

*М. М. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н. В. ПІНЧУК, В. В. ТРЕТЯК, Н. А. ДЬОМІНА, І. О. ВОЛОШИНА*

## ТЕХНОЛОГІЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ ТА АНАЛІЗУ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Елементи трансмісії та інших конструкцій у багатьох випадках мають складну форму контактуючих поверхонь. З одного боку, ця форма визначається з кінематичних умов тобто мається на увазі передача руху між елементами конструкцій. З іншого боку, існує обмеження щодо міцності. Зокрема, це змушує створювати контактуючі поверхні близької форми. У результаті виникає зв'язана задача синтезу геометричної форми та аналізу кінематичної взаємодії складнопрофільних тіл. Для цього розроблено загальний підхід, що дає можливість цілеспрямовано варіювати форму контактуючих тіл. При цьому варіювана геометрична форма апроксимується якісними призматичними скінченими елементами. Для цього формується топологічно регулярна сітка скінчених елементів. У результаті забезпечується можливість управляти побудовою досліджуваних об'єктів, а також здійснювати багатоваріантні розрахунки в автоматизованому режимі. Відповідно, цей масив інформації стає основою для встановлення закономірностей впливу різних чинників на напружено-деформований стан контактуючих тіл. Це також дає можливість формування рекомендацій стосовно обгрунтування прогресивних технічних рішень вузлів, які поєднують окремі елементи конструкцій. Отже, забезпечуються і функціональні властивості цих вузлів, і обмеження, наприклад, за міцністю та довговічністю. На прикладі двопараметричних передач проілюстровано застосування та ефективність розроблених методів і моделей. Підтверджено відповідність результатів, отриманих різними методами.

**Ключові слова:** складнопрофільні тіла; контактна взаємодія; напружено-деформований стан; кінематична взаємодія

*М. М. ТКАЧУК, А. ГРАБОВСЬКИЙ, Н. ПІНЧУК, В. ТРЕТЯК, Н. ДЬОМІНА, І. ВОЛОШИНА*

## TECHNOLOGY OF SHAPING AND ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF MACHINE PARTS

Elements of transmissions and other machine parts in many cases have a complex shape of contacting surfaces. On the one hand, their form is determined by kinematic conditions associated with the transfer of motion between structural elements. On the other hand, the design geometry is limited by strength criteria. Keeping the shape of the contacting surfaces as close to each other as possible generally facilitates the reduction of stress levels. As a result, there is a combined problem of synthesis of geometric form and analysis of kinematic interaction of complex-profile bodies. A general approach that implements objective-driven variation of the shape of the contacting bodies has been developed for this purpose. At the same time, the varied geometric shape is approximated by prismatic finite elements. A topologically regular mesh of finite elements is formed. As a result, it is possible to parametrize the geometrical model of the researched objects, as well as to perform automated multivariate calculations. Accordingly, this array of information becomes the basis for establishing patterns of influence of various factors on the stress-deformed state of contacting bodies. It also makes it possible to formulate recommendations regarding the substantiation of advanced technological solutions of machine parts that transmit mechanical loads through moving contact. Therefore, both the functional properties of these structural components and limitations, for example, in terms of strength and durability, are provided. A method of geometric shape synthesis integrated with generalized parametric modeling was developed, as well as an approach to geometric synthesis of the shape of kinematically generated surfaces. This makes it possible to calculate the distribution of contact pressure and the stress-strain state of contacting complex bodies. For the formation of high-quality finite-element models, a method based on the creation of topologically regular mesh in the curvilinear coordinates of the working surfaces is proposed. The application and effectiveness of the developed methods and models are illustrated on the example of two-parameter transmissions. Correspondence of the results obtained by different methods was confirmed.

**Keywords:** complex-profile bodies; contact interaction; stress-strained state; kinematic interaction

**Вступ.** Елементи сучасних конструкцій проектується з урахуванням множини критеріїв. Насамперед висуваються вимоги виконання заданих функцій. Наприклад, для елементів зубчастих передач – це зміна кутової швидкості обертання коліс, для валів – можливість обертання в опорах, для шліцевих з'єднань – передача обертання з можливим зміщенням, а для осевих гідрооб'ємних передач із кульковими поршнями – це можливість перекошування куль по статорному кільцю (для шарикопідшипників – аналогічна вимога).

