

УДК 514.18

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврический государственный агротехнологический университет  
В.А. ПАХАРЕНКО

Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

## ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОТОННОЙ КРИВОЙ ЛИНИИ

*В работе исследована зависимость закономерности изменения вдоль кривой линии радиусов соприкасающихся окружностей и сфер, хода кривой от параметров ее полярного торса. Предложена классификация кривых линий, исходя из динамики изменения ее дифференциально-геометрических характеристик. Определены условия, обеспечивающие заданные геометрические свойства кривой.*

*Ключевые слова: монотонная кривая, полярный торс, соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера, ход кривой.*

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК  
Таврійський державний агротехнологічний університет  
В.О. ПАХАРЕНКО

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

## ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОТОННОЇ КРИВОЇ ЛІНІЇ

*У роботі досліджено залежність закономірності зміни уздовж кривої лінії радіусів стичних кіл та сфер, ходу кривої від параметрів її полярного торсу. Запропоновано класифікацію кривих ліній виходячи з динаміки зміни її диференціально-геометричних характеристик. Визначено умови, що забезпечують задані геометричні властивості кривої.*

*Ключові слова монотонна крива, полярний торс, стичне коло, стична сфера, хід кривої.*

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK  
Tavria State Agrotechnological University  
V.O. PAHARENKO  
Melitopol State Pedagogical University named after Bogdan Khmelnytsky

## FORMING OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF MONOTONOUS CURVE

*The dependence of law of change along the contour of radius of the adjoining circles and spheres, trend of curve on the parameters of its polar torso is researched in this article. The classification of curves based on the dynamics of changes of its differential-geometric characteristics is proposed. The conditions that provide defined geometrical properties of the curve are defined.*

*Keywords: monotonous curve, polar torso, osculating circle, tangent sphere, trend of curve.*

### Постановка проблемы

Формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из востребованных задач геометрического моделирования. Одномерные обводы могут использоваться для приближенных вычислений, построения графиков, описывающих явления и процессы, в качестве линейных элементов определителя поверхности.

На данный момент наиболее разработаны методы моделирования одномерных обводов участками аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках с заданным порядком гладкости. Свойства обвода определяются функциями, задающими участки кривых, и характеристиками кривых в граничных точках.

Наращивание условий, накладываемых на участок обвода, требует увеличения параметрического числа формирующей его кривой. При этом возникают особые точки: точки перемены возрастания-убывания кривизны, смены хода кривой, точки перегиба и самопересечения. Неконтролируемое возникновение особых точек снижает качество получаемого решения.

Задачей разрабатываемого нами направления вариативного дискретного геометрического моделирования на основе пространственных угловых параметров является создание единой методики формирования плоских и пространственных одномерных обводов с обеспечением заданных геометрических свойств и особых условий. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и дифференциально-геометрическими характеристиками кривой. Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек.

Такой подход позволяет отказаться от аналитического представления участков кривой и формировать обвод исходя из заданных геометрических свойств.

Для реализации задачи необходимо разработать критерии оценки геометрических характеристик дискретно представленной кривой линии.

**Анализ последних исследований и публикаций**

Геометрические характеристики пространственной кривой линии могут определяться через параметры ее полярного торса [1]. Полярный торс является огибающей поверхностью нормальных плоскостей кривой линии. Ребро возврата полярного торса – геометрическое место соприкасающихся сфер кривой. Касательные к ребру возврата – оси кривизны, на которых расположены центры соприкасающихся окружностей. Таким образом, параметры полярного торса однозначно определяют кривизну, кручение, радиусы соприкасающихся сфер и динамику изменения их значений вдоль кривой.

Способ формирования одномерного обвода на основе дискретного аналога полярного торса предложен в [2]. Обвод формируется сгущением исходного точечного ряда по участкам постоянного хода, вдоль которых радиусы кривизны и соприкасающихся сфер монотонно возрастают или убывают. Кривую, соответствующую указанным требованиям, будем называть монотонной.

Аналог полярного торса – гранная полярная поверхность, образованная участками плоскостей ( $P_i$ ), перпендикулярных хордам, соединяющим последовательные исходные точки, и проходящих через середины хорд (рис. 1).

