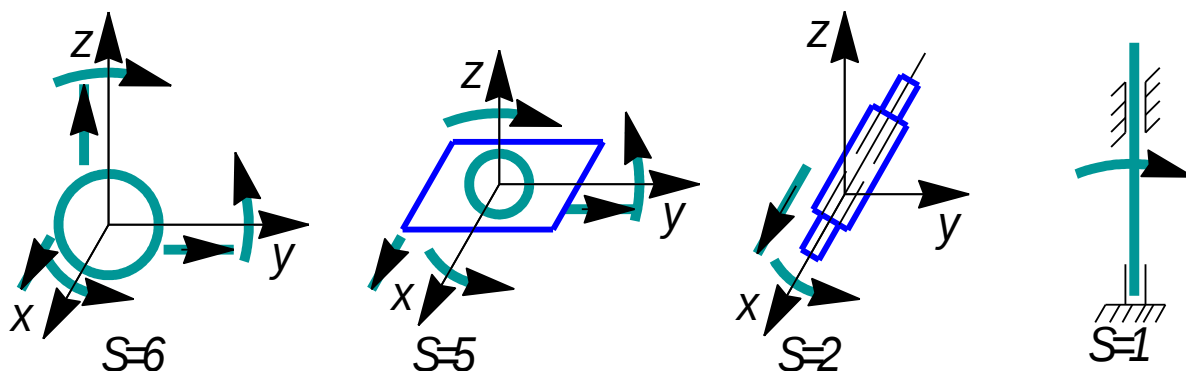


Рисунок 5.10 – Число ступенів свободи механічної системи

Наприклад: у теорії пружності роль узагальнених координат виконують деформації й напруження, прогин балок і пластин; у гідродинаміці – щільність, температура; в електротехніці - сила струму, напруга.

Єдина вимога до них, що б вони були незалежними й однозначно задавали положення системи в просторі.

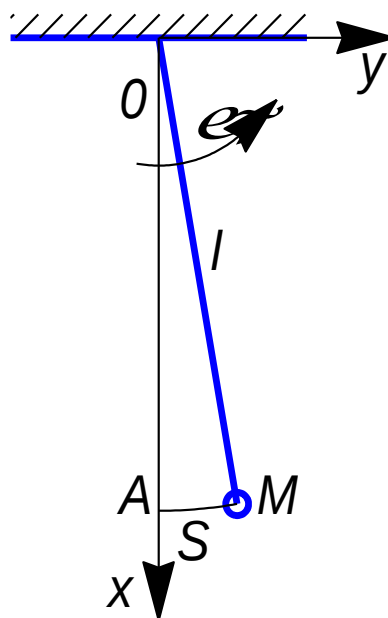


Рисунок 5.11 – Плоский математичний маятник

Плоский математичний маятник має одну ступінь свободи ($S = 1$), його положення визначається узагальненою координатою q в якості якої можна вибрати кут φ , довжину дуги AM , площу сектора OAM .

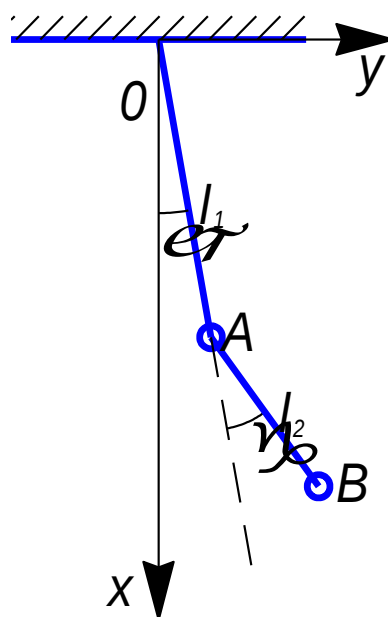


Рисунок 5.12 – Подвійний плоский маятник

Подвійний плоский маятник має дві ступені свободи ($S = 2$) і в якості узагальнених координат вибираємо кути - φ і γ . Ці кути між собою незалежні.

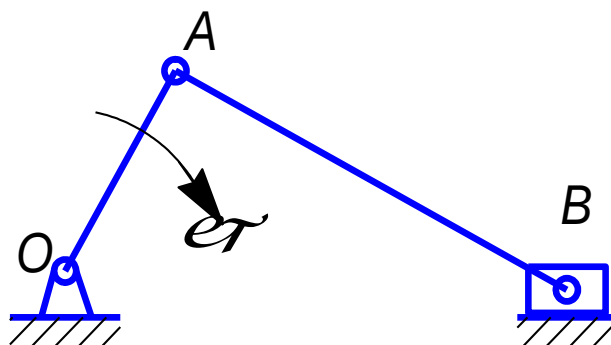


Рисунок 5.13 – Кривошипно-повзунний механізм

Кривошипно-повзунний механізм має одну ступінь свободи і його положення визначається однозначно кутом повороту кривошипа φ .

За аналогією з поняттям швидкості, прискорення введемо поняття узагальненої швидкості й узагальненого прискорення.

При русі системи її узагальнені координати будуть із часом безупинно змінюватися й закон цього руху визначиться рівняннями: $q_1 = f_1(t)$, $q_2 = f_2(t)$, ..., $q_i = f_i(t)$

- рівняння *руху* системи в узагальнених координатах.

