МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

кандидат технічних наук

НАЙДИШ Андрій Володимирович

УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ТОЧКОВИХ МНОЖИН НА ОСНОВІ ПЕРЕНЕСЕННЯ ДО ПРОСТОРУ ПАРАМЕТРІВ

Спеціальність 05.01.01. –

Прикладна геометрія, інженерна графіка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 1998

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Таврійській державній агротехнічній академії Міністерства агропромислового комплексу України

Науковий консультант: - доктор технічних наук, доцент
Верещага Віктор Михайлович,
ТДАТА, професор кафедри
нарисної геометрії та інженерної графіки;

Офіційні опоненти: - доктор технічних наук, професор
Куценко Леонід Миколайович,
ХІПБ, заступник начальника кафедри
пожежної техніки;
- доктор технічних наук, професор
Грибов Сергій Миколайович
НТУУ "КПІ", професор кафедри
нарисної геометрії, інженерної і
комп'ютерної графіки;
- доктор фізико – математичних наук, професор
Хомченко Анатолій Никифорович,
ХДТУ, завідувач кафедри прикладної математики та
математичного моделювання.

Провідна установа: Фізико – технічний університет низьких температур
НАН України

Захист відбудеться "___ "_______1998р. о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.06 у Київському державному технічному універсітеті будівництва і архітектури за адресою:

252037 Київ – 37, Повітрофлотський просп., 31.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського державного технічного університету будівництва і архітектури за адресою:

252037 Київ – 37, Повітрофлотський просп., 31.

Автореферат розісланий ______________ 1998р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради _______________________ В.О. Плоский

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Як правило, у задачах геометричного моделювання, де вхідними даними (ВД) виступають дискретні точкові множини, число точок значно перевищує число параметрів моделюючої кривої, так що деякі точки мають ненульові відхилення (ухилення) від розрахункового значення. Методи отримання рішення в цих умовах є статистичними, коли вводиться деяка цільова функція, що встановлює залежність між відхиленнями(критерій розв’язання задачі).

Цільова функція може носити екстремальний характер, коли відшукуються параметри моделюючої функції при екстремальних значеннях критерію; неекстремальний характер в інших випадках.

Найбільш важливими аспектами геометричного моделювання явищ і процесів є апроксимація, оптимізація, статистика. Цільові функції при цьому можуть бути як екстремальними, так і неекстремальними.

Порівняльний аналіз означених аспектів дозволяє зробити висновок **про пріоритет розробки напрямків і методів рішення екстремальних задач**, що складають основу геометричного моделювання у цій області.

Цільові функції екстремальних задач можуть бути такими, що:

- **диференціюються** (пошук экстремуму цільової функції здійснюється методами математичного аналізу);
- **не диференціюються** (наприклад, критерій найменшого сумарного відхилення (НСВ)). Тут методи математичного аналізу неспроможні і потрібно шукати нові підходи.

З математичної точки зору проблема рішення екстремальних задач з цільовими функціями, що диференціюються, в основному вирішена. В той же час проблема розв’язання екстремальних задач з цільовими функціями, що не диференціюються, в повній мірі не вирішена, в особливості при дискретному завданні ВД.

Тут, принаймні, можна вказати на метод найменших модулів (МНМ), що являє собою різновид зважених середньоквадратичних наближень; запропонований Епішиним Ю. Г. метод найменших абсолютних відхилень, а також спроби Успенського А. К. реалізувати критерій найменших граничних відхилень (НГВ). Однак достатніх теоретичних положень і конструктивних алгоритмів рішення, виключаючи МНМ, не було отримано.

Все це говорить про необхідність рішення **важливої наукової проблеми геометричного моделювання екстремальних задач з функціями, що не диференціюються, для дискретних точкових множин**.

Актуальність рішення проблеми визначається її винятковою важливістю для практики, де самий зміст явища вимагає оцінок, відмінних від оцінок методу найменших квадратів (МНК-оцінок). Отримання ефективних і обґрунтованих оцінок впливає на рівень технічних рішень при проектуванні, на рівень прийняття управлінських рішень при економіко-математичному моделюванні і розв'язанні задач оптимізації, на рівень прийняття прогнозних рішень, соціальних і господарських програм і т. ін.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Теоретичні дослідження у роботі виконані в рамках комплексної науково-дослідної програми Таврійської державної агротехнічної академії з геометричного моделювання явищ і процесів в сільськогосподарському виробництві. В процесі впровадження результатів досліджень вирішувалися задачі в рамках Урядової програми реструктуризації господарств Мінагропрому України, програми координації і прогнозування розвитку галузі автомобілебудування в Міністерстві промислової політики України, науково-виробничої програми створення легкового автомобіля на ВАТ "АвтоЗАЗ" і ін.

Мета і задачі дослідження.

Мета роботи – розробити теоретичні основи геометричного моделювання дискретних точкових множин (ДТМ) для рішення екстремальних задач з функціями, що не диференціюються.

Складність досягнення поставленої мети полягає в тому, що, зважаючи на специфічні властивості вказаних функцій-критеріїв, неможливо встановити конструктивний математичний (функціональний) зв'язок між координатами точок заданої множини і параметрами моделюючої функції в просторі вхідних даних. Цього можна домогтися перенесенням до простору параметрів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі **задачі**:

- розробити методологічні принципи нового спрямування геометричного моделювання екстремальних задач з функціями, що не диференціюються на дискретних точкових множинах (ДТМ);
- виконати аналіз існуючих статистичних методів моделювання ДТМ;
- розробити спосіб перенесення до простору параметрів моделюючих функцій, що дозволить встановити конструктивний зв'язок між вхідними даними і цими параметрами;
- в рамках нового спрямування розробити теоретичні основи і алгоритми методів геометричного моделювання ДТМ за критеріями НСВ і НГВ;
- виконати обчислювальну і програмну реалізацію методів, що пропонуються;
- здійснити впровадження в практику.

Методика досліджень. У процесі розв'язання поставлених задач використовувались методи нарисної і аналітичної геометрії, теорії перетворень, теорії апроксимації, регресійного аналізу, економіко-математичного моделювання; обчислювальні методи.

Теоретичною базою для даних досліджень стали роботи провідних учених:

- у галузі перенесення до простору параметрів і параметризації перетворень: І. Г. Балюби, І. І. Котова, В. Є. Михайленка, О.Л. Підгорного, М. М. Рижова і ін.;
- у галузі статистичних методів: М. Є. Браславець, Ю. В. Василенка, Н. І. Ідельсона, Л. В. Канторовича, А. Н. Колмогорова, Ю. В. Линника, Р. Литтла, Є. Н. Львівського, А. А. Маркова, Р. Міллса, Ф. Мостеллера, В. І. Мудрова, С. Р. Рао, Д. У. Снедекора, Дж. Тьюки і ін.;
- у галузі геометричного моделювання: Ю.І. Бадаева, В.В. Ваніна, С.М. Грибова, Г.С. Іванова, С.М. Ковальова, І.І. Котова, Л.Н. Куценка, В.Є. Михайленка, В. М. Найдиша, В. А. Надолинного, В. С. Обухової, А. В. Павлова, О. Л. Підгорного, І. А. Скидана і ін.

Наукову новизну отриманих результатів складають:

1. Нове спрямування геометричного моделювання екстремальних задач з функціями, що не диференціюються, на дискретних точкових множинах, яке містить в собі:

- перенесення до простору параметрів, що зберігає метричні характеристики цільової функції;
- рішення екстремальної задачі в просторі параметрів;
- побудова рішення у вхідному просторі.

2. Вперше запропоновані і розроблені в рамках нового спрямування методи НСВ і НГВ, що відрізняються від відомих результатів теоретичними основами, які базуються на перенесенні до простору параметрів, а також алгоритмічним і програмним забезпеченням, що гарантують отримання точного рішення, чого немає у відомих дослідженнях.

Вірогідність і обгрунтованість отриманих результатів підтверджується рішенням тестових прикладів, а також розрахунками, проведеними в результаті досліджень.

Практична цінність виконаних досліджень полягає у підвищенні точності моделювання, зниженні витрат на проектування за рахунок економії часу і отримання більш досконалих моделей, економії матеріальних і фінансових ресурсів у процесі експлуатації спроектованих систем. Розроблена інструкція, що містить рекомендації з практичного використання методів, що пропонуються, і їхнього програмного забезпечення.

Особистий вклад здобувача.

Матеріали досліджень і отримані в роботі результати відображені у 20 публікаціях (без співавторства).

Апробація результатів дисертації.

Основні положення дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на Міжнародних науково-практичних конференціях (м. Харків, 1993р.; м. Мелітополь, 1995, 1996, 1997рр.; м. Львів, 1996р.; Харків, 1998р.), на щорічних науково-методичних конференціях ТДАТА (Мелітополь, 1994, ... , 1998рр.), на науковому семінарі кафедри нарисної геометрії ДонДТУ під керівництвом професора Скидана І. А. (Донецьк, 1998р.), на науковому семінарі кафедри прикладної математики і математичного моделювання ХДТУ під керівництвом професора Хомченка А. Н. (м. Херсон, 1997р.), на науковому семінарі кафедри нарисної геометрії Національного технічного університету України "КПІ" під керівництвом акад. Павлова А. В. (м. Київ, 1998р.), на науковому семінарі кафедри нарисної геометрії, інженерної і комп'ютерної графіки КДТУБА під керівництвом акад. Михайленка В. Є. (м. Київ, 1998р.).

Публікації.

За результатами наукових досліджень опубліковано 20 друкованих робіт у міжвузівських і вузівських збірках наукових робіт, дозволених ВАК України.

Структура і обсяг дисертаційної роботи.

Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків, списку літератури з 260 найменувань і додатків. Робота містить 330 сторінок машинописного тексту, 55 малюнків, 25 таблиць.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі розкривається зміст і стан рішення наукової проблеми, її значущість для науки і практики, сформовані мета і задачі дослідження, його наукова новизна, рівень апробації і публікації результатів досліджень.

У розділі 1 розглядається аналіз статистичних методів моделювання дискретних точкових множин, що служать вхідними даними для геометричного моделювання екстремальних задач.

При цьому потрібно вирішувати фундаментальну систему, число рівнянь в якій значно перевищує число параметрів, що визначаються. Отже, для отримання залежності, що задовольнить деякою мірою всім рівнянням системи потрібен "компроміс", критерій, що виділить з множини рішень те, до якого прагнуть. Методи отримання таких рішень названі **статистичними**.

Дослідження реальних процесів завжди пов'язано з вимірами значень визначальних їхніх параметрів. Результати вимірів завжди обтяжені помилками. У цих випадках застосування інтерполяційних моделей недоцільно. Є декілька можливостей геометричного моделювання результатів спостережень:

- попереднє згладжування вхідних даних;
- апроксимація вхідних даних за одним з відомих або спеціальних критеріїв;
- стохастична апроксимація з урахуванням імовірнісних характеристик процесу;
- інші методи, що враховують специфіку того або іншого процесу.

Дослідження у роботі стосуються в основному першого і другого напрямків, тобто підготовки вхідних даних і наступної апроксимації заданої точкової множини. У якості критеріїв наближення розглядаються функції, що не диференціюються, зокрема, мінімум суми модулів відхилень або мінімум максимального (за модулем) відхилення на множині моделюючих кривих.

Геометрична модель - це сукупність геометричних елементів, зв'язків між ними і побудов, а також еквівалентних їм аналітичних залежностей, що відображають ту особливість предмету, явища або процесу, яка цікавить дослідника.

Розглянемо фундаментальну систему рівнянь

$$\Delta_i = x_{m,i} - \varphi[x_{j,i}, a_0, a_j], \; i = \overline{1;n}, \; j = \overline{1;m-1}, \; m < n, \tag{1}$$

де Δ_i - відхилення фактичних координат $x_{m,i}$ i-ої точки від розрахункових, які визначаються за допомогою апроксимуючої функції $x_m = \varphi[x_j, a_0, a_j]$, що залежить від $(m-1)$ незалежних змінних x_j і m параметрів $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$.

Рішення фундаментальної системи неможливе в алгебраїчному розумінні і можливе тільки в статистичному розумінні, коли для невідомих Δ_i вводиться деякий критерій і розглядаються його екстремальні властивості, звідки і визначаються ці значення параметрів.

Найбільш розповсюдженими критеріями статистичного рішення системи (1) є:

- мінімум суми квадратів відхилень Δ_i,що реалізується в методі найменших квадратів (МНК);
- мінімум суми модулів відхилень - метод найменших модулів (МНМ) або метод найменших сумарних відхилень (НСВ);
- мінімум граничного (за модулем) відхилення - метод найменшого граничного відхилення (НГВ).

Можна говорити про два аспекти застосування статистичних методів:

- застосування їх в теоретико-імовірнісних задачах, коли відомий або мається на увазі закон розподілу помилок спостережень (вимірів) і метод включається, як відповідний цьому закону метод обробки даних;
- застосування методів у розв’язанні задач, в основі яких лежить відповідний до методу критерій мінімізації, який відбиває змістовну сторону задачі, що моделюється.

В першому випадку даються точнісні характеристики оцінок параметрів, довірчі інтервали, імовірність отримання результатів і ін.

В другому випадку таких характеристик немає, оскільки немає статистичного матеріалу для їхнього отримання. Результат моделювання оцінюється по тому, чи виконана і в якій мірі вимога критерію. Причому, за наявністю одних і тих же даних можна в залежності від заданого критерію оптимізації отримати різноманітні розв'язання задачі.

Найчастіше сам процес висуває вимоги, що повинні бути відбиті в критерії оптимізації. Зараз таких вимог висувається все більше при розв'язанні задач, в особливості економіко - математичного моделювання (розробка нової нормативної бази в умовах формування нових економічних відношень, нові підходи в розподілі матеріалів і ресурсів і т. ін.).