Перелічені вимоги задовольняються за рахунок вибору традиційних конструктивних рішень. Як правило, при цьому залишається свобода вибору геометричних параметрів (діаметр, ширина тощо). Саме за рахунок варіювання цих традиційних чисельних параметрів на етапі розрахунків забезпечується, наприклад, міцність та довговічність.

Описаний традиційний підхід стає непридатним при створенні нових типів конструкцій, які забезпечують більш складні види рухів, наприклад, це двопараметричні передачі [1]. Вони дають можливість, крім обертання, забезпечувати взаємне зміщення зубчастих коліс без втрати контакту. Уже на етапі синтезу геометричної форми робочих поверхонь зубчастих коліс втрачається можливість опису цієї форми обмеженою множиною чисельних параметрів. При цьому робочі поверхні у загальному випадку не тільки не описуються аналітич-

но, а отримуються чисельно у вигляді хмар пар попарно спряжених точок.

У такому разі варіюваним «параметром» є сама форма однієї зі сполучених поверхонь. Вона може змінюватись як «глобально» (тобто зі збереженням подібності, але змінюється у розмірах), так і «локально» (тобто зміна околу будь-якої її точки). Остання обставина є важливою перешкодою застосування звичайного апарату параметричної оптимізації. Справа у тому, що у результаті множина «параметрів» стає, на відміну від традиційної скінченновимірної, нескінченновимірною.

Відповідно, потрібна розробка загального підходу до розв'язання згаданих вище двозв'язаних задач, що і є предметом цієї статті.

**Аналіз існуючих методів синтезу геометричної форми та аналізу контактної міцності елементів конструкцій.** Синтез геометричної форми робочих поверхонь у випадку кінематично зв'язаних тіл підпорядковується основній умові [1, 2]:

$$(\mathbf{v}_{12}, \mathbf{n}) = 0, \quad (1)$$

де  $\mathbf{v}_{12}$  – швидкість відносного руху сполучених тіл;

$\mathbf{n}$  – вектор загальної нормалі у точці дотику.

Дотримуючись [1], можна для ідентифікації форми

© М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, Н. В. Пінчук, В. В. Третяк, Н. А. Дьоміна, І. О. Волошина, 2023

робочої поверхні одного із тіл ввести узагальнений параметричний опис [1]:

$$S_I = S_I(p), \quad (2)$$

де  $p$  – «узагальнений параметр» (сукупність інформації, яка дає можливість однозначно побудувати цю поверхню  $S_I$ ).

Тоді подання (2), будучи інтегрованим у (1), набуває вигляду

$$L_1(p) = 0, \quad (3)$$

де  $L_1$  – оператор, що залежить від типу конструкції.

Співвідношення (3) становить у загальному вигляді задачу геометричного синтезу щодо «узагальнених параметрів»  $p$ . Ці параметри природним чином переходять у задачу аналізу напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих тіл. Дійсно, із (3) за заданим набором параметрів  $p$  відновлюється поверхня  $S_{II}$ , спряжена з  $S_I$ .

Тоді, маючи у розпорядженні  $S_I$  і  $S_{II}$ , можна побудувати 3D області  $\Omega_I$  та  $\Omega_{II}$  (відповідно, які займають тіла  $I$  та  $II$ ).

Після побудови поверхонь  $S_I$ ,  $S_{II}$  та областей  $\Omega_I$ ,  $\Omega_{II}$  можна розв'язувати задачу аналізу НДС контактуючих тіл. При цьому можна відокремити 3 напрями [3]. Перший базується на моделі Герца [3]. Контактуючі тіла  $\Omega_I$ ,  $\Omega_{II}$  моделюються напівнескінченими параболоїдами. У кожній точці стикування геометрична інформація обмежується кривизнами поверхонь  $S_I$  і  $S_{II}$ . На основі цієї інформації визначається область контакту (еліпс) та розподіл контактного тиску (напружень)  $q$ . За їх максимальним рівнем оцінюється міцність тіл  $I$  і  $II$ .

На розвиток цього напрямку можна відмовитися від подання тіл  $I$  і  $II$  у вигляді параболоїдів. Це – другий напрямок. У його рамках ці тіла подаються як два напівпростори. Між ними існує зазор, аналогічний зазору між  $S_I$  і  $S_{II}$  у початковий момент стикування без навантаження. Тоді можна, залучаючи метод граничних інтегральних рівнянь або варіаційний принцип Калькера [4], запропонувати розв'язувальні рівняння відносно  $q$  на поверхні напівпростору.