Узагальненою швидкістю називається перша похідна за часом від узагальненої координати:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (5.16)$$

Узагальненим прискоренням називається друга похідна за часом від узагальненої координати:

$$\ddot{q}_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2}, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (5.17)$$

Фізичний зміст $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ розглянемо на прикладах:

- Якщо q переміщення, то $\dot{q}_i$ й $\ddot{q}_i$ - лінійна швидкість і прискорення:

$$S, \quad \frac{dS}{dt}, \quad \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

- Якщо q кут повороту, то $\dot{q}_i$ й $\ddot{q}_i$ - кутова швидкість і кутове прискорення:

$$\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Якщо узагальнена координата задана у векторній формі:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad (5.18)$$

то продиференціювавши за часом знаходимо:

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \sum \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}, \quad (5.19)$$

Узагальнені сили й методи визначення

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок, на які діють сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. Нехай система має S ступенів свободи і її положення визначається узагальненими координатами:

$$q_1, q_2, \dots, q_s, \quad (5.20)$$

Повідомимо системі таке незалежне можливе переміщення, при якому координата q_1 одержує збільшення δq_1 , а інші не змінюються. Тоді кожний з радіусів-векторів $\bar{r}_i$ точок системи одержить елементарні збільшення $(\delta \bar{r}_i)_1$, які обчислюються як приватний диференціал:

$$(\delta \bar{r}_i)_1 = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1, \quad (5.21)$$

Визначимо суму елементарних робіт всіх діючих сил на розглянутому переміщенні:

$$\delta A_1 = \bar{F}_1 \cdot (\delta \bar{r}_1)_1 + \bar{F}_2 \cdot (\delta \bar{r}_2)_1 + \dots + \bar{F}_n \cdot (\delta \bar{r}_n)_1 = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \bar{F}_n \cdot \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1, \quad (5.22)$$

Виносимо δq_1 за дужки:

$$\delta A_1 = \delta q_1 \cdot \left(\sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \text{ або } \delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1, \quad (5.23)$$

де: $\sum \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = Q_1$ - узагальнена сила, що відповідає координаті q_1 .

Повідомляючи системі інше незалежне можливе переміщення, при якому змінюється тільки координата q_2 , одержимо:

$$\delta A_2 = Q_2 \cdot \delta q_2, \quad (5.24)$$

Якщо системі повідомити таке можливе переміщення, при якому одночасно змінюються всі узагальнені координати, то сума елементарних робіт прикладених сил на цьому переміщенні визначається рівністю:

$$\Sigma \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_n \cdot \delta q_n = \Sigma (Q_i \cdot \delta q_i), \quad (5.25)$$

- вираження повної елементарної роботи всіх діючих на систему сил в узагальнених координатах.

Узагальнені сили - це величини, рівні коефіцієнтам при збільшеннях узагальнених координат у вираженні повної елементарної роботи діючих на систему сил.

Розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи, поділеної на розмірність відповідної узагальненої координати:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}, \quad (5.26)$$

якщо q - лінійна величина - м, то Q - розмірність сили - Н; якщо φ - кут - радіан, то Q - розмірність моменту - Н·м.

Спосіб обчислення узагальнених сил залежить від виду діючих на систему сил.

1. У загальному виді обчислення узагальнених сил зводиться до обчислення можливої елементарної роботи (5.23). Спочатку варто встановити число ступенів свободи системи, вибрати узагальнені координати та зобразити діючі сили. Потім для визначення j -тої узагальненої сили Q_j треба системі повідомити таке можливе переміщення при якому зміниться тільки координата q_j й визначити елементарну роботу всіх діючих активних сил на цьому переміщенні. Коефіцієнт при δq_j й дасть шукану величину Q_j .

Іншою формулою для обчислення узагальнених сил є:

$$Q_j = \Sigma \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S, \quad (5.27)$$

або в скалярній формі:

$$Q_j = \Sigma (F_{ix} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j}), \quad (5.28)$$

Приклад 5.8

Вантаж A вагою P_1 переміщається по гладкій похилій площині, а вантаж B вагою P_2 - по шорсткуватій горизонтальній площині.

Визначити узагальнену силу.

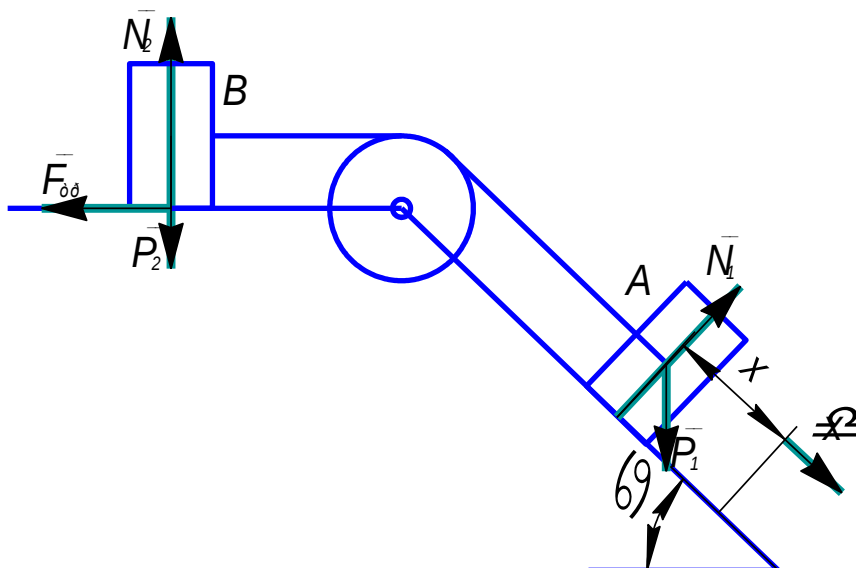


Рисунок 5.14 – Розрахункова схема до прикладу 5.8

Розв'язання

Повідомляємо системі можливе переміщення $\delta q_1 = \delta x$ й обчислюємо елементарні роботи сил, що діють у системі:

$$\delta A = P_1 \cdot \sin \alpha \cdot \delta x - F_{mp} \cdot \delta x \text{ або } \delta A = (P_1 \cdot \sin \alpha - f \cdot P_2) \cdot \delta x$$

Отже: $Q_1 = P_1 \cdot \sin \alpha - f \cdot P_2$.