Існує тісний зв'язок між функціями розподілу помилок спостережень і обчислювальними методами. Якщо метод обробки результатів спостережень відповідає закону розподілу помилок вимірів, то забезпечується необхідна точність моделювання і збіжність обчислювального процесу. Якщо такої відповідності немає, то досягнути належної точності важко і ефективність оцінок падає.

Вкажемо найбільш розповсюджені відповідності:

- нормальному закону розподілу помилок спостережень відповідає метод найменших квадратів;
- експоненціальному закону розподілу Лапласа відповідає метод найменших модулів (МНМ) або найменших сумарних відхилень (НСВ);
- рівномірному закону розподілу відповідає метод найменших (за модулем), граничних відхилень (НГВ).

У першому випадку ефективною оцінкою $\bar{x}$ упорядкованої числової послідовності $\{x_i\}, i=\overline{1;n}$, є середнє арифметичне $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; в другому випадку - медіанне значення $x_{med}\in[x_{n/2}, x_{(n+1)/2}]$ для n парного і $x_{med}=x_{(n+1)/2}$ для n непарного; в третьому випадку $\bar{x}=\frac{1}{2}(x_{min}+x_{max})$, тобто напівсума екстремальних значень.

Метод найменших квадратів (МНК) є методом моделювання екстремальних задач з цільовою функцією ,що диференціюється.

Перевагами МНК є достатня глибина розробки теорії, простота алгоритмів, застосування в багатьох випадках моделювання, як наслідок переваг нормального закону розподілу помилок.

Разом з тим, МНК властиві і недоліки:
- при збільшенні числа параметрів різко збільшується кількість обчислень і падає їхня точність;
- в усіх передумовах МНК приймається, що сукупність помилок Δ_i є сукупність з нульовим середнім і одиничною дисперсією. Насправді це не завжди так.

У випадку, якщо немає упевненості в тому, що закон є нормальним, доцільно перейти до більш обережних припущень і застосувати інші методи математичної обробки результатів спостережень.

Метод найменших модулів (МНМ) можна розглядати як метод, певною мірою альтернативний методові найменших квадратів (МНК).

Відомі два методи мінімізації суми модулів відхилень:

- мінімізація на основі рішення задачі лінійного або кусково-лінійного програмування (ЗЛП);
- рішення задачі методом найменших модулів.

До досліджень у дисертації примикає один з методів ЗЛП, що полягає у приведенні багатовимірної задачі до плоскої, розв’язок якої в багатовимірному просторі дає плоску ламану лінію, мінімум якої є одним з окремих рішень. Остаточний розв’язок одержується шляхом зіставлення цілеспрямовано зформованих одновимірних рішень. Звичайно це досягається за n кроків.

Застосування задачі лінійного програмування для мінімізації суми модулів відхилень дозволяє призначати в процесі рішення додаткові обмеження, що є ще однією його перевагою.

Разом з тим, методи ЗЛП мають істотні недоліки:

- необхідність зберігати в процесі обчислень не тільки коефіцієнти функції Φ, але і громіздкі симплекс-таблиці, що висуває підвищені вимоги до обсягу оперативної пам'яті ЕОМ;
- складність упровадження програмного продукту в існуючі системи обробки емпіричних даних.

Більш простим і ефективним є метод найменших модулів, що реалізується в алгоритмах варіаційно-зважених квадратичних наближень.

Мінімізується згідно з алгоритмами зваженого МНК значення функції

$$\Phi_1(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i \left| \Delta_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij} z_j \right|^2}{\left| \Delta_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij} z_j \right|}, \tag{2}$$

де ρ_i - вагові коефіцієнти, b_{ij} - числові коефіцієнти,

При достатній кількості ітерацій значення в дужках чисельника і знаменника стануть достатньо близькими. Це буде відповідати рішенню МНМ-задачі з заданою точністю.

Перевагою такого підходу є єдність алгоритмів і програм зваженого МНК і МНМ, а також можливість наближень з дробовими показниками ступеня і цілими показниками, відмінними від 2.

До недоліків методу слід віднести те, що у порівнянні з МНК кількість обчислень росте. Крім того, в околі рішення відхилення для деяких значень дорівнює нулю, що тягне за собою втрату точності.

В роботах Загайтова І. Б. засіб моделювання з урахуванням означеного критерію названий методом мінімальних відхилень. Автор приводить багато економічних і виробничих ситуацій, розв'язання яких доцільно методом, що пропонується, переконливо показує необхідність моделювання згідно з розглянутим критерієм економіко-статистичних проблем агропромислового комплексу (АПК), зокрема, нормування праці, розподілу ресурсів і та ін. Однак запропонований автором обчислювальний алгоритм не відповідає критерію і не веде до цього рішення.

Ближче всього до досліджень у дисертації примикають роботи Епішина Ю. Г. Рішення відшукується в просторі параметрів, доводиться, що графік поверхні відгуку цільової функції є опукла вниз багатогранна поверхня і рішення досягається в одній з її вершин. Крива роз'вязку завжди інцидентна деяким точкам множини, число яких дорівнює числу параметрів моделюючої функції. Автор намагається відшукати рішення методом перебору, що практично можливо тільки для невеликого числа точок ВД.

Головний недолік досліджень Епішина Ю. Г. полягає в невдалому виборі простору параметрів, відсутності конструктивного зв'язку між параметрами і координатами точок ДТМ, внаслідок чого виявилося неможливим побудувати ефективний обчислювальний алгоритм.

Метод найменших граничних відхилень був запропонований А. К. Успенським, хоч самий принцип, покладений в основу метода (мінімум максимального за модулем відхилення Δ_i фактичних значень від розрахункових), був запропонований ще Лапласом

$$\max_i \left|\Delta_i = x_{ik} - \varphi(x_{ij}, a_0, a_j)\right| = \min, \; i = \overline{1;n}, \; j = \overline{1;k-1}, \; k << n. \qquad (3)$$

Основним в дослідженнях А. К. Успенського є сформульована і доведена ним властивість, згідно з якою число всіх найбільших і рівних між собою по абсолютній величині відхилень, що називаються граничними, на одиницю перевищує число параметрів моделюючої функції.

Автором зроблені дві спроби сформувати розрахунковий алгоритм, однак, належного теоретичного обгрунтування і практичної реалізації вони не отримали.

Найбільш близькі по тематиці іноземні джерела, на жаль, не мають нових результатів в напрямку, що розглядається в дисертації, і присвячені в основному окремим випадкам або обчислювально-конструктивним прийомам без достатнього їх теоретичного обгрунтування.

Існують менш розповсюджені статистичні методи математичної обробки результатів спостережень (метод Котеса, метод третин Эдінгтона, метод середніх, метод Коші і ін.). Їхня перевага – в простоті рішення. Однак, означені методи позбавлені екстремальних властивостей. Загальним для них є припущення про рівність нулю алгебраїчної суми відхилень у деяких комбінаціях рівнянь (1).

Аналіз можливостей відомих статистичних методів у рішенні проблеми геометричного моделювання екстремальних задач з функціями, що не диференціюються, на дискретних точкових множинах дозволяє зробити наступні висновки:

– жоден з розглянутих методів не дає повного рішення названої проблеми;
– не розроблені теоретичні основи хоча б одного з напрямків її рішення;
– для відомих критеріїв моделювання, що є екстремальними цільовими функціями, не встановлено конструктивний зв'язок між координатами точок вхідної множини і параметрами моделюючої функції у вхідному просторі. Для цього необхідно перенесення до простору параметрів моделюючої функції, сформоване таким чином, щоб дотримувались дві умови:
  – встановлювався зв'язок між координатами ДТМ і цими параметрами;
  – зберігалися визначальні властивості цільової функції (лінійність, метричні співвідношення і т. ін.).

Все це визначає необхідність розробки нового спрямування прикладної геометрії, що полягає в геометричному моделюванні дискретних точкових множин з урахуванням вимог екстремальних задач з цільовими функціями, що не диференціюються. Ці задачі є обов'язковою складовою частиною численних і різноманітних моделей апроксимації, оптимизації і статистики.

Сформулюємо основні риси нового спрямування:

1. Воно повинно охоплювати достатньо широке коло екстремальних задач і давати простір для розробки ефективних методів їхнього розв'язання.
2. Спрямування повинно давати теоретичні основи для розробки нових методів.
3. Методи, що розробляються в рамках спрямування, повинні мати алгоритмічне і програмне забезпечення, обчислювальні модулі яких можуть легко об'єднуватися в єдиний прикладний програмний продукт (єдину розрахункову оболонку).
4. Методологічні принципи нового спрямування:

4.1. Основу спрямування складають геометричні елементи і співвідношення між ними, відповідні заданому класу екстремальних задач.

4.2. Предметною областю спрямування є клас моделюючих функцій, як правило, лінійних відносно своїх коефіцієнтів-параметрів або таких, що перетворюються (логарифмуванням, заміною змінних і т. ін.) до такого вигляду.

4.3. Зміст спрямування складає сукупність методів, що формуються в залежності від виду екстремальних задач і співвідношень між геометричними елементами.

4.4. Взаємозв'язки між методами визначаються спільністю їхніх геометричних елементів і взаємозв'язками між відповідними цим методам екстремальними задачами.

4.5. Основою методу є ланцюг геометричних співвідношень, що призводять до розв'язку відповідної екстремальної задачі.

4.6. Застосування методу повинно гарантувати досягнення точного рішення.
4.7. Обчислювальна реалізація методу повинна бути орієнтованою на сучасні ПЕОМ і забезпечувати задану точність.
5. Особливості нового спрямування у порівнянні з відомими напрямками:
5.1. Змістовна особливість спрямування полягає в тому, що рішення відшукується в просторі параметрів моделюючої функції, сформованному з урахуванням властивостей цільової функції.
5.2. Алгоритмічна особливість нового спрямування полягає в пошуках екстремальних елементів опуклих багатогранних поверхонь в багатовимірному просторі параметрів.
5.3. Обчислювальна особливість нового спрямування полягає в послідовному нарощуванні (до досягнення заданої точності) числа параметрів з визначенням значення критерію на кожному з кроків розрахунку.
5.4. Практична особливість спрямування полягає у можливості побудови оптимальних геометричних моделей екстремальних задач з функціями, що не диференціюються, для дискретних точкових множин.

Всі ці положення розвиваються в подальших розділах дисертації.

У розділі 2 розглядається перенесення до простору параметрів моделюючих функцій, яке враховує екстремальні властивості критеріїв наближення.

Рішення задач апроксимації деякої точкової множини $\{x_i, y_i\}$ площини (x_i, y_i) припускає побудову деякої лінії $y = f(x, a_j)$, (a_j- параметри), такої, що відхилення

$$\Delta_i = y_i - f(x_i, a_0, a_j), \quad i = \overline{1;n}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

задовольняють одному з розглянутих у розділі 1 критеріїв наближення. Визначення значень параметрів a_j можливо при перенесенні до простору параметрів, де цій апроксимуючій лінії відповідала б точка, а заданим точкам $\{x_i, y_i\}$ - багатовимірні поверхні (гіперплощини). Задача вибору кривої на площині (x, y) замінюється на задачу вибору положення відповідної точки відносно фіксованих гіперповерхонь. На цьому шляху виникають дві взаємопов'язані, достатньо непрості проблеми:

- пошук перенесення, де б відповідні образи були лінійними;
- можливість поступового нарощування кількості параметрів функції.

При розробці конкретної конструктивної схеми перенесення треба зважувати на вигляд цільової функції, її екстремальні і метричні властивості.

Аналіз різноманітних варіантів аналітичного завдання прямої лінії з метою формування відповідного їй простору параметрів, а також структури вхідних даних більшості задач апроксимації, де $y_i \neq \infty$, переконав в доцільності такої її параметризації

$$y = a_0 + a_1 x \tag{5}$$

Довільній точці M (x_m, y_m) множини $\{x_i, y_i\}$ в просторі параметрів (a_0, a_1) відповідає пряма m

$$m: a_0 = y_m - a_1 x_m, \tag{6}$$

що відтинає на осі a_0 відрізок y_m, а на осі a_1 - відрізок $\dfrac{y_m}{x_m}$ (рис. 1).

Враховуючи рівняння відхилень Δ_i

$$\Delta_i = y_i - a_0 - a_1 x_i, i = \overline{1;n}, \tag{7}$$

а також екстремальні і метричні властивості функцій-критеріїв НСВ і НГВ, вісь Δ_i можна сумістити з віссю Oa_0 простору параметрів, а самі значення Δ_i вимірювати в напрямку осі Oa_0 від відповідних елементів в тих же одиницях, що і y_i, і a_0.

Така структура простору параметрів дозволяє забезпечити лінійність відображення і, що найголовніше, встановити конструктивний зв'язок параметрів моделюючої функції з координатами точок ВД і їхніми відхиленнями (див. (7)) з урахуванням критеріїв НСВ і НГВ.