Третій напрямок базується на нехтуванні спрощуючими припущеннями перших двох. При цьому ставиться задача визначення 3D тіл  $\Omega_I$  і  $\Omega_{II}$ , які можуть контактувати на поверхнях  $S_I$  і  $S_{II}$ . При цьому у загальному випадку невідомі і форма дійсної області контакту, і розподіл контактний тиску, і напружено-деформований стан контактуючих тіл.

Одним із найпотужніших підходів для розв'язання задачі у останньому випадку є використання апарату теорії варіаційних нерівностей [5–8]. При його застосуванні задача зводиться до пошуку екстремуму функціоналу повної внутрішньої енергії на множині пружних переміщень  $\mathbf{u}$ . Ці переміщення повинні відповідати умовам непроникнення тіл одне у інше.

Крім того, ще одним із потужних методів аналізу контактної взаємодії пружних тіл є варіаційний принцип Калькера та метод граничних елементів на його основі

[1, 9–12]. При цьому важливо, щоби у такі макромоделі інтегрувалися мікромоделі властивостей поверхневих шарів (шорсткість, наплення, плівки, покриття, тертя, адгезія тощо) [13–22].

Розроблені методи та моделі не вичерпують усіх проблемних питань стосовно контактної взаємодії, особливо для складнопрофільних тіл [1–3].

**Загальний підхід до розв'язання задачі дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл із кінематично генерованими поверхнями.** *Формування геометричної моделі об'єктів дослідження.* Розглядається контакт двох тіл  $I$  та  $II$  форми (див. вище), які здійснюють два види можливих рухів один відносно іншого. Вони відповідають умові (1). Назвемо поверхні  $S_I$  і  $S_{II}$  цих тіл кінематично генерованими поверхнями (КГП). Самі тіла, які займають 3D області  $\Omega_I$  і  $\Omega_{II}$ , назвемо складнопрофільними тілами (СПТ). Це викликано тим, що форма поверхонь цих тіл у загальному випадку не описується аналітично (див. вище), тобто розглядається контакт СПТ із КГП.

Пропонується наступний спосіб синтезу геометричної форми  $S_I$  і  $S_{II}$ :

1) задається параметризація форми поверхні  $S_I = S_I(\alpha, \theta)$ ; тут координати  $\alpha, \theta$  визначають положення поточної точки поверхні  $S_I$ :

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{r}_I(\alpha, \theta, p); \quad (4)$$

2) параметри  $p$  у (3) визначають свободу у виборі форми поверхні  $S_I$ , у цілому ці параметри є довільними та варіюються;

3) при підстановці (4) у (1) та (3) отримуємо

$$L_1(\alpha, \theta, p) = 0; \quad (5)$$

4) із системи рівнянь (1)–(5) визначається поверхня

$$S_{II} = S_{II}(\alpha, \theta, p); \quad (6)$$

5) поверхня  $S_{II}$  визначається, з одного боку, у системі координат  $(\alpha, \theta)$  поверхні  $S_I$ ; з іншого боку, співвідношення (6) визначають також параметричну залежність від «узагальнених параметрів»  $p$ ;

6) у результаті при певному виборі поверхні  $S_I$  поверхня  $S_{II}$  визначається у вигляді хмари точок

$$\mathbf{r}_{II} = \mathbf{r}_{II}(\alpha, \theta, p), \quad (7)$$

спряжених точкам  $\mathbf{r}_I(\alpha, \theta, p)$ .

*Формування чисельної моделі складнопрофільного тіла із кінематично генерованою поверхнею.* Як зазначалося вище, через особливості об'єкта досліджень для аналізу напружено-деформованого стану контактуючих СПТ із кінематично генерованими поверхнями переважно використовуються чисельні процедури. Однак можливе застосування і аналітичних моделей на початкових етапах. Розглянемо 3 варіанти таких моделей.