2. Якщо всі сили системи потенційні, то після вибору узагальнених координат обчислюють потенційну енергію системи Π залежно від узагальнених координат:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (5.29)$$

Отже: якщо всі діючі на систему сили потенційні, то узагальнені сили рівні часткою похідним від силової функції (або взятих зі знаком мінус часткою похідним від потенційної енергії) по відповідних узагальнених координатах.

Умови рівноваги системи в узагальнених координатах

Відповідно до принципу можливих переміщень необхідною умовою рівноваги механічної системи є рівність нулю суми елементарних робіт всіх діючих сил на будь-якому можливому переміщенні:

$$\Sigma \delta A_i = 0.$$

В узагальнених координатах одержимо:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \dots + Q_i \cdot \delta q_i + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0, \quad (5.30)$$

Тому що $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_s$ є незалежними узагальненими можливими переміщеннями, які не дорівнюють нулю, то рівність справедливо за умови:

$$Q_1 = Q_2 = Q_i = Q_s = 0, \quad - \quad (5.31)$$

Для рівноваги матеріальної системи, підлеглій ідеальним і стаціонарним в'язям, необхідно й досить, щоб всі узагальнені сили, що відповідають обраним для системи узагальненим координатам, дорівнювали нулю.

У випадку потенційних сил умови рівноваги (5.31), якщо врахувати (5.29), дають:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \\ \text{або} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \end{aligned}$$

Звідси треба, щоб при рівновазі повний диференціал функції U або Π дорівнював нулю, тобто:

$$dU(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad \text{або} \quad d\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0.$$

У такий спосіб: *система на яку діють потенційні сили, перебуває в рівновазі в тих положеннях, для яких силова функція або потенційна енергія системи мають екстремум (мінімум або максимум).*

5.6 Рівняння Лагранжа

Рівняння Лагранжа II роду

Щоб знайти рівняння руху механічної системи з геометричними в'язями в узагальнених координатах, звернемося до загального рівняння динаміки.

Розглянемо механічну систему n матеріальних точок, обмежену ідеальними голономними в'язями (*голономна в'язь* - механічний зв'язок, що накладає обмеження тільки на положення (або переміщення) точок і тіл системи), що має s ступенів свободи. Тоді її положення в просторі визначається узагальненими координатами:

$$q_1, q_2, \dots, q_s.$$

Їхній вибір як визначальні параметри перетворює в нуль рівняння в'язей. У результаті приходимо до системи диференціальних рівнянь, невідомими в якій є лише параметр $q_i(t)$.

Запишемо загальне рівняння динаміки:

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_i^i = 0, \quad (5.32)$$

тоді:

$$\sum \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (5.33)$$

Аналогічно перетворимо до узагальнених координат елементарну роботу сил інерції:

$$\sum \delta A_i^i = Q_1^i \delta q_1 + Q_2^i \delta q_2 + \dots + Q_s^i \delta q_s,$$

де $Q_1^i, Q_2^i, \dots, Q_s^i$ – узагальнені сили інерції, які визначаються по формулам:

$$Q_1^i = \sum F_i^i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}; \quad Q_2^i = \sum F_i^i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}, \quad (5.34)$$

Підставляючи в загальне рівняння (5.32), одержимо:

$$(Q_1 - Q_1^i) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^i) \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^i) \delta q_s = 0, \quad (5.35)$$

Тому що $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_s$ між собою незалежні, та отримана рівність може виконуватися, якщо $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_s \neq 0$, отже повинне бути:

$$Q_1 + Q_1^i = 0, \quad Q_2 + Q_2^i = 0, \quad Q_s + Q_s^i = 0, \quad (5.36)$$

Отриманими рівняннями можна користуватися при рішенні задач динаміки. Однак процес їхнього складання значно спроститься, якщо виразити вхідні сюди узагальнені сили інерції через кінетичну енергію системи.

Перетворимо узагальнену силу інерції. Тому що:

$$\bar{F}_i^i = -m_i \cdot \bar{a}_i = -m_i \cdot \frac{d\bar{V}_i}{dt},$$

то:

$$-Q_1^i = \sum m_i \cdot \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}, \quad (5.37)$$

Щоб виразити Q_1^i через кінетичну енергію системи, перетворимо праву частину рівності, щоб вона містила тільки швидкості точок системи:

$$\frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) - \bar{V}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right), \quad (5.38)$$

Для членів лівої частини рівності справедливі наступні результати:

1. Операції повного диференціювання по t й приватного диференціювання по q_1 перемісні, що дає:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_1}, \quad (5.39)$$

2. Частинна похідна від r_i по q_1 є межу відносини їхніх приватних збільшень, звідки відповідно до правила Лопітала (правило Лопітала – метод знаходження меж функцій, що розкриває невизначеності виду $0/0$ та ∞/∞ . Правило, що обґрунтовує метод, стверджує, що за деяких умов межа відношення функцій дорівнює межі відношення їхніх похідних):

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_1}, \quad (5.39')$$

Підставивши в рівність (5.37), одержимо:

$$\frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{V}_i^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \bar{V}_i^2}{\partial q_1}, \quad (5.40)$$

якщо врахувати, що маса - величина постійна, одержимо:

$$-Q_1^i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right), \quad (5.41)$$

з огляду на, що $T = \sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2}$, одержимо:

$$-Q_1^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}. \quad (5.42)$$

Аналогічно виведемо вираження для всіх узагальнених сил інерції й остаточно одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Це рівняння Лагранжа другого роду або диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах. Ці рівняння являють собою диференціальні рівняння другого порядку щодо узагальнених координат системи.