Встановимо конструктивний зв'язок між площинами (x, y) і (a_0, a_1) за допомогою пари точок і прямих (див. рис. 1). Очевидно, що точці

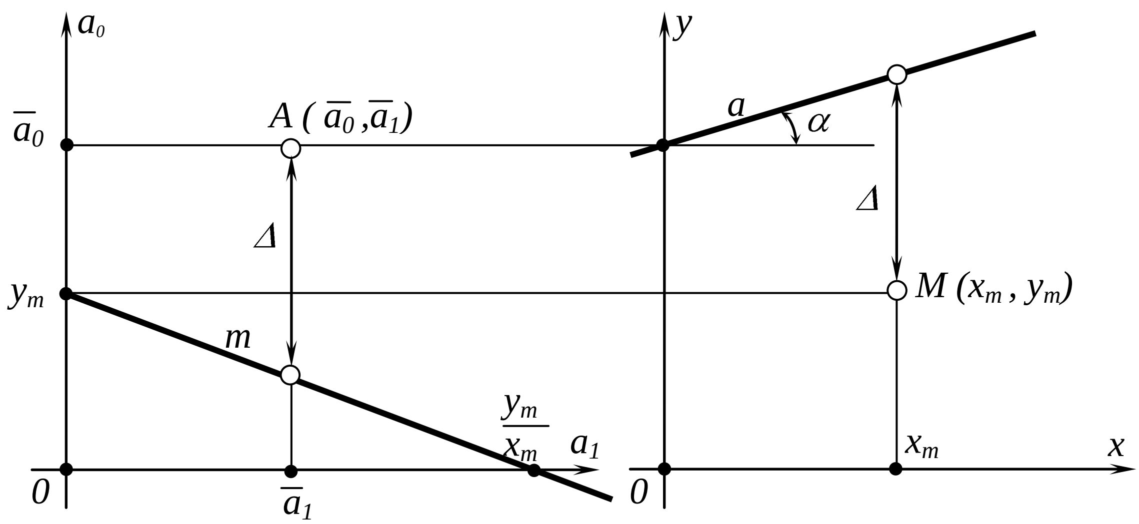


Рис. 1.

$M(x_m, y_m)$ відповідає пряма m, а точці A $(\bar{a}_0, \bar{a}_1)$ відповідає в площині (x, y) пряма a.

Властивість 1. Відхилення точки M від прямої a в площині (x, y) дорівнює відхиленню точки A (образ прямої a) від прямої m (образ точки M) в площині параметрів (a_0, a_1).

Тангенс кута нахилу прямої m до осі Oa_1 дорівнює $-x_m$. Тому безліч точок площини (x, y), розташованих на вертикальній прямій $x = x_m$, відображається в пучок паралельних прямих і навпаки.

Розглядаються аналогічні властивості перенесення інших прямих окремого положення.

Властивість 2. Довільному прямолінійному точковому ряду площини (x, y) відповідає пучок прямих площини (a_0, a_1).

Отже, чим ближче множина точок (x_i, y_i) до прямолінійного розташування, тим ближче відповідна множина прямих площини (a_0, a_1) до пучка прямих 1-го порядку. Розглядаються властивості пучків прямих більш високого порядку.

Властивість 3. Прямій лінії, що з'єднує дві довільні точки множини (x_i, y_i), відповідає в площині параметрів (a_0, a_1) точка перетину відповідних цим точкам прямих.

За малим принципом двоїстості можна сформулювати властивості зворотної відповідності.

Означені властивості визначають основні положення перенесення до простору параметрів, необхідні для обгрунтування лінійної плоскої апроксимації за критеріями НСВ і НГВ.

Принцип поетапного нарощування числа параметрів реалізується в результаті узагальнення перенесення до простору параметрів для випадків багатовимірної лінійної, а також двовимірної нелінійної багатопараметричної апроксимації.

В лінійному перенесенні до 3-вимірного простору параметрів кожній точці $M(x_m, y_m, z_m)$ заданої точкової множини (x_i, y_i, z_i), $i = \overline{1;n}$, відповідає площина

$$a_0 = z_m - a_1 x_m - a_2 y_m \tag{8}$$

навпаки: точці $A(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2)$ 3-простору параметрів в просторі (x, y, z) відповідає площина

$$z = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y, \tag{9}$$

Прямій лінії перетину двох площин простору (x, y, z) відповідає пряма лінія простору (a_0, a_1, a_2), що з'єднує відповідні означеним площинам точки.

Площина (8) відтинає на осі Oa_0 відрізок z_m, на осі Oa_1 - відрізок z_m / x_m, а на осі Oa_2 - відрізок z_m / y_m. Встановлюється взаємозв'язок між перенесеннями до двовимірного і тривимірного простору параметрів, що дозволяє поетапно нарощувати число параметрів. Цей взаємозв'язок носить глобальний характер і пронизує всю структуру 3-вимірного простору.

Разом з тим, в 3-вимірному перенесенні є свої специфічні властивості.

Властивість 4. Довільній площині α простору (x,y,z), як двовимірній точковій множині, в просторі параметрів (a_0,a_1,a_2) відповідає в'язка площин з центром в точці, що є образом площини α в даному перенесенні.

Розглядаються площини окремого положення, відповідні їм образи в просторі параметрів і їхні властивості.

Для розробки методів моделювання за критеріями НСВ і НГВ важливим є метрична властивість 3-вимірного перенесення.

Властивість 5. Відхилення точки $M(x_m,y_m,z_m)$ від деякої площини β в просторі (x,y,z) дорівнює відхиленню точки B (образ площини β) від площини μ (образ точки M) в просторі параметрів (a_0,a_1,a_2).

По аналогії можна розглянути перенесення у простір більш високого числа вимірів. При цьому у кожному наступному по вимірності перенесенні зберігаються позиційні властивості всіх попередніх перенесень (меншого числа вимірів).

Розглянуте перенесення до 3-вимірного простору параметрів служить основою для нелінійної апроксимації точкової множини (x_i,y_i) площини 2-параболою

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2. \tag{10}$$

Параболі, інцидентній т. $M(x_m,y_m)$, в просторі параметрів (a_0,a_1,a_2) відповідає площина

$$\mu: a_0=y_m-a_1x_m-a_2x_m^2, \tag{11}$$

що відтинає на осі Oa_0 відрізок y_m , на осі Oa_1 - відрізок y_m/x_m, на осі Oa_2 - відрізок y_m/x_m^2. На відміну від розглянутого раніше (див.(8)) площина (11) визначається двома координатами і її сліди не є незалежними.

Будь-яка точка площини (11) виділяє конкретну 2-параболу з їх ∞^2, що проходять через задану точку (x_m,y_m). Перетин двох площин (11) дає пряму лінію в просторі параметрів, якій в площині (x,y) відповідає ∞^1 парабол, що проходять через дві задані точки. Три площини простору параметрів перетинаються в точці $(\bar{a}_0,\bar{a}_1,\bar{a}_2)$, яка визначає параметри конкретної параболи.

Шляхом нескладних узагальнень можна отримати аналогічні співвідношення для перенесення до k-простору параметрів для $(k-1)$ - параболи.

Властивість 6. Відхилення точки $M(x_m,y_m)$ від деякої параболи $\alpha: y=a_0+a_1x+...+a_kx^k$ площини (x,y) дорівнює відхиленню точки A (образ параболи α) від площини μ (образ точки M) в просторі параметрів $(a_0,a_1,...,a_k)$.

Властивість 6 справедлива при будь-якому числі параметрів. Це служить основою для реалізації принципу послідовного нарощування параметрів при нелінійній апроксимації.

Розділ 3 присвячений геометричному моделюванню дискретних точкових множин за критерієм НСВ.

Метод, відповідний означеному критерію, в роботі названий методом найменших сумарних відхилень (НСВ) у відповідності з його геометричним змістом.

З урахуванням геометричної сторони розташування точок вхідних даних вони названі дискретною точковою множиною (ДТМ), а не дискретно представленою кривою (ДПК).

В роботі виконуються дослідження і застосування методу НСВ, як обчислювального засобу апроксимації, поза його теоретико-імовірнісними характеристиками і особливостями.

Нехай на осі Ox задана упорядкована множина точок $\{x_i\}, i=\overline{1;n}$. Треба визначити таке значення $\bar{x}$, щоб сума модулів відхилень точок $\{x_i\}$ від нього, була мінімальною, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\bar{x}\right|=min,\; i=\overline{1;n}. \tag{12}$$

Основою розв'язку є відоме твердження.

Твердження 1. Сума модулів відхилень заданої упорядкованої множини точок $\{x_i\}, i=\overline{1;n}$, від деякого центру $\bar{x}$ буде мінімальною, якщо центр $\bar{x}$ займає медіанне положення. При n - парному $\bar{x}\in\left[x_{n/2}, x_{(n+1)/2}\right]$, при n - непарному $\bar{x}=x_{(n+1)/2}$.

Рішенням НСВ-задачі для одновимірної множини $\{x_i\}, i=\overline{1;n}$, незалежно від величини відстаней між точками x_i, є медіанний відрізок при n парному або медіанна точка при n непарному. Цей висновок є основоположним при багатовимірних узагальненнях НСВ-задачі.

Нехай задана множина точок $\{x_i, y_i\}, i=\overline{1;n}$, на площині. Треба побудувати пряму лінію

$$y=a_0+a_1x, \tag{13}$$

тобто визначити значення $a_0=\bar{a}_0$, $a_1=\bar{a}_1$, при яких сума модулів відхилень

$$\Delta_i=y_i-\bar{a}_0-\bar{a}_1x_i \tag{14}$$

була б мінімальною на множині прямих (13) площини, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-\bar{a}_0-\bar{a}_1x_i\right|=min. \tag{15}$$

Найбільш ефективним засобом рішення цієї задачі є перенесення до простору параметрів. Множині заданих точок $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1;n}$, в площині (x,y) в просторі параметрів відповідає довільний пучок **П** прямих, аналогічних (14).

Сумістимо вісь Δ_i з віссю Oa_0 згідно з (14). Тоді в кожному перерізі $a_1 = \overline{a}_1$ повинно дотримуватися твердження 1. Це забезпечується дотриманням метричних (властивість 1) і екстремальних (твердження 1) властивостей функції-критерію.

Для того, щоб сума модулів відхилень (15) точок була мінімальною, необхідно, щоб т. $A(\overline{a}_0, \overline{a}_1)$ займала медіанне положення в перерізі $a_1 = \overline{a}_1$ пучка **П.** Множина медіанних елементів пучка **П** утворює **медіанну смугу** (рис. 2) при n парному або **медіанну ламану лінію** при n непарному (рис. 3).

Доводиться твердження.

Твердження 2. Значення суми модулів відхилень для множини точок між вузлами медіанної смуги змінюється лінійно і не залежить від конфігурації смуги (рис. 4).

Звідси випливає, що графіком **Г** залежності $\sum|\Delta_i|$ від a_1 є ламана лінія.

Аналітично доводиться:

Твердження 3. Кутовий коефіцієнт K s-ї ланки ламаної лінії графіка **Г** дорівнює

$$K_s = \sum_s x_- - \sum_s x_+ , \tag{16}$$

де $\sum_s x_-, \sum_s x_+$ - сума абсцис точок, для яких відповідні прямі пучка **П** розташовані нижче (вище) медіанної смуги на s-й дільниці.

Твердження 2 і 3 служать основою для доказу наступної основоположної теореми методу НСВ.

Теорема 1. Графік **Г** залежності значень суми модулів відхилень $\sum|\Delta_i|$ від a_1 є опуклою вниз ламаною лінією, вузли якої мають однакові абсциси з вузлами медіанної смуги (ламаної лінії) пучка **П.** (див. рис. 2 і рис. 3)

В загальному випадку НСВ-задача має єдине рішення, тобто графік **Г** має глобальний мінімум (рис. 2 і 3). Але може так трапитися, що (див. (16)) $K = 0$ на деякій дільниці. Тоді графік має ланку рівня, а задача має не тільки одне рішення.

Надзвичайно важливим для розробки обчислювальних алгоритмів є:

Висновок 1.3. НСВ-пряма для двовимірної множини точок $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1;n}$ завжди інцидентна 2 точкам множини.

На рис. 5 зображені точкова множина $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1;8}$ в площині (x,y), відповідний їй пучок **П** прямих в площині параметрів (a_0, a_1), медіанна смуга цього пучка, графік **Г** залежності $\sum|\Delta_i|$ від a_1, вузол рішення (значення $\overline{a}_0$ і $\overline{a}_1$ цієї НСВ-прямої) і, нарешті НСВ-пряма в площині (x,y).

За наявності ланки рівня на графіку **Г** задача має ∞^2 рішень при парному числі точок або ∞^1 рішень при непарному числі точок.

Суть розв′язання НСВ-задачі на площині полягає у пошуці такого вузла медіанної смуги або ламаної лінії, де значення $\sum|\Delta_i|$ мінімальне. На цій основі складений і реалізований алгоритм розв′язку 2-вимірної НСВ-задачі.

Найпростіша задача тривимірної НСВ-апроксимації має вигляд.