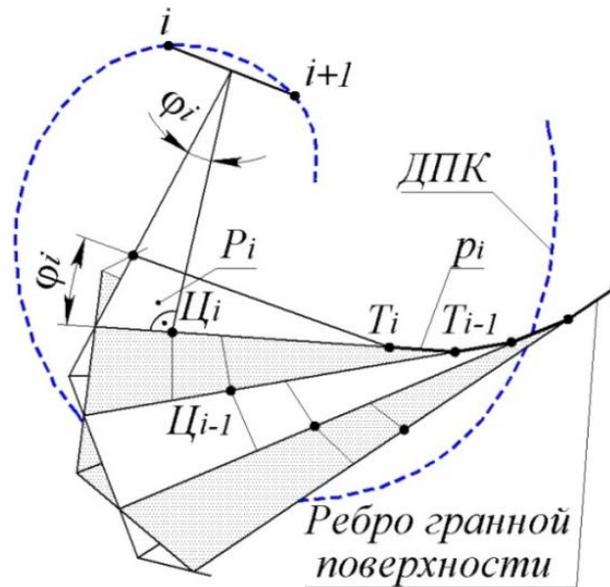


Рис. 1. Формирование гранной поверхности перпендикулярных плоскостей

Прямые пересечения перпендикулярных плоскостей ( $p_i$ ) являются аналогами осей кривизны формируемой кривой, а ломаная, образованная этими прямыми, представляет ребро возврата полярного торса.

Точки сгущения назначаются в плоскостях  $P_i$ , в результате чего получаем гранную полярную поверхность, состоящую из сколь угодно большого числа граней. В результате последовательных сгущений, в пределе, получим полярный торс, однозначно определяющий геометрические характеристики сформированного обвода.

**Формулирование цели исследования**

Определить требования к параметрам и расположению полярного торса, определяющего монотонную кривую линию с заданными геометрическими свойствами.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим кривую линию  $l$ , как траекторию движения точки  $M$ , принадлежащей нормальной плоскости  $N$ , обкатывающей полярный торс, ребро возврата которого – кривая правого хода (см. рис.2).

Геометрические характеристики кривой  $l$  определяются характеристиками ребра возврата полярного торса, направлением обкатывания торса плоскостью  $N$  и расположением точки  $M$  в этой плоскости.

На рис. 2 изображен момент, когда плоскость  $N$  касается полярного торса по прямой  $f$  – касательной ребра возврата в некоторой точке  $F$ .

Направление движения точки  $F$  вдоль ребра возврата определяется направлением обкатывания полярного торса плоскостью  $N$ . Ребро возврата разделяет полярный торс на две полости, которые сформированы полукасательными положительного и отрицательного направлений соответственно. Полукасательной положительного направления будем считать половину прямой  $f$ , в направлении которой направлен вектор скорости точки  $F$ .

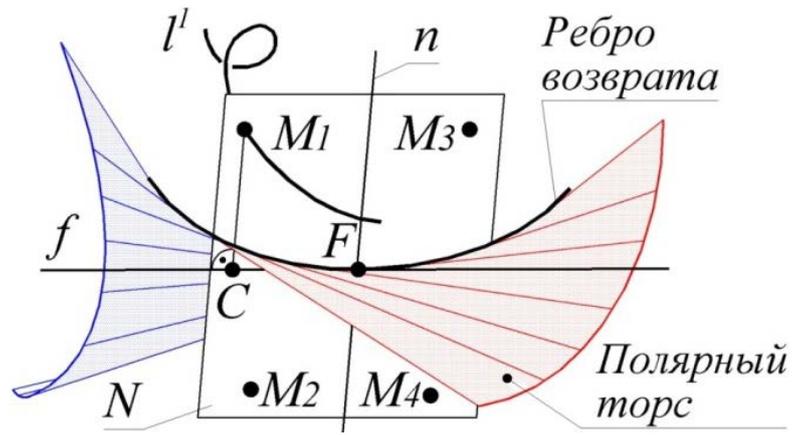


Рис. 2. Формирование монотонной кривой линии

Проведем в плоскости  $N$  прямую  $n$ , которая пересекает касательную  $f$  под прямым углом в точке  $F$ . Прямые  $f$  и  $n$  разделяют плоскость  $N$  на четыре части. В каждой четверти назовем точку –  $M^1, M^2, M^3, M^4$  и определим геометрические характеристики кривых линий  $l^1, l^2, l^3, l^4$ , которые являются траекториями движения этих точек. Механизм формирования характеристик кривой рассмотрим на примере линии  $l^1$ .