Рівняння Лагранжа другого роду зіграли вирішальну роль у розвитку динаміки системи й широко використовуються для рішення багатьох задач механіки.

Особливості рівнянь руху в узагальнених координатах

Відзначимо важливі особливості отриманих рівнянь:

1. Важлива перевага полягає в тому, що їхній вид і число не залежать ні від кількості тіл, що входять у систему, ні від того, як ці тіла рухаються. *Визначається число рівнянь Лагранжа числом ступенів свободи системи.*

2. *Форма запису рівнянь не залежить від конкретного вибору системи узагальнених координат.*

3. При ідеальних в'язях у праві частини рівнянь входять тільки активні сили, отже, *рівняння не містять реакцій ідеальних в'язей*. Це дозволяє відокремити завдання знаходження закону руху невільної системи від завдання визначення реакцій в'язей.

4. Рівняння Лагранжа дають єдину послідовність дій для рішення будь-якої задачі динаміки.

Рівняння Лагранжа для консервативних систем

Якщо всі діючі сили потенційні, то з огляду на, що $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$,

одержимо рівняння Лагранжа для консервативних систем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\tag{5.44}$$

або:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_i} = 0, \quad (5.45)$$

Введемо функцію $L = T - \Pi$ – функція Лагранжа або кінетичний потенціал.

тоді:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

З отриманого результату треба, що стан механічної системи, на яку діють потенційні сили, визначаємо завданням однієї тільки функції Лагранжа, знаючи яку можна скласти диференціальні рівняння руху системи.

Методика застосування рівнянь Лагранжа

Особливістю рішення задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду є єдина загальна послідовність етапів рішення й дослідження кожної задачі. При рішенні задач динаміки варто дотримуватися такої послідовності дій:

1. Визначити число ступенів свободи системи матеріальних точок, що рухається.
2. Вибрати узагальнені координати.
3. Зобразити систему в довільному положенні й показати на схемі всі діючі сили (для систем з ідеальними в'язями тільки активні).
4. Знайти узагальнені сили (щоб уникнути помилок у знаках кожне можливе переміщення направити так, щоб збільшення відповідної координати було позитивним).
5. Обчислити кінетичну енергію T системи в її абсолютному русі, виразивши її через узагальнені координати й швидкості.
6. Обчислити частки похідні $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ й $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.
7. Записати рівняння руху системи й проінтегрувати їх з урахуванням початкових умов.

Примітка: зазначеним шляхом рівняння Лагранжа складаються для абсолютного руху. У випадку відносного руху визначаємо кінетичну енергію у відносному русі, а при визначенні узагальнених сил додати переносні сили інерції.

Щоб підкреслити універсальність рівнянь Лагранжа, вирішимо з їхньою допомогою кілька задач, до яких раніше застосовувалися різні методи.

Приклад 5.9

Кінетична енергія системи $T = 6 \cdot \dot{S}^2$, маса тіл $m_1 = m_2 = 6 \text{ кг}$.
Визначити прискорення тіла 1, якщо коефіцієнт тертя ковзання між горизонтальною поверхнею до тіл $f = 0,2$.

Розв'язання

1. Визначаємо число ступенів свободи, тому що одне незалежне переміщення, то $S = 1$.

2. Вибираємо узагальнену координату $q = S$.

3. Визначаємо узагальнену силу:

$$\sum \delta A_i^a = P_2 \cdot \delta S_2 - F_{tp} \cdot \delta S_1;$$

$$F_{tp} = f \cdot N_1 = f m_1 g,$$

$$\delta S_2 = \delta S_1;$$

$$\delta A_i^a = m_2 g \cdot \delta S_1 - f m_1 g \cdot \delta S_1 = \delta S_1 (m_2 g - f m_1 g);$$

Тут: $Q = m_2 g - f m_1 g = 6 \cdot 9,8 - 0,2 \cdot 6 \cdot 9,8 = 47,04 \text{ Н}$.

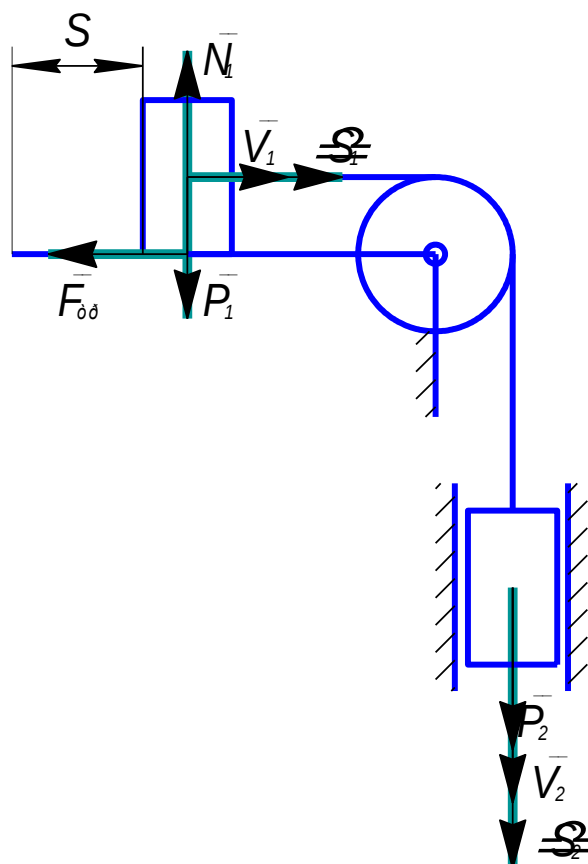


Рисунок 5.15 – Розрахункова схема до прикладу 5.9

4. Визначаємо кінетичну енергію системи:

$$T = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} M_{np} V_1^2,$$

де $M_{np} = m_1 + m_2 = 12 \text{ кг}$,

$$T = \frac{1}{2} M_{np} \dot{S}^2.$$

5. Обчислюємо частки похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = M_{np} \cdot \dot{S}; \quad \frac{\partial T}{\partial S} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) = M_{np} \cdot \ddot{S}.$$

6. Записуємо рівняння руху:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q; \quad M_{kp} \ddot{S} = Q; \quad \ddot{S} = \frac{Q}{M_{np}} = \frac{47,04}{12} = 3,92 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: $a_1 = 3,92 \text{ м/с}^2$.