*Аналітична модель Герца.* Маючи у розпорядженні моделі поверхні  $S_I$  (3), (4) та  $S_{II}$  (6), можна визначити розподіл зазору між цими поверхнями

$$\Delta_{I-II} = \Delta_{I-II}(\alpha, \theta, p). \quad (8)$$

Квадратична форма (8) від координат  $\alpha, \theta$  дає змогу визначати тензор кривизн, а за відомими залежностями моделі Герца [1] – розподіл контактного тиску  $q$ . Оскільки аналітичні залежності (8) побудувати важко, для цього можна застосувати напіваналітичний метод. Він полягає в тому, що на поверхні  $S_I$  та  $S_{II}$  у координатах  $\alpha, \theta$  накидається сітка дискретних точок. У кожній точці цієї множини за співвідношеннями (4) та (6) визначається (8). Далі обчислюється набір  $q_{mn}^{\max}$ , де  $m, n$  – номери точок вздовж координат  $\alpha, \theta$  відповідно. Для оцінки міцності задіюється рівень контактного тиску

$$q^{\vee} = \max_{m,n} (q_{mn}^{\max}). \quad (9)$$

*Адаптація методу граничних елементів для побудови чисельної моделі напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із кінематично генерованими поверхнями.* У разі застосування методу граничних елементів (МГЕ) передбачається, що на загальну дотичну площину до поверхонь  $S_I$  та  $S_{II}$  у точці множини  $\Lambda$  накидається триангуляційна сітка. На цій сітці шуканий тиск апроксимується, наприклад, кусково-лінійними функціями  $\phi_{mn}$  [1]

$$q \approx \sum_{m,n \in \Lambda} q_{mn} \cdot \phi_{mn}, \quad (10)$$

де  $q_{mn}$  – вузлові значення  $q$ .

Для визначення  $q_{mn}$  апроксимація (10) підставляється у функціонал Калькера [1]

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{(S^-)} q \cdot w(q) dS + \int_{(S^-)} q(h - \delta) dS \rightarrow \min, \quad (11)$$

де  $w$  – потенціал Буссінеска-Черутті;

$S^-$  – поверхня можливого контакту.

У результаті шукаємо мінімум квадратичної форми за умови невід'ємності контактної тиску:

$$\Phi(q_{mn}, q_{mn}) \rightarrow \min, q_{mn} \geq 0. \quad (12)$$

За знайденим  $q$  за відомими співвідношеннями теорії пружності визначається напружено-деформований стан складнопрофільних тіл з КПТ, а потім за рівнем напружень оцінюється міцність цих тіл.

*Адаптація методу скінченних елементів для побудови чисельної моделі напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із кінематично генерованими поверхнями.* Особливий інтерес для випадку контакту СПТ з поверхнями, що кінематично генеруються, становить метод скінченних елементів (МСЕ). І тут відправними є співвідношення теорії варіаційних нерівностей (ТВН) [1, 5–7]. Вони зводяться до мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії системи тіл

$$I(u, u, p) \rightarrow \min \quad (13)$$

на множині переміщень, що задовольняють умовам

$$u_{S_I}^n + u_{S_{II}}^n \leq \Delta_{I-II}. \quad (14)$$

Тут  $u_*^n$  – нормальні переміщення на відповідних поверхнях, а  $\Delta_{I-II}$  – зазор по нормалі між  $S_I$  та  $S_{II}$ . У цьому випадку  $u$  апроксимується на сітці скінченних елементів:

$$u^I = \sum_{X_I} u_{X_I} \cdot \psi_{X_I}; u^{II} = \sum_{X_{II}} u_{X_{II}} \cdot \psi_{X_{II}}, \quad (15)$$

де  $u^I, u^{II}$  – розподіл переміщень у областях  $\Omega_I$  та  $\Omega_{II}$  відповідно,

$X_I, X_{II}$  – множина вузлів скінченно-елементної сітки,

$\psi_{X_I}, \psi_{X_{II}}$  – базисні функції МСЕ, які відповідають поточним вузлам  $X_I, X_{II}$ .

Традиційна технологія МСЕ у випадку СПТ з кінематично генерованими поверхнями модифікується. Зокрема, для підвищення точності апроксимації (15) рекомендується застосування призматичних скінченних елементів. Вони краще тетраедральних. Однак для випадків складної геометричної форми  $S_I$  та  $S_{II}$  автоматичні мешери сітці із призматичними елементами можуть не створити. Тому пропонується таку сітку будувати у 2 етапи. На першому етапі будується топологічно регулярна чотирикутна сітка пар вузлів у координатах  $\alpha, \theta$ . Ця сітка має два типи вузлів на  $S_I$  та  $S_{II}$ . Кожен із вузлів на  $S_I$  має спряжений йому вузол на  $S_{II}$ , і навпаки. На другому – сітки на  $S_I$  та  $S_{II}$  протягуються (операція «sweep») всередину об'ємів  $\Omega_I$  та  $\Omega_{II}$  відповідно. Отримується топологічно регулярна сітка скінченних елементів.