Пусть плоскость  $N$  перемещается таким образом, что ее четверть, в которой расположена точка  $M^1$  (первая четверть) накатывается на полость полярного торса, которая сформирована полукасательными положительного направления. Это означает, что на торс также накатывается четвертая четверть плоскости  $N$ , а вторая и третья четверти скатываются с него.

Для кривой  $l$  прямая  $f$  является осью кривизны, а точка  $F$  – центром соприкасающейся сферы (ССФ) в точке  $M$  [1]. Главная нормаль проходит через точку  $M$  перпендикулярно оси кривизны и пересекается с ней в центре соприкасающейся окружности (СО) – точке  $C$ .

Накатывание первой четверти плоскости  $N$  на полярный торс означает, что вдоль траектории движения точки  $M^1$  значения радиусов кривизны (расстояние  $|C, M|$ ) монотонно убывают.

Динамика изменения вдоль кривой  $l$  радиусов соприкасающихся сфер определяется расположением точки  $M$  относительно прямой  $n$ . Для кривой  $l^1$  механизм формирования радиусов соприкасающихся сфер показан на рис. 3.

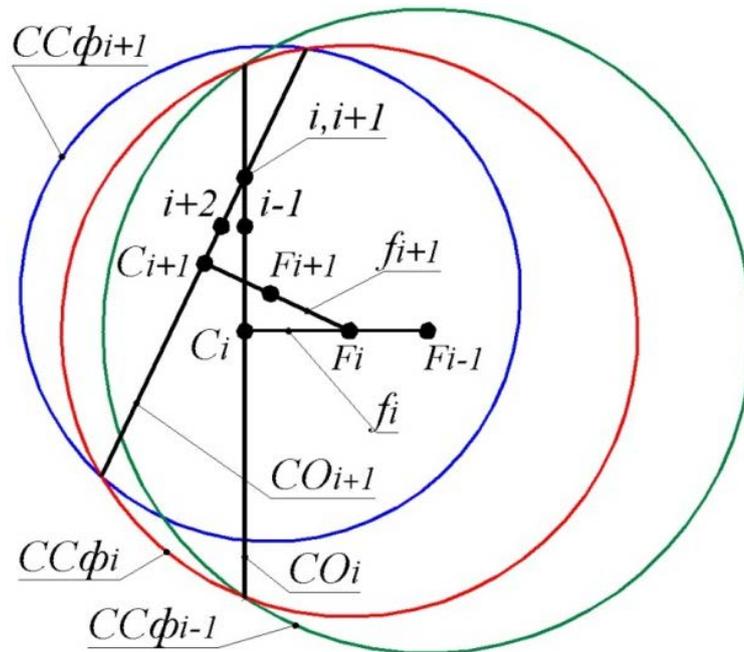


Рис. 3. Формирование геометрических характеристик кривой линии

$ССФ_i$ , определяемая бесконечно близкими точками  $i-1, i, i+1, i+2$ , изображена таким образом, что направление взгляда направлено вдоль касательной прямой  $t_i \equiv (i, i+1)$ . Соприкасающиеся окружности –  $СО_i$  (определяется точками  $i-1, i, i+1$ ) и  $СО_{i+1}$  ( $i, i+1, i+2$ ) будем считать расположенными на  $ССФ_i$ . Эти окружности получаем в пересечении  $ССФ_i$   $i$ -й и  $i+1$ -й соприкасающимися плоскостями –  $СП_i$  и  $СП_{i+1}$ , соответственно. Центр  $ССФ_i$  – точка  $F_i$ . Это точка пересечения осей кривизны, проходящих через центры кривизны  $C_i$  и  $C_{i+1}$ .  $ССФ_{i-1}$  определяется  $СО_i$  и бесконечно близкой точкой  $i-2$ , расположенной на кривой  $l$

за пределами  $CC\phi_i$ . Центр  $CC\phi_{i-1}$  – точка  $F_{i-1}$ , принадлежит оси кривизны  $(C_i, F_i)$ . При этом  $|C_i, F_i| < |C_i, F_{i-1}|$ . Соприкасающуюся окружность  $CO_{i-1}$ , которая определяется точками  $i-2, i-1, i$ , получаем в пересечении  $CC\phi_{i-1}$  и  $CP_{i-1}$ . При этом  $CP_{i-1}$  пересекает отрезок  $[C_i, F_{i-1}]$ . Таким образом, последовательные соприкасающиеся окружности определяют соприкасающуюся сферу, а последовательные соприкасающиеся сферы пересекаются по соприкасающейся окружности.