Приклад 5.10

Визначити кутове прискорення диска 1, якщо на нього діє пари сил з моментом $M = 0,4 \text{ Н·м}$. Маса й радіуси однорідних дисків 1 і 2 однакові. $m_1 = m_2 = 10$; $r = 0,2 \text{ м}$

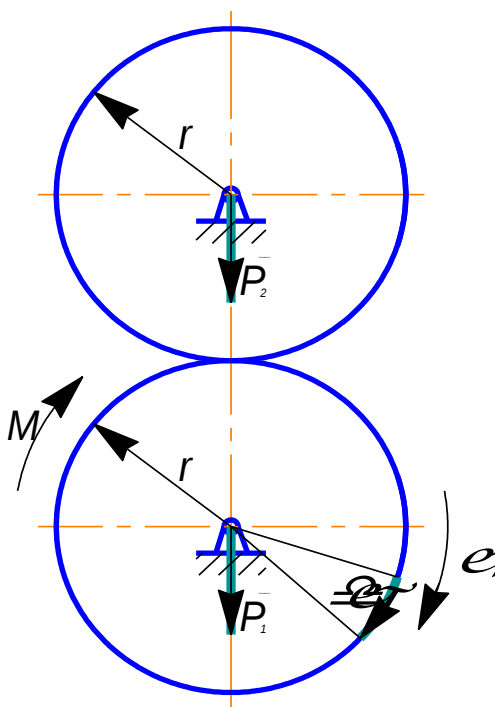


Рисунок 5.16 – Розрахункова схема до прикладу 5.10

Розв'язання

Число ступенів свободи: $S = 1$.

Узагальнені координати: $q = \varphi$.

Узагальнена сила: $\sum \delta A_i^a = M \cdot \delta \varphi$; $Q = M = 0,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Кінетична енергія:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2;$$

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} m r^2; \quad \omega_1 = \omega_2 = \dot{\varphi}.$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2;$$

$$T = \frac{1}{2} I_{np} \dot{\varphi}^2;$$

де $I_{np} = m r^2 = 10 \cdot 0,2^2 = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_{np} \cdot \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_{np} \cdot \ddot{\varphi}.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q;$$

$$I_{np} \cdot \ddot{\varphi} = M;$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{I_{np}} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 1 \text{ с}^{-1}$.

Приклад 5.11

Потенційна енергія механічної системи $\Pi = 15 \cdot \varphi^2$, де φ в радіанах. Визначити узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті φ , у момент часу, коли $\varphi = 90^\circ$.

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -30\varphi = -30 \cdot \frac{\pi}{2} = -47,1 \text{ Н}.$$

Приклад 5.12

Однорідний стрижень довжиною $l = 3$ м і масою $m = 30$ кг обертається у вертикальній площині. Визначити узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті φ , у момент часу, коли $\varphi = 45^\circ$.

$$\delta A = -P \cdot \cos \varphi \cdot \frac{l}{2} \cdot \delta \varphi;$$

$$Q = -mg \cdot \cos \varphi \cdot \frac{l}{2} = -30 \cdot 9,81 \cdot \cos 45^\circ \cdot 1,5 = -312 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приклад 5.13

До циліндра, що обертається під дією пари сил з моментом $M = 20$ Н·м, притискається гальмова колодка силою $F = 100$ Н. Визначити узагальнену силу, відповідно координаті φ , якщо $f = 0,4$, $R = 0,4$ м.

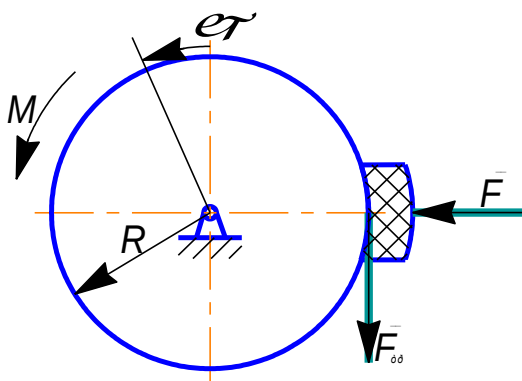


Рисунок 5.17 – Розрахункова схема до прикладу 5.13

Розв'язання

$$\delta A = M \delta \varphi - F_{mp} \cdot R \cdot \delta \varphi = \delta \varphi (M - F_{mp} \cdot R);$$

$$Q = M - F_{mp} \cdot R = M - f \cdot F \cdot R = 20 - 0,4 \cdot 100 \cdot 0,4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приклад 5.14

Скласти диференціальне рівняння коливань фізичного маятника.

Розв'язання

Маятник має одну ступінь свободи S і його положення визначається кутом φ , отже, $q_1 = \varphi$.

Повідомимо куту φ позитивне збільшення $\delta \varphi$. На цьому переміщенні роботу робить тільки сила ваги:

$$F_G - \delta A_1 = -(F_q \cdot l \cdot \sin \varphi) \delta \varphi,$$

де $l = OC_1$.