Для заданої множини точок $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}, i=\overline{1;n}$; необхідно побудувати площину

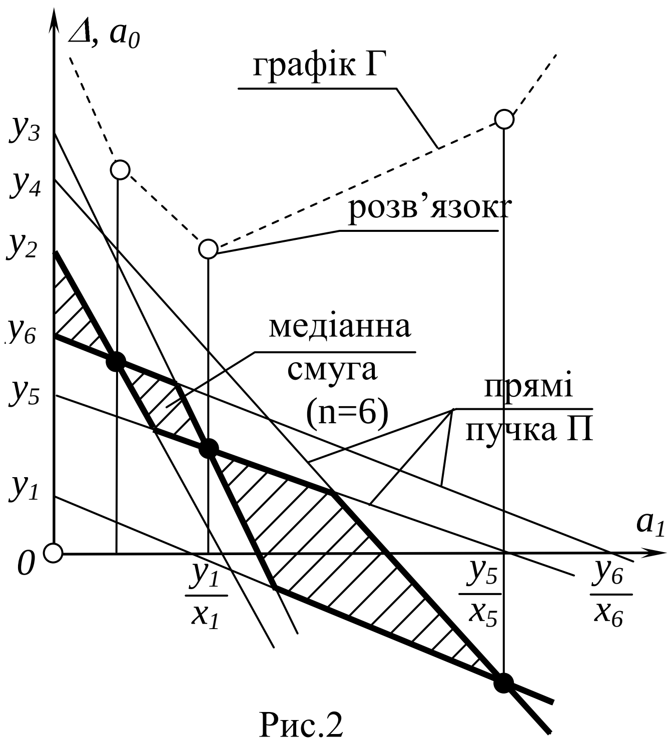


Рис.2

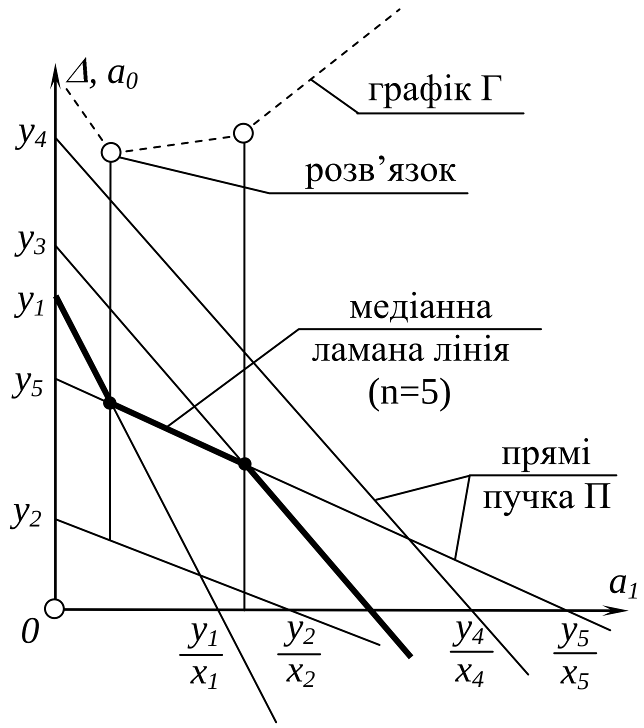


Рис.3

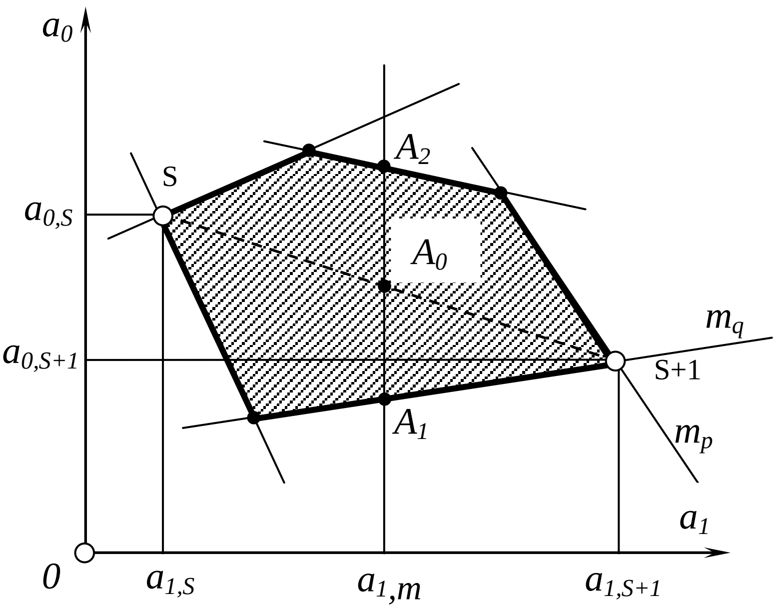
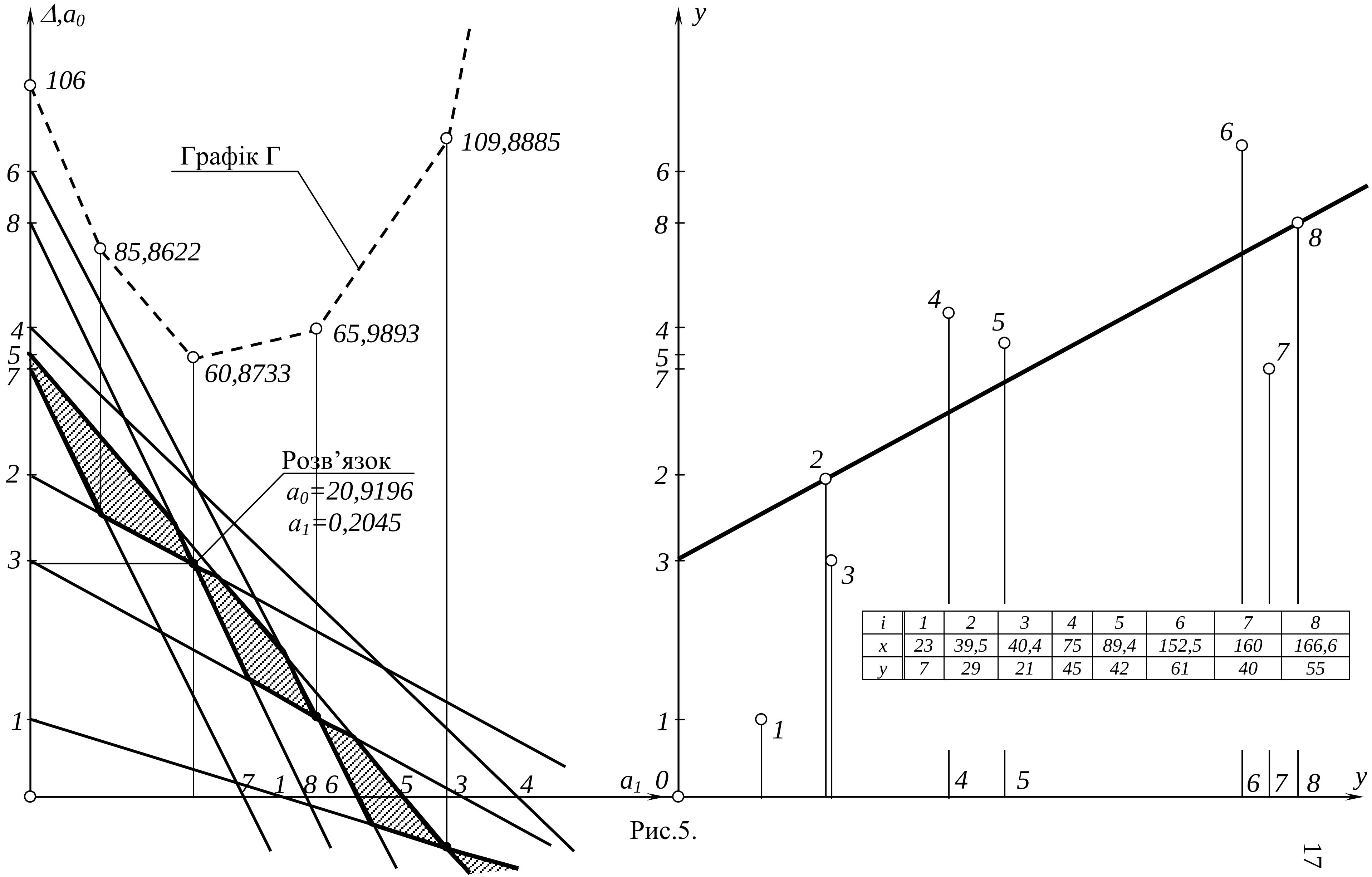


Рис.4



i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	23	39,5	40,4	75	89,4	152,5	160	166,6
y	7	29	21	45	42	61	40	55

Рис.5.

$$x_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad (17)$$

тобто визначити значення $a_0 = \bar{a}_0,\ a_1 = \bar{a}_1,\ a_2 = \bar{a}_2$ такі, щоб сума модулів відхилень Δ_i

$$\Delta_i = x_{3i} - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i} - a_0 \qquad (18)$$

була мінімальною, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = min. \qquad (19)$$

Основні теоретичні положення лінійної НСВ-апроксимації 3-простору базуються на перенесенні до 3-простору параметрів (a_0, a_1, a_2).

Множині точок $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}),\ i = \overline{1;n}$ простору (x_1, x_2, x_3) відповідає у просторі (a_0, a_1, a_2) деякий пучок **П** площин. Узагальнюючи властивості плоских медіанних елементів можна показати, що в 3-вимірному випадку точки розв'язку належать медіанному простору пучка **П** при n парному або медіанному многограннику при n непарному.

На підставі перенесення до простору параметрів можна довести наступні твердження, аналогічні раніше доведеним:

Твердження 4. Точка рішення в просторі (a_0, a_1, a_2) належить деякому вузлу, ребру або грані медіанного простору (медіанного многогранника).

Твердження 5. Площина рішення в просторі (x_1, x_2, x_3) інцидентна трьом точкам заданої множини $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}),\ i = \overline{1;n}$.

Твердження 6. Графік залежності $\sum|\Delta_i|$ від a_1 і a_2 являє собою опуклий вниз многогранник **Т**, вузли якого є точками, що конкурують з вузлами медіанного простору (многогранника) по відношенню до площини (a_0, a_1).

Спосіб розв′язання 3-вимірної НСВ-задачі полягає у послідовній НСВ-апроксимації. Спочатку визначається рішення $a_1 = a_1', a_0 = a_0'$ у площині $a_2 = 0$ для множини точок $(x_{1i}, x_{3i}),\ i = \overline{1;n}$. З отриманої точки (a_0', a_1') по ребрах многогранника **Т** здійснюється рух в просторі (a_0, a_1, a_2) до досягнення найнижчої його точки (множини точок) по відношенню до площини (a_1, a_2).

В отриманому тривимірному рішенні (a_0'', a_1'', a_2'') остаточні значення $a_0'' \neq a_0', a_1'' \neq a_1', a_2'' \neq 0$. Розглядається обчислювальний алгоритм рішення задачі.

Аналогічно можна провести подальші узагальнення, продовживши процес послідовної лінійної НСВ-апроксимації.

На основі узагальнень лінійної апроксимації розглядається параболічна НСВ-апроксимація на площині, коли для заданої множини точок $(x_i, y_i),\ i = \overline{1;n}$, необхідно визначити значення параметрів $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$, апроксимуючої НСВ-параболи (10)

Висновок 1.3′. НСВ-парабола на площині інцидентна деяким точкам заданої множини, число яких дорівнює числу параметрів параболи.

Множині точок $\{x_i, y_i\}, i=\overline{1;n}$, відповідає деякий пучок **П** площин у просторі параметрів, що має властивості, аналогічні пучку площин у випадку лінійної 3-просторової НСВ-апроксимації.

Алгоритм розв'язку принципово і програмно ніяк не відрізняється від алгоритму просторової лінійної НСВ-апроксимації, якщо в (17) … (19) виконати підстановку $x_3 = y, x_2 = x^2, x_1 = x$.

При корекції розв'язку або необхідності управління формою кривої, в особливості при розв'язанні економіко-математичних задач, значну роль грають вагові коефіцієнти $\rho_i > 0$, (деякі, може бути і всі $\rho_i \neq 1$,) що вибираються з умов реальної задачі.

Розглядається НСВ-апроксимація дискретної точкової множини $\{x_{ij}\}, i=\overline{1;n}, j=\overline{1;k}$, де n- число точок, k- вимірність простору, деякою функцією $x_k = f(x_j, a_0, a_j), j=\overline{1;k-1}$, лінійною відносно своїх параметрів $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ з ваговими коефіцієнтами $\rho_i > 0, \rho_i \neq 1$. Тоді

$$\Delta_i = \rho_i (x_{ik} - f(x_{ij})), i=\overline{1;n}, j=\overline{1;k-1} \tag{20}$$

В одновимірному випадку для множини точок x_i на числовій осі необхідно знайти значення $a_0 = \bar{a}_0$, для якого

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i |x_i - \bar{a}_0| = min. \tag{21}$$

Досліджується модель залежності

$$\Delta_i = \rho_i x_i - \rho_i a_0, \ i=\overline{1;n}, \tag{22}$$

на площині (Δ, a_0).

Твердження 7. Рішенням НСВ-задачі для множини точок $x_i, i=\overline{1;n}$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_i \neq 1, \rho_i > 0$, є, незалежно від значень цих коефіцієнтів, при n парному одна з граничних точок медіанного відрізка $\left[x_{n/2} x_{\frac{n+1}{2}}\right]$, а при n непарному - медіанна точка $x_{\frac{n+1}{2}}$.

В двовимірному випадку

$$\Delta_i = \rho_i (x_{2i} - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_{1i}), i=\overline{1;n}. \tag{23}$$

В просторі параметрів (a_0, a_1, Δ) рішення, очевидно, слід шукати на перетині медіанного простору (многогранника) з площиною параметрів (a_0, a_1).

Твердження 8. Рішенням лінійної НСВ-задачі для множини точок $(x_{1i}, x_{2i}), i=\overline{1;n}$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_i \neq 1, \rho_i > 0$, є незалежно від значень цих коефіцієнтів один з вузлів медіанної смуги (n парне) або один з вузлів медіанної ламаної (n непарне) пучка слідів площин (23) в площині (a_0, a_1) простору параметрів.

Значення $|\Delta_i|$, як видно з (23), вимірюється в напрямку, перпендикулярному до площини (a_0, a_1).

На підставі цього твердження можна сформулювати і довести нові твердження, що теоретично обгрунтовують розрахункові алгоритми.

Твердження 9. НСВ-пряма для множини точок $(x_{1i}, x_{2i}), i=\overline{1;n}$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_i \neq 1, \rho_i > 0$, інцидентна 2 точкам множини.

Твердження 10. Для множини точок $(x_{1i}, x_{2i}), i=\overline{1;n}$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_i \neq 1, \rho_i > 0$, графік **Г** залежності $\sum|\Delta_i|$ від a_0 і a_1 в просторі параметрів (a_0, a_1, Δ) являє собою опуклий вниз многогранник, проекціями вершин якого на площину (a_0, a_1) є вузли медіанної смуги (ламаної лінії) множини слідів площин (23).

Пропонується алгоритм розв'язання даної задачі, що включає розрахунок $\sum|\Delta_i|$ у згаданих вузлах з урахуванням вагових коефіцієнтів і вибір серед них того вузла, де $\sum|\Delta_i|$ мінімальне.

Процес розрахунку ілюструється декількома тестовими прикладами.

Розглядаються багатовимірні узагальнення НСВ-апроксимації з ваговими коефіцієнтами і їхні алгоритмічні реалізації.