Далі застосовується звичайна процедура МСЕ: визначаються контактний тиск  $q$  та компоненти НДС тіл  $I$  і  $II$ . Міцність оцінюється за рівнем діючого напруження.

**Розв'язання прикладних задач із застосуванням запропонованого підходу.** Ілюстрація підходу – на прикладі двопараметричних передач [1]. Поверхня  $S_I$  утворена обертанням евольвенти  $E$  відносно певної осі  $Oz$  (рис. 1). На рис. 2 наведена початкова поверхня для формування робочих поверхонь зубів спряженого зубчастого колеса цієї двопараметричної передачі.

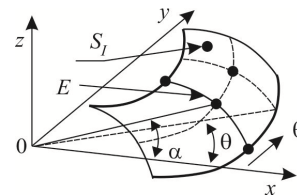


Рисунок 1 – Формування поверхні  $S_I$

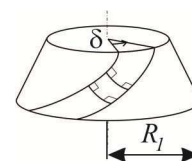


Рис. 2 – Лінії зубів на конічному колесі

На рис. 3 наведена скінченно-елементна модель зуба колеса двопараметричних передач, на рис. 4 – кон-

кретні основні параметри, а на рис. 5 – робоча поверхня зуба конічного колеса.

Для експрес-аналізу контактної тиску за Герцем побудовані напрями головних кривизн робочої поверхні зуба на конічному колесі (рис. 6, 7). За обчисленими кривизнами визначено контактний тиск. Крім того, здійснено розрахунок НДС за допомогою МСЕ (рис. 8). На рис. 9, 10 – контактні зони та розподіл контактної тиску, а також локальна концентрація напруження у зоні контакту у центральній площині.

Характер розподілу контактної тиску і зон контакту за моделлю Герца і МСЕ ідентичні (кількісна відмінність – у межах 10%).

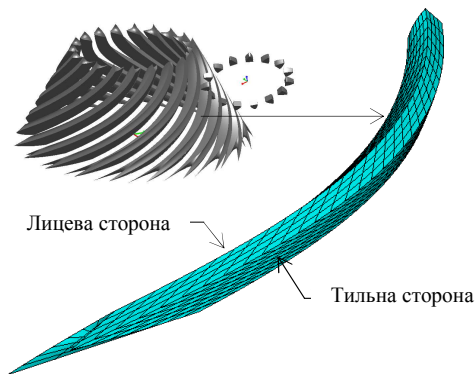


Рисунок 3 – Скінченно-елементна модель зуба колеса двопараметричної передачі

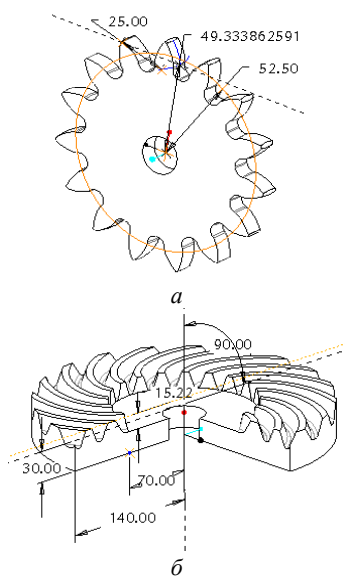


Рисунок 4 – Основні розміри колеса:  
а – циліндричного; б – «плоского» конічного

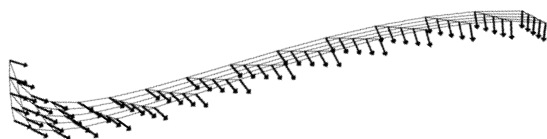


Рисунок 5 – Робоча поверхня зуба конічного колеса

**Висновки.** У роботі описано новий підхід до дослідження напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із кінематично генерованими поверхнями з урахуванням контактної взаємодії. При цьому можна

відзначити такі обставини.