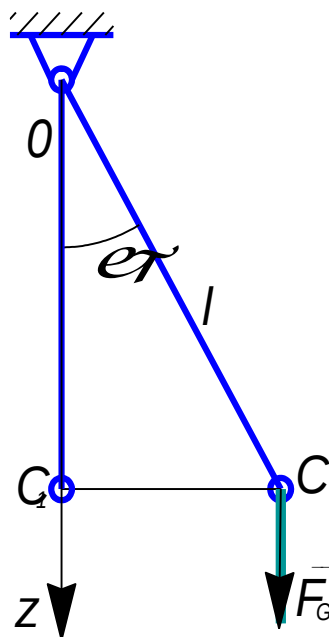


Рисунок 5.18 – Розрахункова схема до прикладу 5.14

Тому: $Q_1 = -F_G \cdot l \cdot \sin \varphi$.

Кінетична енергія маятника

$$T = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2,$$

або $T = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \dot{\varphi}^2$.

Рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1.$$

де T – від **кута** не залежить, тому: $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_0 \cdot \dot{\varphi}$,

тоді $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_0 \cdot \ddot{\varphi}$,

звідси: $I_0 \cdot \ddot{\varphi} = -F_G \cdot l \cdot \sin \varphi$,

тому що F_G – потенційна, то одержимо:

$$\Pi = -F_G \cdot Z = -F_G \cdot l \cos \varphi.$$

По формулі $L = T - \Pi$, одержимо:

$$L = \frac{1}{2} I_0 \cdot \dot{\varphi}^2 + F_G \cdot l \cos \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_0 \cdot \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -F_G \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Контрольні питання

- 5.1 У чому полягає принцип Даламбера в механіці?
- 5.2 Принцип Даламбера для матеріальної точки.
- 5.3 Принцип Даламбера для системи матеріальних точок.
- 5.4 Який вигляд має принцип Даламбера для матеріальної точки?
- 5.5 У чому перевага використання принципу Даламбера?
- 5.6 Принцип інерційних сил Даламбера
- 5.7 Що називається силою інерції матеріальної точки?
- 5.8 У чому полягає принцип Даламбера?
- 5.9 Що характерно для матеріальної точки?
- 5.10 Як знайти силу інерції?
- 5.11 У чому полягає ознака Даламбера?
- 5.12 У чому перевага принципу Даламбера порівняно з другим законом руху Ньютона?
- 5.13 У чому вимірюється момент інерції матеріальної точки?
- 5.14 Чому інерція збільшується зі швидкістю?
- 5.15 Звідки береться відцентрова сила?
- 5.16 У чому полягає помилка Даламбера?
- 5.17 Як знайти головний вектор сил інерції?
- 5.18 Що можна вважати матеріальною точкою?
- 5.19 Чому дорівнює маса матеріальної точки?
- 5.20 Яким способом можна описати рух матеріальної точки?
- 5.21 Де використовується інерція?
- 5.22 Чи можна розрахувати інерцію?
- 5.23 Як звучить закон інерції?
- 5.24 Головний вектор і головний момент сил інерції в загальному та окремих випадках руху твердого тіла.
- 5.25 Можливі переміщення точки та механічної системи. Принцип можливих переміщень.
- 5.26 Загальне рівняння динаміки.
- 5.27 Теорема Лагранжа про стійкість рівноваги консервативної системи.
- 5.28 Узагальнені сили, способи обчислення узагальнених сил.
- 5.29 Умови рівноваги системи, виражені в узагальнених силах.
- 5.30 У чому суть теореми Лагранжа?

- 5.31 Навіщо потрібна формула Лагранжа?
- 5.32 Коли застосовується метод Лагранжа?
- 5.33 Як працює теорема Лагранжа?
- 5.34 Який приклад формули Лагранжа?
- 5.35 Для чого потрібна теорема Лагранжа?
- 5.36 Чому ми використовуємо рівняння Лагранжа?
- 5.37 Що таке коефіцієнти Лагранжа?

Тестові завдання до теми 5

1. Силою інерції матеріальної точки називають вектор, який дорівнює...

1. За модулем добутку маси точки на її прискорення і який спрямований протилежно вектору прискорення.
2. За модулем добутку кількості руху точки на її прискорення і який спрямований протилежно вектору прискорення.
3. За модулем добутку маси точки на її прискорення і який спрямований в бік вектору прискорення.
4. За модулем добутку маси точки на її швидкість і який спрямований протилежно вектору швидкості.

2. Принцип Даламбера для матеріальної точки полягає в наступному:

1. У будь-який момент руху матеріальної точки активні сили і реакції в'язей зрівноважуються силою інерції, яка умовно прикладається до даної точки.
2. У будь-який момент руху матеріальної точки реакції в'язей зрівноважуються силою інерції, яка умовно прикладається до даної точки.
3. У будь-який момент руху матеріальної точки активні сили зрівноважуються силою інерції, яка умовно прикладається до даної точки.
4. У будь-який момент руху матеріальної точки активні сили і реакції в'язей зрівноважуються імпульсом сили.

3. Принцип Даламбера для механічної системи полягає у наступному:

1. Активні сили і реакції в'язей механічної системи зрівноважуються силами інерції, умовно прикладеними до точок системи.
2. Активні сили, які діють на механічну систему зрівноважуються силами інерції, умовно прикладеними до точок системи.
3. Активні сили, які діють на механічну систему і реакції в'язей зрівноважуються імпульсом сили.
4. Активні сили, які діють на механічну систему зрівноважуються головним вектором реакції в'язей.

4. При поступовому русі усі точки тіла мають:

1. Однакові сили інерції.
2. Сили інерції, що залежать від нормального та дотичного прискорення.
3. Сили інерції, що залежать від відстані до осі обертання.
4. Різні сили інерції.