Випадок, який розглядається у роботі названо НСВ-методом з індивідуальними ваговими коефіцієнтами.

На відзнаку від нього в практиці зустрічається ситуація, коли для точок, що опинились в результаті апроксимації вище апроксимуючої кривої $(\Delta_i > 0)$ вводиться одне значення коефіцієнта $\rho_i = \rho_+$, а для точок, що опинились нижче кривої $(\Delta_i < 0)$ інше значення $\rho_i = \rho_-$.

Тут вагові коефіцієнти можуть бути призначені тільки після того, як отримане хоча б приблизне ділення точкової множини на дві означених підмножини ($\Delta_i > 0$ та $\Delta_i < 0$).

Спосіб розв'язання полягає у послідовному наближенні до розв'язку. Після того, як отримано оптимальний розв'язок без урахування вагових коефіцієнтів призначаються значення ρ_+ для точок $\Delta_i > 0$ і ρ_- для точок $\Delta_i < 0$ (значення ρ_+ і ρ_- заздалегідь відомі). Повторно вирішується задача, але вже із заданим для кожної групи точок своїм значенням вагових коефіцієнтів (ρ_+ або ρ_-). Якщо в результаті розв'язання виявилося, що кожна з точок не змінила свою орієнтацію відносно кривої, то отримане рішення є оптимальним з урахуванням заданих групових коефіцієнтів ρ_+ і ρ_-. Якщо деякі з точок змінили свою орієнтацію, то для них значення коефіцієнтів уточнюються і розв'язання повторюється до тих пір, доки орієнтація кожної з точок в процесі розв'язання не залишиться попередньою.

Формулюється подвійна задача методу НСВ на площині. Необхідно знайти таку точку ($\bar{x},\bar{y}$) площини, сума модулів відхилень якої від заданих прямих

$$y = a_{0i} + a_{1i}x,\ i = \overline{1;n}, \tag{24}$$

була би мінімальною, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i| = \sum_{i=1}^{n}|\bar{y} - a_{0i} - a_{1i}\bar{x}| = min. \tag{25}$$

Скориставшись розробленими раніше теоретичними положеннями, приходимо до наступного.

Твердження 11. Множина точок розв'язку подвійної НСВ-задачі на площині для множини прямих (24) належить медіанній смузі множини (24) при n парному або медіанній ламаній лінії при n непарному.

Твердження 12. Графік **Г** залежності $\sum|\Delta_i|$ від x для безлічі прямих (24) являє собою опуклу вниз ламану лінію, вузли якої мають однакові абсциси з вузлами медіанної смуги (рис. 6) (ламаної лінії (рис. 7)).

Твердження 13. Рішення подвійної НСВ-задачі для множини прямих (24) площини відповідає одному з вузлів медіанної смуги (ламаної лінії).

Лінійна подвійна НСВ-задача на площині може у залежності від вхідних даних мати єдине рішення або нескінченну безліч.

Алгоритм розв'язання ілюструється на конкретному прикладі.

Запропонований алгоритм можна узагальнити для простору k вимірів ($k < n$), спосіб роз'язання полягає у послідовній НСВ-апроксимації.

По суті викладене вище є рішенням за критерієм НСВ перерахованих систем лінійних рівнянь, коли число n рівнянь значно переважає число невідомих k ($k << n$).

Пропонуються алгоритми і тестові приклади розв'язку НСВ-задачі за наявності наперед заданих вимог і обмежень. (інцидентність заданій точці, забезпечення заданої точності і т. ін.)

Пропонується дискретний метод НСВ, що грунтується на дискретному поданні неперервних функцій і викликаний необхідністю запобігання осцилляції апроксимуючої кривої і її можливої корекції в процесі рішення.

Моделююча функція задається в дискретному вигляді різницевими рівняннями, параметрами в яких є ординати базисних точок кривої або розділені різниці, що визначаються в процесі розв'язання в просторі параметрів.

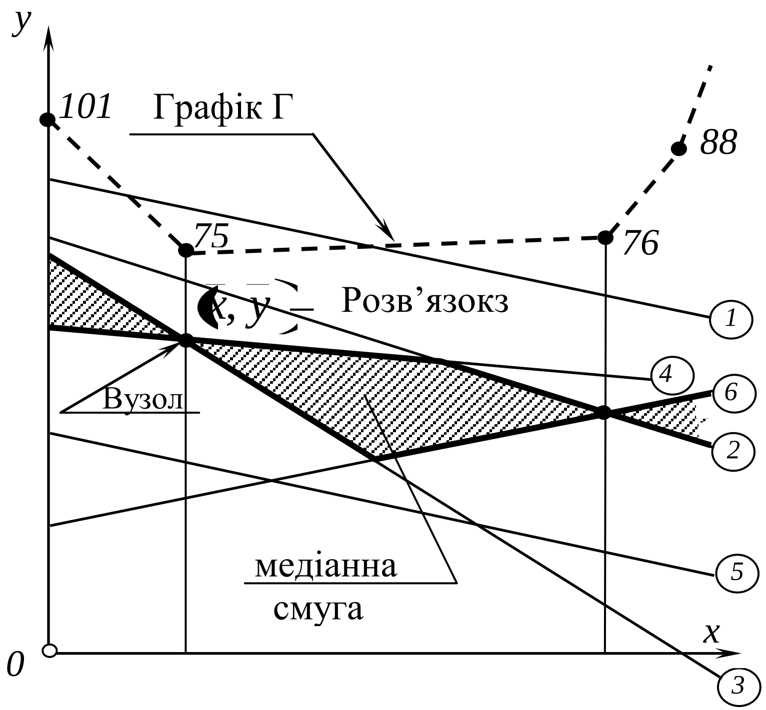

y
101
Графік Г
88
75
76
Розв'язокз
1
4
6
Вузол
2
5
медіанна
смуга
x
0
3

Рис. 6

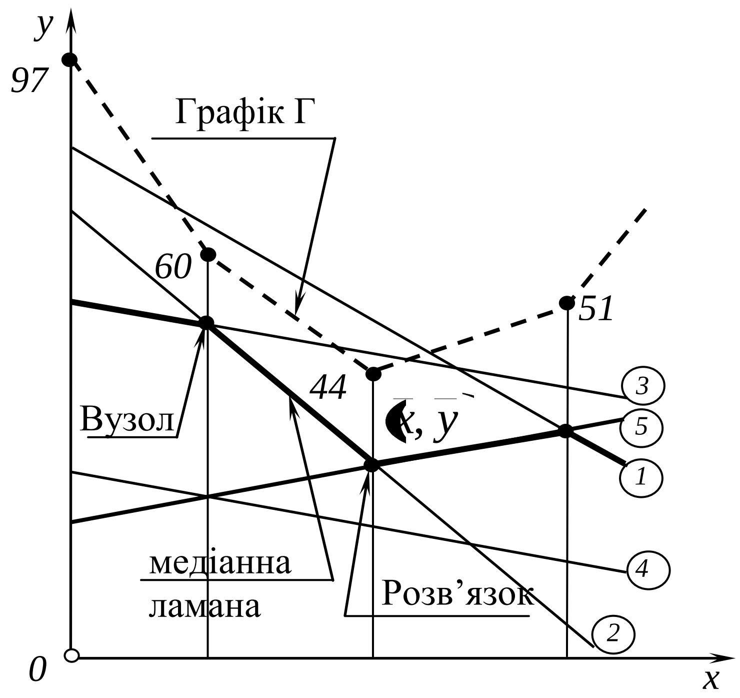

y
97
Графік Г
60
51
44
3
Вузол
5
1
4
медіанна
ламана
Розв'язок
2
0
x

Рис. 7

Розділ 4 присвячений геометричному моделюванню дискретних точкових множин за критерієм НГВ.

Геометрична сутність методу НГВ полягає у визначенні таких значень параметрів апроксимуючої кривої , що максимальне за модулем відхилення її (розрахункових) точок, від заданих є мінімальним на множині апроксимуючих кривих заданого виду.

Основою розв'язку одновимірної НГВ-задачі є твердження.

Твердження 14. Максимальне за модулем відхилення заданої упорядкованої множини точок $\{x_i\}, i = \overline{1;n}$, від деякого центру $\bar{x}$ буде мінімальним, якщо значення $\bar{x}$ дорівнює напівсумі екстремальних значень x_i

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_{min} + x_{max}). \tag{26}$$

При цьому максимальне відхилення Δ_{max} дорівнює по абсолютній величині мінімальному відхиленню Δ_{min}, тобто $\Delta_{max} = |\Delta_{min}|$.

Нехай задана множина точок $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1;n}$, на площині. Необхідно побудувати пряму лінію

$$y = a_0 + a_1 x, \tag{27}$$

тобто визначити її параметри $\bar{a}_0$ і $\bar{a}_1$, для якої максимальне за модулем відхилення $|\Delta|_{max}$ з множини

$$\Delta_i = y_i - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_i, \ i = \overline{1;n}, \tag{28}$$

є мінімальним, тобто

$$\max_i |y_i - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_i| = min. \tag{29}$$

Як і в методі НСВ, найбільш ефективним засобом рішення поставленої задачі є перенесення до простору параметрів апроксимуючої кривої, який сформовано з урахуванням метрики функції-критерію.

Множині точок $\{x_i, y_i\}$ площини (x, y) відповідає в площині параметрів (a_0, a_1) пучок прямих **П.**

Справедливо наступне твердження.

Твердження 15. Верхня межа пучка **П** простору параметрів (a_0, a_1), відповідного упорядкованій по x множині точок $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1;n}$, площини (x, y) є опуклою вниз, а нижня межа - опуклою вверх ламаною лінією (рис. 8).

В кожному перетині $a_1 = a_1'$ пучка **П** повинно дотримуватися твердження 14, якому відповідає серединна точка $\bar{a}_0$.

Множина точок $\bar{a}_0$ утворює **серединну ламану лінію** пучка **П**, кожний вузол якої має однакову абсцису a_1 з вузлом верхньої або нижньої межі. Розв'язок НГВ-задачі слід шукати в одному з вузлів однієї з меж, де ширина пучка вздовж осі Oa_0 мінімальна (горловина пучка).

Вузлу однієї з меж, де отримано НГВ-рішення, в площині (x, y) відповідає т.з. **опорна пряма**. В загальному випадку означеному вузлу протистоїть ланка ламаної лінії протилежної межі пучка. Цій ланці відповідає в площині (x, y) деяка точка множини, відхилення якої від опорної прямої максимальне. Шукана НГВ-пряма паралельна опорній прямій і ділить відрізок означеного максимального відхилення навпіл. В загальному випадку НГВ-пряма не проходить ані через одну точку множини.

Твердження 16. Кутовий коефіцієнт K s-ї ланки ламаної лінії графіка $\mathbf{Г'}$ залежності $|\Delta|_{max}$ від a_1 дорівнює

$$K_s = \frac{1}{2}(x_p - x_c), \tag{30}$$

де x_c і x_p - абсциси точок, ланки відповідних їм прямих є ланками верхньої і нижньої меж пучка відповідно. На рис. 8 зображено фрагмент меж пучка **П**, його серединна лінія, а також графік $\mathbf{Г'}$.

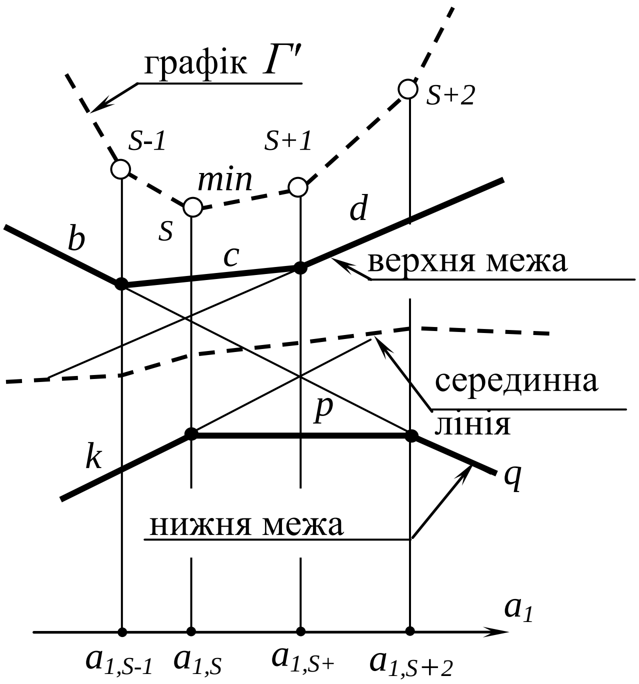


Рис.8

Теорема 2. Графік $\mathbf{Г'}$ залежності максимального за модулем відхилення $|\Delta|_{max}$ від a_1 є опуклою вниз ламаною лінією, вузли якої мають однакові абсциси з вузлами серединної лінії пучка **П.**

В загальному випадку НГВ-задача має єдиний розв’язок (див. рис. 8). Однак, можлива ситуація, коли деякі ланки меж пучка паралельні. Цій дільниці відповідає ланка рівня графіка $\mathbf{\Gamma'}$. На означеній дільниці є ∞^1 розв'язків.

Якщо у вхідних даних немає точок з співпадаючими абсцисами, то рішення НГВ-задачі на площині єдине.

Алгоритм розв'язання плоскої НГВ-задачі реалізується у процесі руху вздовж однієї з меж пучка, що супроводжується розрахунком $|\Delta|_{max}$ у кожному вузлі, і порівнянням його значення з попереднім до тих пір, доки це значення $|\Delta|_{max}$ падає, досягаючи мінімуму $|\Delta|_s$ у деякому вузлі s. Аналогічно здійснюється рух по нижній межі в околі отриманого раніше вузла s і визначається інше мінімальне значення $|\Delta|_p$ у деякому вузлі p нижньої межі. Шляхом порівняння $|\Delta|_s$ і $|\Delta|_p$ вибирається менше з них. Параметри вибраного вузла визначають шуканий розв'язок.