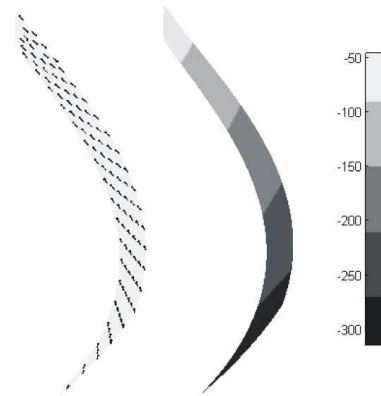


Рисунок 6 – Напрями головних кривизн, що відповідають негативним радіусам кривизни

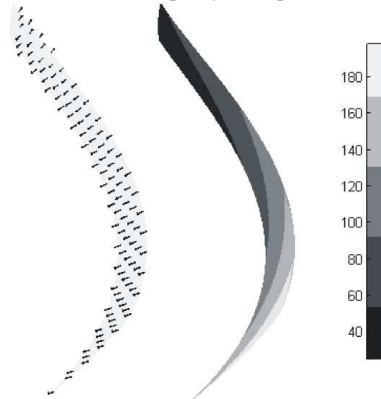


Рисунок 7 – Напрями головних кривизн, що відповідають позитивним радіусам кривизни

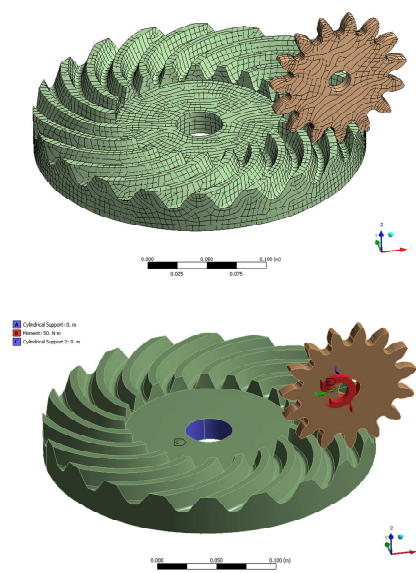


Рисунок 8 – Скінченно-елементна сітка коліс «плоскої» циліндро-конічної передачі, закріплення та навантаження

1. Для формування геометричної форми робочих поверхонь контактуючих тіл розроблено метод формування їх у вигляді множини пар спряжених точок на різних контактуючих поверхнях. Таким чином, виходить 2 хмари попарно спряжених точок. Це, з одного боку, ускладнює застосування традиційних методів розрахунку НДС цих тіл. Однак, з іншого боку, саме таким

шляхом можна розв'язувати задачу синтезу геометричної форми кінематично генерованих поверхонь.

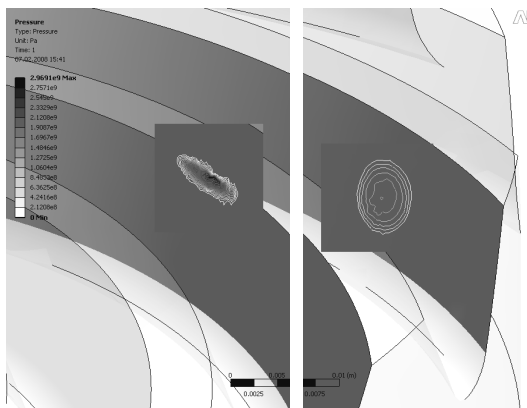


Рисунок 9 – Контактні зони і розподіл контактної тиску

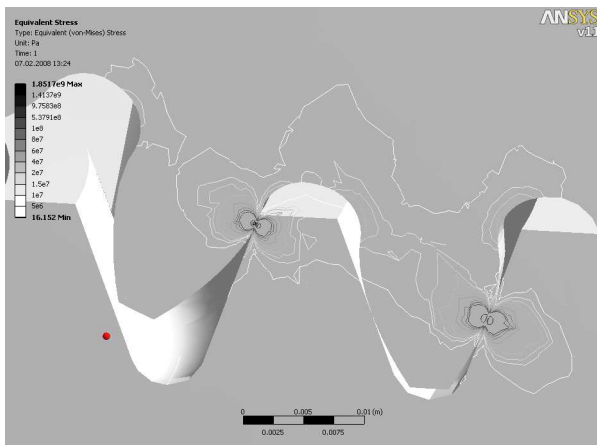


Рисунок 10 – Локальна концентрація напруження у зоні контакту у центральній площині

2. Розроблений метод синтезу геометричної форми інтегрований із узагальненим параметричним моделюванням. Це дає можливість, на відміну від традиційних підходів, варіювати об'єкт досліджень при варіюванні як чисельних параметрів, так і будь-яких інших. Таким чином, створюється потенційна можливість цілеспрямованого пошуку раціональних технічних рішень таких СІПТ, наприклад, за критеріями міцності.