Ось кривизны  $f_i$  представлена как прямая, проходящая через принадлежащие ребру возврата полярного торса бесконечно близкие точки  $F_{i-1}$  и  $F_i$ . Соприкасающиеся сферы с центрами в этих точках пересекаются по соприкасающейся окружности с центром в точке  $C_i$ . Соотношение  $|C_i, F_{i-1}| > |C_i, F_i|$  означает убывание радиусов соприкасающихся сфер вдоль  $l^1$ .

Расположение последующих бесконечно близких точек  $i-3, i+4, \dots$  за пределами предыдущей соприкасающейся сферы обеспечивает монотонное изменение значений радиусов соприкасающихся сфер и окружностей:

$$\dots < R_{CC\phi_{i+1}} < R_{CC\phi_i} < R_{CC\phi_{i-1}} < \dots, \\ \dots < R_{CO_{i+1}} < R_{CO_i} < R_{CO_{i-1}} < \dots$$

Эта закономерность определяется взаимным положением последовательных  $CO$  и  $CC\phi$ , аналогичным показанному на рисунке. Кривая линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении, расположена за пределами ее соприкасающихся сфер.

Рассмотрим ось кривизны  $f$  как прямую, обкатывающую ребро возврата полярного торса, а центр соприкасающейся сферы  $F$  как точку, перемещающуюся по прямой  $f$ . Вместе с точкой  $F$  вдоль оси кривизны перемещается и прямая  $n$  (см. рис.2). Тогда точки плоскости  $N$ , в направлении которых перемещается прямая  $n$ , в данный момент перемещаются по кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся сфер монотонно убывают.

Ход кривой  $l$  определяется ходом ребра возврата ее полярного торса и расположением в нормальной плоскости  $N$  точки  $M$ .

На рис. 3 бесконечно близкие оси кривизны  $f_i$  и  $f_{i+1}$  представлены как прямые, пересекающиеся в центре  $F_i$  соприкасающейся сферы. Тогда при накатывании нормальной плоскости на полярный торс главная нормаль  $n_i$  кривой  $l^1$ , перпендикулярная оси кривизны  $f_i$ , вращается относительно касательной к кривой в точке  $M_i$  стремясь занять положение  $n_{i+1}$ . При этом центр кривизны  $C_i$  удаляется от точки  $F_i$ , принадлежащей ребру возврата.

Рассмотренная схема показывает, что точка  $M$ , расположенная в четверти плоскости  $N$ , которая накатывается на полость полярного торса, образованную полукасательными положительного направления, перемещается по кривой  $l$ , ход которой совпадает с ходом ребра возврата ее полярного торса. Из этого следует, что  $l^1$  и  $l^3$  – кривые правого хода, а  $l^2$  и  $l^4$  – кривые левого хода.

Аналогичный анализ параметров, определяющих перемещение точек  $M^2, M^3, M^4$  позволяет установить характеристики соответствующих кривых линий:  $l^1$  (п,  $R : <, R_{cf} : <$ ) – кривая правого хода, вдоль которой радиусы кривизны ( $R$ ) и соприкасающихся сфер ( $R_{cf}$ ) убывают;  $l^2$  (л,  $R : >, R_{cf} : <$ ) – кривая левого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей возрастают, а радиусы соприкасающихся сфер убывают;  $l^3$  (п,  $R : >, R_{cf} : >$ ) – кривая правого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают;  $l^4$  (л,  $R : <, R_{cf} : >$ ) – кривая левого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей убывают, а радиусы соприкасающихся сфер возрастают.