Розглядається узагальнення отриманих результатів для 3-вимірної лінійної НГВ-апроксимації. На основі перенесення до простору параметрів, досліджуються опуклі багатогранні поверхні меж пучка площин і цільової функції-критерію. Зіставляються різноманітні поєднання елементів меж, що протистоять один одному у "горловині" пучка і визначають розв'язок задачі (грань однієї межі і вершина іншої, два паралельні ребра меж, або такі, що схрещуються і т. ін.).

Спосіб розв'язання 3-вимірної НГВ-задачі полягає в наступному. Спочатку визначається двовимірний розв'язок $a_0 = a'_0,\ a_1 = a'_1$ в площині $a_2 = 0$ простору параметрів для точок $\{x_{1i}, x_{3i}\},\ i = \overline{1;n}$. При цьому на передостанньому кроці були знайдені вузли P і Q на верхній і нижній межах двовимірного пучка, де ширина горловини мінімальна, і шляхом порівняння був вибраний той з них, де знайдена ширина горловини менша.

Подальше розв'язання полягає в русі з т. P по ребрах опуклої вниз багатогранної поверхні верхньої межі до досягнення вершини (ребра, грані), де ширина пучка **П** площин мінімальна.

Після цього з точки Q здійснюється рух по ребрах опуклої вверх багатогранної поверхні нижньої межі до досягнення вершини (ребра, грані), де ширина тривимірного пучка **П** мінімальна (в напрямку осі Oa_0). Здійснюється порівняння за модулем отриманих значень $|\Delta|_p$ і $|\Delta|_q$ і вибирається менше з них. В отриманому тривимірному рішенні (a''_0, a''_1, a''_2) остаточні значення $a''_0 \neq a'_0, a''_1 \neq a'_1, a''_2 \neq 0$.

Вищевикладене дозволяє провести подальші узагальнення для багатовимірної лінійної НГВ-апроксимації.

Розглядається нелінійна НГВ-апроксимація на площині.

Для заданої множини точок $\{x_i, y_i\}, i=\overline{1;n}$, необхідно визначити значення параметрів $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ апроксимуючої кривої, що описується функцією

$$y=\bar{a}_0+\bar{a}_1\cdot\varphi_1(x)+\bar{a}_2\cdot\varphi_2(x),\tag{31}$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - лінійно незалежні базисні функції.

Основою розв'язання задачі є перенесення до простору параметрів (a_0,a_1,a_2), де функції (31) площини (x,y) відповідає точка ($\bar{a}_0,\bar{a}_1,\bar{a}_2$) простору параметрів ($a_0,a_1,a_2$); точці ($\bar{x},\bar{y}$) відповідає площина

$$a_0=\bar{y}-a_1\cdot\varphi_1(x)-a_2\cdot\varphi_2(x),\tag{32}$$

що відтинає на осі Oa_0 відрізок $\bar{y}$, на осі Oa_1 - відрізок $\bar{y}/\varphi_1(x)$, на осі Oa_2 - відрізок $\bar{y}/\varphi_2(x)$. Три площини, що перетинаються, визначають точку простору параметрів, якій відповідає цілком певна крива площини ($x,\ y$).

Алгоритм розв'язання повністю співпадає з алгоритмом просторової лінійної НГВ-апроксимації, якщо зробити відповідну підстановку.

Розглядається ітераційний процес на площині параметрів (a_0,a_1) для плоскої НГВ-задачі, що грунтується на послідовному збільшенні значення a_1 до тих пір, доки K_i не змінить знак, з наступним уточненням точки розв'язку. Завдяки такій послідовності дій процес сходиться і дозволяє визначити точний розв'язок.

Досліджується НГВ-апроксимація з ваговими коефіцієнтами.

Вводяться вагові коефіцієнти $\rho_i>0$ (деякі, може бути і всі $\rho_i\neq 1$), що вибираються з умов реальної задачі. Тоді

$$\Delta_i=\rho_i\left(x_{ik}-f\left(x_{ij},a_0,a_j\right)\right), i=\overline{1;n}, j=\overline{1;k-1}.\tag{33}$$

В одновимірному випадку для множини точок x_i на числовій осі знаходиться значення $a_0=\bar{a}_0$, для якого

$$\max_i\left|\rho_i\cdot\left(x_i-\bar{a}_0\right)\right|=min.\tag{34}$$

Будується модель залежності

$$\Delta_i=\rho_i x_i-\rho_i a_0, i=\overline{1;n},\tag{35}$$

на площині (Δ,a_0), де множині точок x_i відповідає пучок **П** прямих (35), що відтинають на осі $O\Delta$ відрізок $\rho_i x_i$, а на осі Oa_0 відрізок x_i (рис. 9). Точка розв'язку – це точка перетину *R* серединної лінії з віссю Oa_0. Для порівняння на рис. 9 побудована т. O середини відрізка $\left[x_{min},x_{max}\right]$.

Рішення одновимірної НГВ-задачі з ваговими коефіцієнтами завжди є і воно єдине.

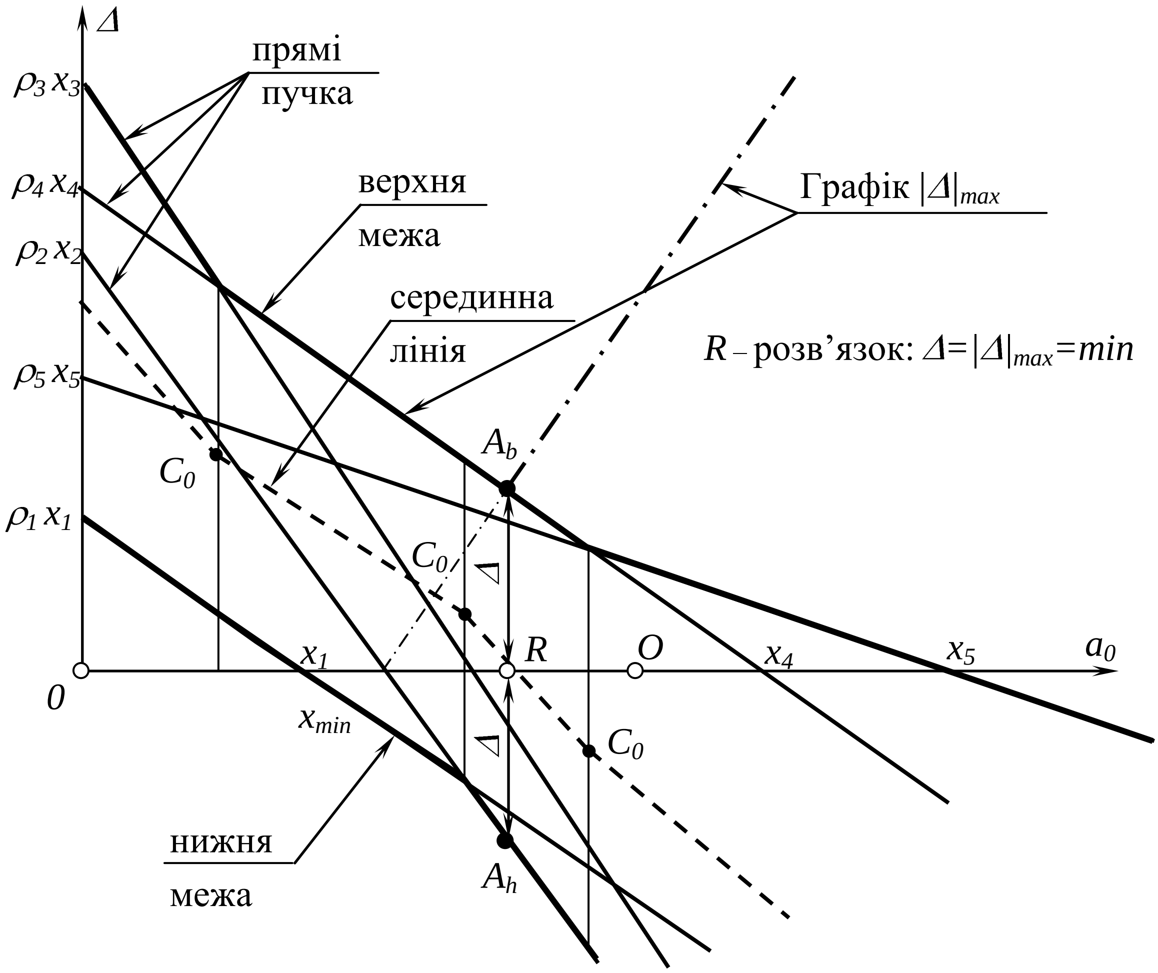


Рис. 9

Розглядається двовимірна задача для заданої множини точок $(x_{1i}, x_{2i}), i = \overline{1;n}$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_i \neq 1, \rho_i > 0$. Тут

$$\Delta_i = \rho_i (x_{2i} - \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x_{1i}), i = \overline{1;n}. \quad (36)$$

Будується модель залежності (36) в просторі параметрів (Δ, a_0, a_1), де множині точок (x_{1i}, x_{2i}) відповідає множина площин (пучок $\mathbf{\Pi}_3$), що відтинають на осі a_0 відрізок x_{2i}, на осі a_1 - відрізок x_{2i}/x_{1i}, а на осі Δ - відрізок $\rho_i x_{2i}$.

Рішення НГВ-задачі у двовимірному випадку буде належати лінії перетину серединної багатогранної поверхні з площиною (a_0, a_1), точніше, одному з вузлів цієї ламаної лінії, оскільки між вузлами величина $|\Delta|$ змінюється лінійно і може досягти мінімуму лише у одному з її вузлів.

Спосіб розв'язання задачі, яка розглядається, полягає у послідовному розв'язанні множини одновимірних задач у паралельних перерізах $a_1 = a_{1j}$ з деяким кроком Δa_1 починаючи з $a_1 = 0$, до тих пір, доки $|\Delta|_{max}$ не почне зростати. Після цього на дільниці передбачуваного мінімуму необхідно взяти крок менше, ніж Δa_1, і повторити обчислення, кожний раз зменшуючи крок до тих пір, доки попереднє і наступне значення $|\Delta|_{max}$ будуть розрізнятися на величину не більш заданого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$.

Особливою складністю відрізняється розв’язок НГВ-задачі з груповими ваговими коефіцієнтами, яка має велике значення в економіко-математичних дослідженнях. Теоретичні його основи базуються на положеннях НГВ-методу з індивідуальними ваговими коефіцієнтами, однак алгоритми досягнення цього розв’язку істотно відрізняються від розглянутих вище. Спочатку знаходиться розв’язок без врахування вагових коефіцієнтів і для точок $\Delta_i > 0$ призначаються ваги ρ_+, для точок $\Delta_i < 0$ - ваги ρ_-. Після цього у багатопараметричному випадку способом послідовного наближення відшукується рішення з урахуванням означених вагів. Перевіряється виконання умови: $\Delta_i > 0 \Rightarrow \rho_+, \Delta_i < 0 \Rightarrow \rho_-$. Якщо вона дотримується для всіх точок, то рішення досягнуте, якщо ні, то призначення вагів корегується, розрахунок повторюється і т. ін. Цей процес сходиться до точного розв’язку в силу лінійності перенесення до простору параметрів і опуклості багатогранної поверхні відгуку цільової функції-критерію НГВ.

У роботі доводяться твердження, що обгрунтовують теоретичні особливості викладеного алгоритму, як у випадку багатовимірної лінійної, так і у випадку багатопараметричної нелінійної апроксимації.

Розглядається подвійна задача методу НГВ на площині, коли необхідно знайти таку точку $(\bar{x}, \bar{y})$ площини, максимальне за модулем відхилення якої від певної прямої заданої множини

$$y = a_{0i} + a_{1i}x, i = \overline{1;n}, \tag{37}$$

є мінімальним на множині точок площини, тобто

$$|\Delta|_{max} = \max_i |\bar{y} - a_{0i} - a_{1i}\bar{x}| = min. \tag{38}$$

Доводиться, що множина точок розв’язку подвійної НГВ-задачі на площині для множини прямих (37) належить серединній лінії заданої множини (рис. 10).

Графік $\mathbf{\Gamma}'_2$ залежності $|\Delta|_{max}$ від x для множини прямих (37) являє собою опуклу вниз ламану лінію, вузли якої мають однакові абсциси з вузлами ламаних ліній, що обмежують множину (37) (рис. 10).

Кількість рішень і їхній характер цілковито залежить від структури множини (37) і відбивається у поведінці графіка $\mathbf{\Gamma}'_2$. Якщо ланки верхньої і нижньої меж паралельні, то ширина пучка прямих у цьому місці постійна, що відповідає ланці рівня на графіку $\mathbf{\Gamma}'_2$. Ця ланка визначає ∞^1 рішень. В інших випадках (рис. 10) розв’язок завжди існує і він єдиний.

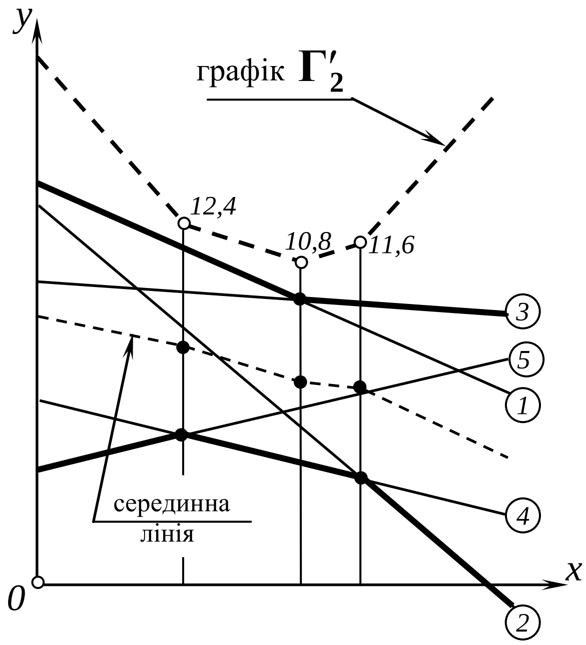


Рис.10

Запропонований алгоритм, що є по суті одним з статистичних методів розв'язання перевизначених систем лінійних рівнянь, можна узагальнити для простору k вимірів ($k<n$), де за умовою необхідно для заданих n гіперплощин визначити НГВ - точку. Пошук розв'язку здійснюється шляхом послідовної НГВ-апроксимації без перенесення до простору параметрів.