3. Розроблений підхід до геометричного синтезу форми кінематично генерованих поверхонь дає можливість розраховувати розподіл контактної тиску та напружено-деформованого стану контактуючих складнопрофільних тіл. Зокрема, описано адаптацію напіваналітичної моделі Герца, а також методи граничних та скінченних елементів.

4. Для формування якісних скінченно-елементних моделей запропоновано метод, який ґрунтується на створенні топологічно регулярних сіток у криволінійних координатах робочих поверхонь. У результаті будуються скінченно-елементні моделі із призматичних скінченних елементів, які мають підвищену точність апроксимації шуканих змінних порівняно з тетрадральними.

5. На прикладі двопараметричних передач проілюстровано застосування та ефективність розроблених методів і моделей. Підтверджено відповідність результа-

тів, отриманих різними методами.

У цілому розроблений підхід можна застосовувати до дослідження напружено-деформованого стану широкого спектру складнопрофільних тіл із кінематично генерованими поверхнями.

#### Список літератури

1. Ткачук М. М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*. Автореф. дисертації на здобуття наук. ступеня доктора технічних наук. Спеціальність 01.02.04 – механіка деформованого твердого тіла. Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2019. 43 с.
2. Ткачук М. М., Саверська М. С., Куценко С. В., Зінченко О. І., Ключков І. С., Ткачук М. А., Волошина І. О. Теоретичні основи досліджень контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів машин військового та цивільного призначення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. 2022. № 1. С. 139–147.
3. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Saverska M., Hrechka I. (2020). A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 177 (103), pp. 16–25.
4. Kalker J.J. (1977). Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.*, vol. 20, pp. 199–221.
5. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. (2015). Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–539.
6. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Classics in Applied Mathematics* (Том 31). SIAM, 2000. 333 p.
7. Trémolières R., Lions J.-L., Glowinski R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. Amsterdam: Elsevier, 2011. 775 p.
8. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовский А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 33 (1309). С. 43–63.
9. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/7 (95), pp. 22–31.
10. Zhao J., E. Vollebregt, C. (2016). Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21 (1), pp. 119–141.
11. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
12. Tkachuk M. (2018). A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7(93), pp. 34–41.
13. Slobodyan B.S., Lyashenko B.A., Malanchuk N.I., Marchuk V.E., Martynyak R.M. (2016). Modeling of contact interaction of periodically textured bodies with regard for frictional slip. *Journal of Mathematical Sciences*, 215 (1), pp. 110–120.
14. Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2018). Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps. *Materials Science*, 54(2), pp. 194–201.
15. Malanchuk N. I., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2017). Friction Sliding of Elastic Bodies in the Presence of Subsurface Inclusions. *Materials Science*, 52(6), pp. 819–826.
16. Li Q., Popov V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
17. Ciavarella M. (2015). Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 104, pp. 104–111.
18. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 3(1):3293.
19. Persson BNJ. (2001). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, vol. 87(11), pp. 116101.
20. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
21. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактом взаимодействии шероховатых тел с применением модели

нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2016. № 1. С. 3–14.

22. Ткачук М. М. *Контактна механіка тїл із урахуванням нелїнійних властивостей поверхневих та проміжних шарів*: монографія. Дніпро: Видавець Обдїмко Ольга Станїславївна, 2022. 255 с.