Если направление обкатывания полярного торса поменять на противоположное, точки  $M$  будут перемещаться по тем же траекториям, но в обратном направлении. Ход соответствующих кривых линий останется прежним, а динамика изменения радиусов соприкасающихся окружностей и сфер поменяется на противоположную. Следовательно, точка  $M^1$  превращается в  $M^3$  (при реверсном обкатывании движется по кривой с характеристиками  $l^3$ ),  $M^3$  – в  $M^1$ ,  $M^2$  – в  $M^4$ ,  $M^4$  – в  $M^2$ .

Анализ закономерностей расположения соприкасающихся окружностей и сфер вдоль кривой  $l^2$  ( $l^4$ ) показал, что линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях, расположена внутри своих соприкасающихся сфер.

Полярный торс, ребро возврата которого кривая линия левого хода, определяет другие четыре варианта сочетаний геометрических характеристик кривых линий:  $l^5$  (л,  $R : <, R_{cf} : <$ ),  $l^6$  (п,  $R : >, R_{cf} : <$ ),  $l^7$  (л,  $R : >, R_{cf} : >$ ),  $l^8$  (п,  $R : <, R_{cf} : >$ ).

Таким образом, существует восемь различных вариантов сочетаний направления возрастания радиусов кривизны, радиусов соприкасающихся сфер и хода вдоль монотонных кривых. Все варианты можно определить тремя параметрами:

- направление хода ребра возврата полярного торса кривой;
- направление обкатывания полярного торса нормальной плоскостью кривой;
- расположение в нормальной плоскости точки, описывающей при своем движении монотонную кривую.

Частным случаем монотонной кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении ( $l^1, l^3, l^5, l^7$ ), будем считать кривую постоянной кривизны. Кривая постоянной кривизны расположена за пределами своих соприкасающихся сфер, а ее линия центров кривизны совпадает с ребром возврата полярного тора.

Частным случаем монотонной кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях ( $l^2, l^4, l^6, l^8$ ), будем считать сферическую кривую линии.

Любую кривую можно рассматривать как состоящую из участков монотонных кривых, состыкованных в особых точках.

К особым точкам первой группы отнесем точки стыковки монотонных кривых, определяемых одним полярным торсом. Это могут быть точки нулевого радиуса кривизны или точки в которых центр кривизны совпадает с центром соприкасающейся сферы.

Ко второй группе отнесем точки стыковки монотонных кривых, определяемых различными полярными торсами. Полярные торсы ( $ПТ_1$  и  $ПТ_2$ ) касаются по оси кривизны, соответствующей такой особой точке (см. рис. 4).

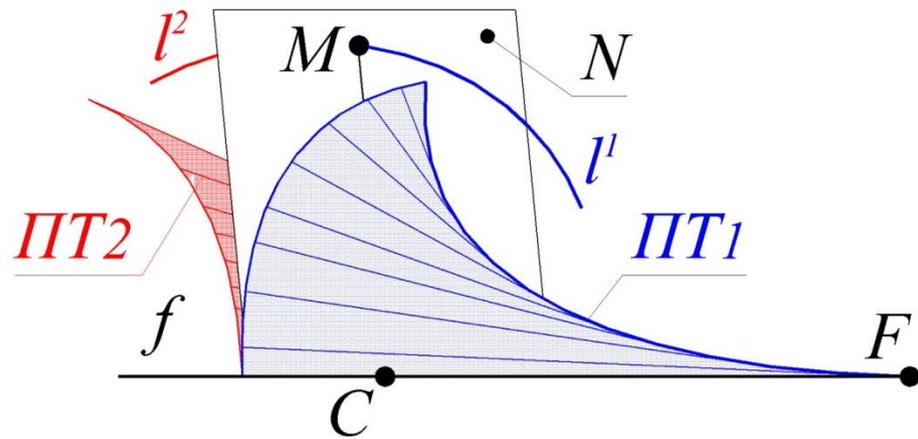


Рис. 4. Формирование особой точки пространственной кривой линии

#### Выводы

В результате проведенных исследований определены условия, при которых полярный торс определяет монотонную кривую линию – кривую постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают или убывают. Установлены возможные варианты сочетаний характеристик монотонных кривых и соответствующие параметры их полярных торсов. Полученные зависимости позволяют формировать на основе точечных рядов произвольной конфигурации одномерные обводы с заданными геометрическими свойствами и минимальным, по условиям задачи, числом особых точек.

#### Список использованной литературы

1. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / М.Я. Выгодский. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
2. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е.А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.