5. При обертальному русі усі точки тіла мають:

1. Сили інерції, що залежать від нормального та дотичного прискорення.
2. Однакові сили інерції.
3. Сили інерції, що залежать від відстані до осі обертання.
4. Різні сили інерції.

6. При рівномірному обертальному русі усі точки тіла мають:

1. Сили інерції, що залежать від нормального прискорення.
2. Однакові сили інерції.
3. Сили інерції, що залежать від дотичного прискорення.
4. Сили інерції, що залежать від нормального та дотичного прискорення.

7. В'язі це:

1. Обмеження, що накладені на положення та швидкості точок механічної системи та виконуються незалежно від діючих сил.
2. Обмеження, що накладені на положення та швидкості точок механічної системи та виконуються в залежності від діючих сил.
3. Обмеження, що накладені на положення точок механічної системи та виконуються незалежно від діючих сил.
4. Обмеження, що накладені на положення точок механічної системи та виконуються в залежності від діючих сил.

8. Стаціонарні це в'язі, які:

1. Не змінюються з часом.
2. Накладають обмеження на координати точок системи.
3. Накладають обмеження на швидкості точок системи.
4. Зберігають обмеження при будь-якому положенні системи.

9. Геометричними називаються в'язі, які:

1. Накладають обмеження на координати точок системи.
2. Не змінюються з часом.
3. Накладають обмеження на швидкості точок системи.
4. Зберігають обмеження при будь-якому положенні системи.

10. Кінематичними називаються в'язі, які:

1. Накладають обмеження на швидкості точок системи.
2. Можливо проінтегрувати за часом.

3. Не змінюються з часом.
4. Зберігають обмеження при будь-якому положенні системи.

11. Інтегрованими називаються в'язі, які:

1. Можливо подати як кінематичними, так і геометричними.
2. Накладають обмеження на координати точок системи.
3. Не змінюються з часом.
4. Зберігають обмеження при будь-якому положенні системи.

12. Утримуючими називаються в'язі, які:

1. Запобігають переміщенню тіла в двох протилежних напрямках.
2. Накладають обмеження на швидкості точок системи.
3. Накладають обмеження на координати точок системи.
4. Запобігають переміщенню тіла в одному напрямку.

13. Якщо кінематичну в'язь можливо подати як геометричну, то це:

1. Інтегрована в'язь.
2. Диференційна в'язь.
3. Стаціонарна в'язь.
4. Утримуюча в'язь.

14. Метод кінетостатики (принцип Даламбера) ґрунтується на:

1. Принципі незалежності дії сил;
2. Гіпотезі Бернуллі;
3. Урівноваження сил, що діють на точку, силами інерції;
4. Висновки із закону Гука.

15. Принцип Даламбера: геометрична сума всіх прикладених до точки сил і сили інерції цієї точки дорівнює

1. Нулю;
2. Добутку сили на плече;
3. Добутку маси на прискорення;
4. Добутку сили на прискорення.

16. Узагальнені координати є множина взаємно незалежних параметрів, якими:

1. Однозначно визначається положення даного об'єкта на площині;
2. Визначається положення даної механічної системи відносно заданої системи координат;
3. Однозначно визначається положення даної механічної системи відносно обраної системи відліку.

17. До числа принципів аналітичної механіки належить принцип:

1. Збереження кінетичного моменту;
2. Лагранжа - Даламбера;
3. Збереження механічної енергії;

4. Незалежності сил.

18. До числа принципів аналітичної механіки належить принцип:

1. Даламбера;
2. Відносності Галілея;
3. Германа – Ейлера;
4. Гамільтона.

19. До числа принципів аналітичної механіки належить принцип:

1. Лагранжа-Даламбера;
2. Відносності Галілея;
3. Германа – Ейлера;
4. Гамільтона.

20. До числа принципів аналітичної механіки належить принцип:

1. Остроградського-Гамільтона;
2. Відносності Галілея;
3. Германа – Ейлера;
4. Гамільтона.

21. Узагальненими координатами називаються:

1. Будь-які незалежні величини, які однозначно визначають положення механічної системи;
- 2) Будь-які незалежні величини, які однозначно визначають положення центра мас механічної системи;
- 3) Будь-які незалежні величини в кількості N для системи з N матеріальних точок;
- 4) Будь-які незалежні величини в кількості $3N$ для системи з N матеріальних точок.

22. Для однозначного визначення положення матеріальної точки в просторі необхідно задати таку кількість незалежних координат:

1. 1;
2. 2;
3. 3;
4. 4.

23. Функція Лагранжа L має розмірність:

1. Потужності;
2. Сили;
3. Енергії;
4. Є безрозмірною величиною.

24. Властивість коваріантності рівнянь Лагранжа щодо заміни змінних полягає в тому, що:

1. Вигляд рівнянь Лагранжа змінюється під час переходу до нових узагальнених координат;

2. Вигляд рівнянь Лагранжа може як змінюватися, так і не змінюватися під час переходу до нових узагальнених координат;

3. До рівнянь Лагранжа не входять реакції зв'язків ;

4. Вигляд рівнянь Лагранжа не змінюється під час переходу до нових узагальнених координат.

25. Механічна система складається з двох матеріальних точок, зв'язаних невагомим нерозтяжним стрижнем. Яка кількість рівнянь Лагранжа необхідна для опису руху системи?

1. 2;

2. 3;

3. 4;

4. 5.

26. Яка кількість рівнянь Лагранжа необхідна для опису руху математичного маятника?

1. 1;

2. 2;

3. 3;

4. 4.