Досліджується метод НГВ на основі дискретного подання моделюючої функції через ординати базисних точок, що в даному випадку виступають у ролі параметрів і визначаються на основі перенесення до відповідного простору. Вибором базисних точок можна уникнути осциляції і забезпечити виконання інших вимог.

Розглянуті різновиди методу НГВ свідчать про те, що метод є реалізацією основних положень нового спрямування і забезпечує виконання вимог критерію НГВ при розв'язанні екстремальних задач.

В розділі 5 розглядається практичне застосування запропонованих методів, що визначається рівнем обчислювальної і програмної реалізації методів, відповідністю проблем, що вирішуються у виробництві і наукових дослідженнях, спроможністю методів задовольняти запити практики по швидкості обробки інформації і точності розв'язання задач.

Можна вказати 3 основні напрямки практичного використання і подальшого розвитку запропонованих методів:

- апроксимація дискретно представленої інформації, в т. ч. і з дотриманням заданої точності;
- розв'язання задач оптимізації, в основі яких закладені вимоги критеріїв спрямування, що пропонується;

- побудова моделей, що враховують статистичні характеристики й імовірнісний характер процесів, що протікають, для законів розподілу імовірностей, відмінних від нормального. В особливості це стосується економічної інформації, обробки результатів експерименту за методикою регресійного аналізу на основі критеріїв, що пропонуються.

В економіко-математичних моделях найбільш близькими до проведених досліджень є наступні напрямки:

- регресійний і кореляційний аналіз економіко - статистичної інформації з визначенням залежності кінцевого фактору від його визначальних факторів і встановленням ступеня зв'язку між факторами на основі значень коефіцієнтів кореляції і кореляційних відношень, а також побудови довірчих інтервалів значень коефіцієнтів і перевірки значущості коефіцієнта кореляції і рівняння регресії в цілому;

- побудова виробничих функцій, узагальнюючих статистичний матеріал і таких, що є основою для побудови оптимізаційних моделей для окремих галузей конкретного господарства або більш широких структурних об’єднань (регіони, галузь в цілому по країні або окремі її складові).

Розглядаються обчислювальні особливості і програмна реалізація запропонованих методів.

У сучасній теорії і практиці розв’язання економіко-математичних задач велика увага приділяється моделюванню процесів і явищ за умови економії сукупних витрат або заданих граничних значень результативних показників, що відповідає рішенню екстремальних задач за критеріями НСВ і НГВ. Такими є задачі оптимального розподілу ресурсів, планування перевезень, прокладки доріг, магістралей і маршрутів, моделювання виробничих процесів.

Програмні рішення методів реалізовані у вигляді розрахункових оболонок NSO (метод НСВ), NPO (метод НГВ), побудованих за модульним принципом.

Розроблене програмне забезпечення апробувалось на моделях комп'ютерів 486, Pentium 100, 150, 166MMX під управлінням операційних систем MS DOS 6.22, Windows 95. Час обробки значно залежить від продуктивності процесора, кількості і форми подання ВД. Масиви ВД можуть містити не однозначні відповідності. Кількість точок ВД і число кроків розрахунку оптимального розв’язання визначається тільки можливостями компілятора. Число параметрів m апроксимуючого многочлена визначає вимірність простору параметрів. Доцільно обмежитися $m=5$ у випадку нелінійної плоскої апроксимації. Зі збільшенням m значно збільшується обсяг обчислень і падає їхня точність. У випадку лінійної багатовимірної апроксимації можна обмежитися $m=10.$

Обчислювальна точність розв’язання визначається в основному умовами задачі і числовими особливостями вхідних даних. Особливу увагу слід приділити роботі з дуже малими за різницею величинами. У цьому випадку значно зростають обчислювальні похибки, що вимагає застосування спеціальних обчислювальних прийомів.

Розглядається задача оптимального призначення вагових коефіцієнтів, що грають значну роль при моделюванні економіко-математичної і статистичної інформації, даються практичні рекомендації.

З практичної точки зору значний інтерес являє отримання змішаних оцінок. В роботі показується доцільність (МНК+НСВ)-оцінок, як близьких за змістом і значеннями. Участь НГВ-оцінок у цьому процесі небажана.

Досліджуються регресійні моделі на основі методів, що пропонуються.

В процесі обробки експериментальних даних розрізняють:

- функціональну залежність, коли кожному можливому значенню незалежної змінної відповідає цілком певне значення залежної змінної;
- статистичну залежність, коли кожному можливому значенню однієї змінної відповідає множина можливих значень другої змінної, що має певний статистичний розподіл внаслідок впливу неконтрольованих або неврахованих чинників, що приводяться до появи випадкових помилок.

Кореляційною залежністю між двома змінними називається функціональна залежність між значеннями однієї з них і умовним математичним очікуванням іншої. Ця залежність може бути представлена у вигляді рівняння прямої регресії

$$y_x = M_x(Y) = y(x) \tag{39}$$

або у вигляді рівняння зворотної регресії

$$x_y = M_y(X) = x(y). \tag{40}$$

Побудова регресійних моделей в існуючій літературі здебільшого допускає нормальний закон розподілу і тому чисельний метод, що застосовується при цьому, - метод найменших квадратів (МНК). Математичним очікуванням при цьому є середнє арифметичне $\bar{x}$ і $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i , \tag{41}$$

так що лінія регресії завжди проходить через центр $(\bar{x}, \bar{y})$ сукупності $\{(x_i, y_i)\}$, $i = \overline{1;n}$, точок на площині (x, y).

Нехай лінією прямої регресії є пряма лінія $y = a_0 + a_1 x$, лінією зворотної регресії є пряма $x = b_0 + b_1 y$. При відсутності лінійного функціонального зв'язку маємо $a_1 \neq 1/b_1$ і дві прямі лінії прямої і зворотної регресій проходять через центр $(\bar{x}, \bar{y})$ і складають кут φ, для якого (рис. 11)

$$tg\varphi = \frac{1 - a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1}. \tag{42}$$

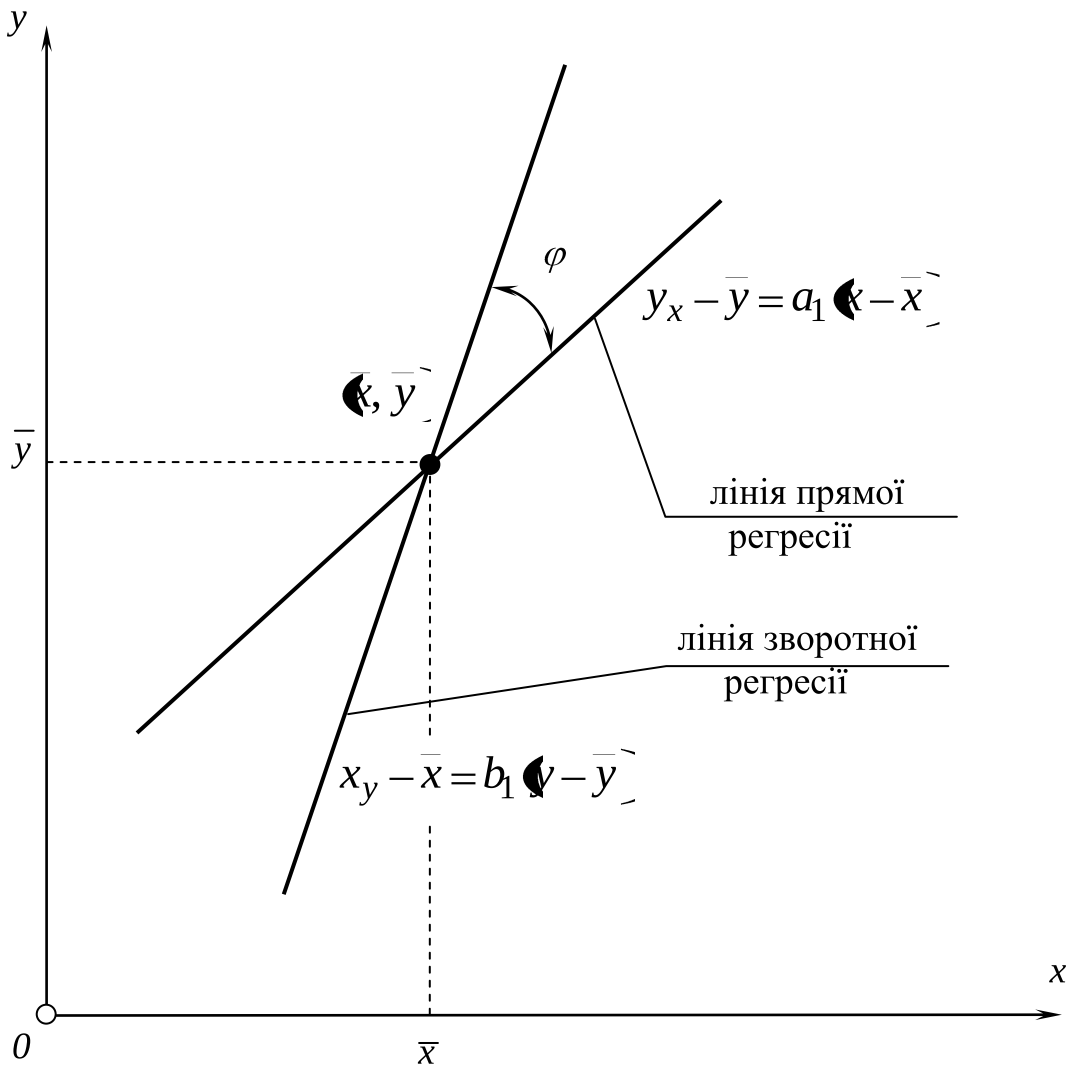


Рис. 11.

Основною метою регресійного аналізу є встановлення форми і вивчення залежності між змінними.

Подальше дослідження здійснюється засобами кореляційного аналізу, основним завданням якого є виявлення зв'язків між змінними і встановлення їх тісноти, показником якої є **вибірковий коефіцієнт парної кореляції**, що визначається з співвідношення

$$r = \pm\sqrt{a_1 \cdot b_1},$$

тобто коефіцієнт парної кореляції є середнім геометричним коефіцієнтів a_1 і b_1 і має їхній знак.

Очевидно, що регресійний аналіз можна побудувати на основі НСВ-методу.

У роботі розглянуто приклад, де на підставі МНК, як звичайно, побудовані прямі лінії прямої і зворотної регресій, а після цього для тих же даних побудовані прямі лінії прямої і зворотної регресій методом НСВ. Результати розрахунків у порівнянні представлені у таблиці.

Результат	МНК	НСВ
Коефіцієнт кореляції	*0,8238*	*0,8087*
Коефіцієнти прямої регресії a_1 a_0	 *0,1276* *14,71*	 *0,1154* *14,91*
Зворотної регресії b_1 b_0	 *5,3199* *-344,599*	 *5,6667* *-62,6*
Кут φ між прямими	$3^0\ 23'$	$3^0\ 26'$

При цьому для статистичного оцінення параметрів приймаються їхні медіанні значення.

У якості міри відхилення (аналог незсуненої оцінки дисперсії в МНК) бралося середнє за модулем значення

$$\left|\overline{\Delta}\right| = \frac{1}{n-1}\sum\left|\Delta_i\right|. \tag{43}$$

Найбільш гостра необхідність, на наш погляд, у застосуванні методів моделювання на підставі критеріїв НСВ і НГВ спостерігається у економіко-математичних дослідженнях. Обгрунтуванням для застосування того або іншого методу служать вимоги, що висуваються перед результатом. Орієнтовно можна відзначити, що, якщо мінімізуються сумарні витрати, то доцільно застосовувати метод НСВ. Якщо мінімізуються витрати будь-якої окремої господарської одиниці в порівнянні з витратами інших, то доцільний метод НГВ.

Важливою проблемою економіко-математичного моделювання є підвищення точності (зменшення залишкової дисперсії або середнього за модулем відхилення $\left|\overline{\Delta}\right|$). Це досягається шляхом збільшення числа параметрів апроксимуючої функції, тобто переходом до нелінійної НСВ - або НГВ-апроксимації.

У роботі вирішується приклад, запозичений із робіт Загайтова І. Б. про розподіл запчастин між 10 господарствами в залежності від обсягу механізованих робіт. Значення НСВ-критерію при лінійній апроксимації – *12.26*, при параболічній – *9.0067*, максимальне відхилення – *5.22* і *5.9629* відповідно. Значення критерію при лінійній НГВ-апроксимації *3.2737*. Проводиться порівняння отриманих результатів з МНК-рішенням.

У економіко-математичному моделюванні сільськогосподарського виробництва отримали велике розповсюдження і грають значну роль виробничі функції. Це поняття об'єднує всі математичні вирази зв'язку і залежності результатів виробництва від витрат виробничих факторів.

Виробничі функції можуть виступати самостійно, даючи можливість розробки параметрів економіко-математичних задач, або грати підготовчу, допоміжну роль при моделюванні глобальних, широкомасштабних процесів (міжгалузева оптимізація, прогнозування розвитку регіонів або галузі і т. ін.). Неодмінною вимогою є статистична однорідність господарсько-економічних об'єктів ,що притягуються до процесу моделювання.