#### References (transliterated)

1. Tkachuk M. M. *Mikromexanichni modeli ta metody` oserednennyya vlasty`vostej materialiv mrezhevoyi struktury` ta promizhny`x shariv kontaktuyuchy`x til*. Avtoref. dy`sertatsiyi na zdobuttya nauk. stupenya doktora technichny`x nauk. Special`nist` 01.02.04 – mexanika deformivnogo tverdogo tila. Insty`tut problem mashy`nobuduvannya im. A.M. Pidgomogo NAN Ukrainy`. Kharkiv, 2019. 43 p.
2. Tkachuk M. M., Savers`ka M. S., Kucenko S. V., Zinchenko O. I., Klochkov I. Ye., Tkachuk M. A., Voloshy`na I. O. Teorety`chni osnovy` doslidzhen` kontaktnoyi vzayemodiyi ta pruzh-no-plasty`chnogo deformuvannya elementiv mashy`n vijs`kovogo ta cy`vil`nogo pry`znachennyya. *Visny`k Nacional`nogo technichnogo universy`tetu «KhPI»*. Seriya: Mashy`noznavstvo ta SAPR. 2022, no. 1, pp. 139–147.
3. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Saverska M., Hrechka I. (2020). A semi-analytical method for analys of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1/7 (103), pp. 16–25.
4. Kalker J.J. (1977). Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl*, vol. 20, pp. 199–221.
5. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. (2015). Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–539.
6. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Classics in Applied Mathematics* (Том 31). SIAM, 2000. 333 p.
7. Trémolières R., Lions J.-L., Glowinski R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. Amsterdam: Elsevier, 2011. 775 p.
8. Tkachuk N.N., L`vov G.I., Grabovskij A.V., Skripchenko N.B. Kontaknoe vzaimodejstvie jelementov mashin s neli-nejno uprugim promezhutochnym sloem. *Visny`k Nacional`nogo technichnogo universy`tetu «Kharkivs`kyj` politexnichny`j` insty`tut»*. Kharkiv, NTU «KhPI». 2018, no. 33 (1309), pp. 43–63.
9. Tkachuk M.M. , Skripchenko N., Tkachuk M.A. , Grabovskiy A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/7 (95), pp. 22–31.
10. Zhao J., E. Vollebregt, C. (2016). Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21 (1), pp. 119–141.
11. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
12. Tkachuk M. (2018). A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker’s Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7(93), pp. 34–41.
13. Slobodyan B.S., Lyashenko B.A., Malanchuk N.I., Marchuk V.E., Martynyak R.M. (2016). Modeling of contact interaction of periodically textured bodies with regard for frictional slip. *Journal of Mathematical Sciences*, 215 (1), pp. 110–120.
14. Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2018). Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps. *Materials Science*, 54(2), pp. 194–201.
15. Malanchuk N. I., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2017). Friction Sliding of Elastic Bodies in the Presence of Subsurface Inclusions. *Materials Science*, 52(6), pp. 819–826.
16. Li Q., Popov V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
17. Ciavarella M. (2015). Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 104, pp. 104–111.
18. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 3(1):3293.
19. Persson B.N.J. (2001). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, vol. 87(11), pp. 116101.
20. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
21. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. Reshenie zadach o kontaktnom vzaimodejstvii sferohovatyh tel s primeneniem modeli nelinejnogo vinklerovskogo sloja. *Mexanika ta mashy`nobuduvannya*. Kharkiv, NTU «Khpi». 2016, no. 1, pp. 3–14.
22. Tkachuk M. M. *Kontaktna mexanika til iz uraxuvannyam nelinijny`x vlasty`vostej poverxnevyy`x ta promizhny`x shariv*: monografiya. Dnipro: Vy`davec` Obdy`mko Ol`ga Stanislavivna, 2022. 255 p.

Надійшла (received) 24.02.2023

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ткачук Микола Миколайович / Tkachuk Mykola M.** – доктор технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org)

**Грабовський Андрій Володимирович / Grabovskiy Andrey** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Пінчук Наталія Володимирівна / Pinchuk Natalija** – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Матеріалознавство», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0954-2266>; e-mail: [spiritnata@gmail.com](mailto:spiritnata@gmail.com)

**Третьяк Владислав Володимирович / Tretyak Vladeslav** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [vladeslav2205@gmail.com](mailto:vladeslav2205@gmail.com)

**Дьоміна Наталя Анатоліївна / Domina Natalia** – кандидат технічних наук, доцент, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, доцент кафедри «Вища математика і фізика», м. Мелітополь, Запорізька обл., Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1118-1834>; e-mail: [natalia.domina@tsatu.edu.ua](mailto:natalia.domina@tsatu.edu.ua).

**Волошина Ірина Олександрівна / Voloshyna Iryna** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [s1802@tmm-sapr.org](mailto:s1802@tmm-sapr.org)