27. Довжина математичного маятника змінюється за законом $l=at$, де $a=const$. Яка кількість рівнянь Лагранжа необхідна для опису руху математичного маятника?

1. 1;

2. 2;

3. 3;

4. 4.

28. Точка підвісу математичного маятника рухається в горизонтальному напрямку за законом $x=at$, де $a=const$. Яка кількість рівнянь Лагранжа необхідна для опису руху математичного маятника?

1. 1;

2. 2;

3. 3;

4. 4.

ВИСНОВОК

Формування сучасного інженера немислиме без знання фундаментальних дисциплін. Однією з таких дисциплін є теоретична механіка. Теоретичну механіку прийнято ділити на статику, кінематику та динаміку. У цьому посібнику розглянуто розділ «Динаміка», а також питання руху і взаємодії матеріальних тіл.

У більшості випадків розв'язання інженерних задач викликає у студентів труднощі. Для успішного оволодіння вивченим матеріалом важливо вміти розв'язувати практичні задачі.

У навчальному посібнику доступно висвітлено основні теми розділу «Динаміка». Розглядаються питання, що стосуються динаміки матеріальної точки, геометрії мас, загальних теорем динаміки, динаміки твердого тіла, аналітичної механіки, теорії коливань матеріальної точки і механічної системи та теорії удару. Чіткість формулювань законів, теорем і принципів механіки та їхніх доказів, ретельно підібрані приклади та рисунки дають змогу глибше усвідомити сутність теоретичних положень і формул.

Представлені методичні рекомендації до розв'язання задач і приклади їх розв'язання сприяють засвоєнню та закріпленню викладеного матеріалу. Контрольні питання дозволяють проводити самоконтроль і поточний контроль знань студентів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Інженерна механіка. Ч. 1: Теоретична механіка: підручник / за заг. ред. В. М. Булгакова та ін. Вінниця: Нова книга, 2006. – 504 с
2. Теоретична механіка: навчальний посібник / за редакцією П. К. Штанька. – Запоріжжя: ТОВ «Видавництво „СТАТУС“», 2021 р. – 464 с.
3. Теоретична механіка. Динаміка матеріальної точки: навчально-методичний посібник / Г. В. Антонова, О. О. Вершков, О. Є. Мацулевич, О. Ю. Михайленко. – Мелітополь: ВПЦ «Люкс», 2021. – 121с.
4. Інженерна механіка (Теоретична механіка). Статика. Кінематика: конспект лекцій: навчально-методичний посібник / Олена Михайленко, Галина Антонова, Ілля Тетервак. – Запоріжжя: ТДАТУ, 2023. – 200 с.
5. Теоретична механіка: курс лекцій / В. М. Булгаков, О. І. Литвинов, В. І. Васьков, І. В. Головач, Д. Г. Войтюк. – Київ: НАУ, 2003. – Ч. І. – 368 с.
6. Теоретична механіка: курс лекцій / В. М. Булгаков, О. І. Литвинов, В. І. Васьков, І. В. Головач, Д. Г. Войтюк. – Київ: НАУ, 2003. – Ч. ІІ. – 342 с.
7. Теоретична механіка: навчальний посібник / П. К. Штанько, В. Г. Шевченко, Л. Ф. Дзюба та ін.; за ред. П. К. Штанька. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 376 с.
8. Токар, А. М. Теоретична механіка. Динаміка: методи й задачі: навч. посібник для студ. інж. спец. / А. М. Токар. – Київ: Либідь, 2006. – 440 с.
9. Кілічевський, М. О. Теоретична механіка: у 2 т. Т. 2. Динаміка / А. М. Токар, А. А. Строй, А. С. Ямпольський. – Київ: Вища школа, 1980. – 368 с.
10. Ляшко, Н. І. Теоретична механіка. Динаміка: навчальний посібник / Н. І. Ляшко. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 320 с.
11. Мещерський, І. В. Збірник задач з теоретичної механіки / І. В. Мещерський. – Київ: Вища школа, 1985. – 280 с.
12. Черненко, В. Д. Теоретична механіка: навч. посібник / В. Д. Черненко. – Харків: ХНУМГ, 2009. – 312 с.
13. Савін А. Г. Теоретична механіка. Динаміка: навч. посібник / А. Г. Савіна. – Одеса: ОНПУ, 2011. – 248 с.
14. Антонов, В. Д. Теоретична механіка: підручник / В. Д. Антонов. – Київ: Каравела, 2009. – 384 с.
15. Ginsberg, J. H. Advanced Engineering Dynamics. – Cambridge University Press, 1998. – 544 p.

16. Берзін, Л. М. Теоретична механіка: навч. посібник / Л. М. Берзін, С. О. Кошель. – Київ: Центр учбової літератури, 2022. – 200 с.
17. Теоретична механіка: [підручник для студ. вищ. навч. закл.] / С. М. Шульга та ін. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.
18. Павловський, М. А. Теоретична механіка: підручник / М. А. Павловський. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.
19. Теоретична механіка: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності: 151 “Автоматизація та комп’ютерно – інтегровані технології”, спеціалізацій “Автоматизація хіміко – технологічних процесів і виробництв”, “Комп’ютерно – інтегровані технології хімічних та нафтопереробних виробництв” / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко, В. М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 6,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с.
20. Теоретична механіка. Динаміка : навчальний посібник з методичними вказівками і контрольними завданнями для студентів машинобудівних спеціальностей заочної форми навчання. – Краматорськ : ДДМА, 2008. – 236 с.
21. Губська, В. В. Теоретична механіка: Динаміка: Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка», спеціалізацій «Інструментальні системи інженерного дизайну», «Технології комп’ютерного конструювання верстатів, роботів та машин» / В. В. Губська, В. Ф. Кришталь ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 98 с.