Як і усякі функції, виробничі функції (ВФ) можуть задаватися в табличній, графічній і аналітичній формах. Перші два способи страждають значними похибками при визначенні усереднених і прогнозних значень і можуть грати тільки допоміжну роль при розрахунках, візуалізації і оцінці. Основною формою завдання ВФ є аналітична. Оскільки виробничі функції відбивають кореляційні зв'язки між факторами, то для їхнього визначення використовуються засоби регресійного аналізу.

Для того, щоб ВФ виконала своє призначення, вона повинна прямо або побічно враховувати фактор ефективності виробництва. Тому отримана на попередньому етапі регресійна модель процесу корегується за спеціальним алгоритмом і тільки по досягненні певних співвідношень між розрахунковими і фактичними значеннями вона стає базовою виробничою функцією (БВФ), результати розрахунку згідно з якою мають значення для будь-якого об'єкту сукупності.

Вигляд того або іншого рівняння ВФ повинен бути строго економічно обгрунтований.

Вирішується приклад побудови базової ВФ урожайності зернових культур від кількості внесеного перегною для 20 господарств району. На підставі розв’язання згідно з методикою, затвердженою Мінагропромом, робиться висновок про ефективність використання ресурсів в тому або іншому господарстві.

Дається перелік з 9 основних задач, для розв’язання яких доцільно застосовувати виробничі функції.

Моделі прогнозування розвитку випадкових процесів є однією з важливих областей впровадження статистичних методів. Найбільш розповсюдженими моделями прогнозування є модель тренда з помилкою, коли основна увага звертається на виділення компоненти – тренда з наступним аналізом випадкової складової, що зумовлює “завади”. В існуючих дослідженнях тренд для заданої точкової множини на площині будується за методом МНК або згладжуванням ВД одним з дискретних способів, наприклад, способом ковзаючої середньої.

Математичною основою прогнозування є екстраполяція, тобто визначення значень функції за межами області її визначення. У цьому випадку, як відомо, різко зростає похибка моделювання. Тому особливу увагу необхідно приділяти “передісторії”.

Основними умовами ефективності прогнозування є:

- статистична стійкість результатів;
- інерція дії факторів, що забезпечує детермінований характер тренда;
- відсутність грубих промахів, що викривляють статистичну картину.

Основними вхідними даними моделей прогнозування у виробництві є часові ряди (ряди динаміки). Математична обробка рядів динаміки має на меті виявити загальні тенденції в зміні його рівнів, виключити вплив випадкової складової.

Одним з прийомів моделювання є вирівнювання по кривій регресії, вигляд якої вибирається за умовами заданої точності, розташування точок ряду, економіко-математичної суті процесу (течія процесу, наявність екстремумів і т. ін.).

В роботі розглянуто приклад прогнозування середньої урожайності озимої пшениці по господарствах Мелітопольського району на 1994 і 1995 роки на основі статистичного матеріалу за 1980-1993 роки. Модель складається з параболічного тренда і синусної складової випадкового процесу, побудованих по НСВ- або НГВ-методиці. Результати прогнозу у порівнянні з фактичними даними задовільні.

Для аналізу виробничих процесів застосовуються також факторно-часові моделі, що формуються таким чином.

На підставі сукупності даних по декількох господарствах будуються виробничі функції за кожним j-м роком спостережень

$$y = f_j\left(a_{0j}, a_{ij}, x_i\right), \; i = \overline{1;m}, \; j = \overline{1;k}. \tag{44}$$

В отриманих функціях коефіцієнти $a_0, a_j, j = \overline{1;k}$, представлені лінійно і кожний з них можна моделювати в функції від t

$$a_0 = a_0(t), \; a_j = a_j(t), \; t = \overline{1;k}. \tag{45}$$

за методом НСВ або НГВ в розрізі k років. Сукупна функція

$$y = f\left[a_0(t), a_i(t), x_i\right], \; i = \overline{1;m}, \; t = \overline{1;k} \tag{46}$$

і являє собою факторно-часову модель. Ця модель більш повно відбиває виробничі процеси, тому що дозволяє розглядати такі її перерізи, що включають одночасні зміни факторів за деякі періоди часу. У роботі побудована така модель середньої урожайності озимої пшениці для 8 господарств району за 1980-1995 роки.

Запропоновану методику можна застосувати в інших галузях при іншому наборі факторів і об'єктів. При цьому показники об'єктів, що порівнюються, повинні бути статистично однорідними.

Методи НСВ і НГВ дозволяють будувати регресійні прогнозні моделі і у випадку автокореляції, коли наступні значення часового ряду залежать від його попередніх рівнів. Методика розрахунку аналогічна раніше розглянутому випадку.

Застосування методів, що пропонуються, для прогнозування виробничих процесів в більшій мірі, ніж в МНК, відповідає їхній теоретико-імовірнісній природі і тому дає більш обгрунтовані і вірогідні оцінки.

Розглядається розв’язання задачі оптимізації розпаювання земель з урахуванням їхньої якості в рамках Урядової програми реструктуризації господарств Мінагропрому України в Луганській області фахівцями іноваційного державного малого підприємства “Гея” з використанням програмного забезпечення, розробленого в дисертації.

Оптимізації підлягає розподіл конкретних дільниць сільгоспугідь між пайовиками з урахуванням:

- їхніх заявок на вигляд діяльності, що вимагає того або іншого виду сільгоспугідь в паю;
- повного розподілу землі конкретних дільниць.

Перший етап процесу оптимізації полягає в пошуках такого набору значень площ під ріллею, сіножаттю, пасовищем для кожного пайовика, що забезпечував би мінімум суми $\sum|\Delta_i|$ відхилень (НСВ) або мінімум за модулем граничного відхилення $|\Delta|_{max}$ фактичної площі паю від розрахункового в кадастрових гектарах.

Другий етап оптимізації полягає в розподілі між пайовиками з урахуванням балу бонітета. Конкретне виділення дільниць здійснюється шляхом послідовного розпаювання вибраного поля серед учасників, склад яких формується випадковим чином з ряду ,що ранжувався по величині площі даного виду сільгоспугідь, для *і*-го пайовика за умови відсутності неподільного залишку поля.

У результаті проведених у роботі досліджень позначені і відокремлено розвинуті основні риси нового спрямування геометричного моделювання екстремальних задач з функціями, що не диференціюються, на дискретних точкових множинах. Основу спрямування складає перенесення до простору параметрів, що сформувався таким чином, щоб забезпечувалися співвідношення між параметрами моделюючої функції і координатами точок ВД. Означені співвідношення визначаються характером цільової функції екстремальної задачі і базуються на її елементах.

Моделюючі функції, що складають предметну область спрямування, лінійні відносно своїх параметрів і не залежать від вигляду і характеру цільової (екстремальної) функції - критерію. Це дає можливість застосовувати різноманітні моделюючі функції для розв’язання однієї і тієї же екстремальної задачі і, навпаки, при одній і тій же моделюючій функції провести розв’язання різноманітних екстремальних задач і порівняти отримані результати, а при необхідності - і розглянути різноманітні змішані оцінки.

Як вже вказувалося, особливістю запропонованого спрямування, є те, що розв'язання екстремальної задачі відшукається не в просторі вхідних даних, а в просторі параметрів моделюючої функції.

Спираючись на проведені дослідження, можна запропонувати декілька можливостей розвитку спрямування, що пропонується:

- розширення множини вхідних даних, підключення точкових множин, оснащених значеннями похідних;
- розширення класу моделюючих функцій, підключення мультиплікативних моделей

$$y = a_0 \cdot \varphi_1^{a_1} \cdot \varphi_2^{a_2} \cdot, \dots \varphi_k^{a_k},$$

де базисні функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$, можуть мати різноманітну природу, а розв'язання екстремальних задач напряму пов'язаної із значними труднощами.

- особливо слід відзначити розширення класу моделюючих функцій за рахунок дискретного їхнього подання у вигляді різницевих рівнянь і їхніх систем. У якості параметрів можуть виступати як звичайні, так і узагальнені розділені різниці, складені для елементів ВД.

У більш загальному плані вкрай необхідними є дослідження різноманітних аспектів спрямування при різноманітних наперед заданих умовах як метричного, так і позиційного характеру - розширення множини співвідношень між вхідними даними і елементами цільових функцій - критеріїв. Дуже перспективним уявляється побудова інших елементів пучка (середнє геометричне, середнє гармонійне і т. ін.) в просторі параметрів і отримання в зв'язку з цим інших критеріїв і інших методів моделювання ДТМ.

Розв'язання прикладних задач в межах спрямування, що пропонується, висунуло ряд задач і проблем, що вимагають додаткових досліджень, а саме:

- моделювання ДТМ за відомими критеріями НСВ і НГВ для випадку, коли елементом цільової функції є не відхилення, а відстань точок від моделюючої кривої (т. н. ортогональна регресія). З чисто геометричної прикладної точки зору значний інтерес викликає пошук такого положення системи координат віднесення ВД, коли значення критерію мінімальне для заданого вигляду і кількості параметрів моделюючої кривої;
- моделювання замкнених і спіралеподібних кривих, опис яких не піддається поліноміальному вигляду в декартовій системі координат (реалізація спрямування, що пропонується, в полярній (циліндричній і т. ін.) системі координат);
- згладжування ДТМ на основі методів ,що пропонуються, як метод побудови тренда при прогнозуванні випадкових процесів;
- розвиток кореляційного аналізу на основі методів ,що пропонуються, тобто розробку критеріїв обгрунтованості і вірогідності (аналогічно

критеріям Стьюдента, Фішера і т. ін.), відповідних їм статистичних таблиць і т. ін.;

- розвиток спрямування з урахуванням ідей і методів інших напрямків геометричного моделювання (сплайн-апроксимація, гармонійний аналіз, способи лінійного програмування і т. ін.);
- розвиток методів моделювання кривих ліній і поверхонь на основі їхнього дискретного подання з урахуванням наперед заданих вимог (конструктивних, метричних, позиційних...) у відповідності з поставленими критеріями наближення.

В дисертації створені теоретичні передумови, показані шляхи і методи рішення типових задач, що може забезпечити подальший розвиток спрямування і успішне розв'язання перерахованих і знов виникаючих задач і проблем.

ВИСНОВКИ

На підставі проведених в роботі досліджень вирішена наукова проблема геометричного моделювання екстремальних задач з функціями – критеріями, що не диференціюються, для дискретних точкових множин, заданих в евклідовому просторі заданого числа вимірів. Для цього сформоване нове наукове спрямування геометричного моделювання, визначені методологічні принципи, показана можливість і методика створення в межах спрямування нових методів моделювання, відповідних поставленим критеріям; сформульовані особливості спрямування, що стосуються його змісту, алгоритмів, обчислювальної і машинної реалізації.

Значення для науки запропонованого спрямування в тому, що воно відкриває широкі можливості для підключення нових критеріїв наближення і розробки відповідних їм нових методів геометричного моделювання, для розширення множини моделюючих функцій і підключення ідей і методів інших напрямків геометричного моделювання з метою отримання змішаних і компромісних оцінок.

Використання отриманих результатів в наукових дослідженнях доцільно при розробці нових методів геометричного моделювання, за новими критеріями наближення, в особливості, з урахуванням наперед заданих вимог диференціально-геометричного, конструктивного, технологічного і ін. характеру.

Значення для практики полягає в нових можливостях більш ефективного розв'язання прикладних задач апроксимації, оптимізації і статистики на основі методів, що пропонуються в межах спрямування. Використання отриманих результатів в практиці доцільно при обробці результатів експериментальних досліджень, рішенні задач економіко-математичного моделювання, складання оптимізаційних і прогнозних моделей розвитку підприємств, галузей, регіонів.

Загальні висновки по роботі:

1. Рівень розвитку і можливості відомих методів і спроб розв'язання окремих напрямків обраної проблеми не відповідає запитам теорії і практики з декількох причин:
- немає єдиного підходу і достатньо глибокого теоретичного обгрунтування;
- обчислювальні алгоритми не ведуть до бажаного рішення;
- програмна і машинна реалізація не орієнтовані на сучасну обчислювальну техніку.
2. Шляхом розв'язання даної проблеми є перенесення до простору параметрів заданого класу моделюючих функцій, яке сформовано з урахуванням цільової функції і дозволяє виділити конструктивні, медіанні і серединні елементи, що беруться до уваги при розрахунках значень цільового критерію в процесі послідовного нарощування числа параметрів і підвищення точності наближення. Запропоновані в роботі методи розв'язання проблеми спираються на означені конструктивні елементи і співвідношення між ними і реалізують кожний відокремлено моделювання за критеріями НСВ і НГВ. Відомі дослідження і методи не спираються на означені елементи і не ведуть до розв'язку.
3. Запропоноване в роботі спрямування і розроблені в його рамках методи дозволяють підвищити точність моделювання, скоротити терміни проектування і істотно покращити якість проектних рішень за рахунок нових критеріїв і можливостей, одночасної оптимізації всього об'єкту або процесу проектування.

   У науковому плані застосування нового спрямування виводить процес наукового пошуку і побудови моделей на більш високий рівень, завдяки можливості введення нових оптимізаційних критеріїв і отримання адекватних процесу оцінок.
4. Наведені в роботі тестові приклади, а також розрахунки, проведені у результаті впроваджень, підтверджують вірогідність теоретичних результатів.
5. Запропоновані в роботі методи та отримані на їхній основі моделі і програмне забезпечення впроваджені у Міністерстві промислової політики України, в ВАТ "АвтоЗАЗ" (м. Запоріжжя), КБ ГП "Завод ім. Малишева" (м. Харків), у концерні "Мотортехніка" (м. Київ), в ІМДП "Гея" (м. Луганськ), у навчальному процесі ТДАТА. Доцільно рекомендувати нове спрямування і розроблені у роботі методи до впровадження у розрахункових відділах НДІ і конструкторських бюро, які проводять математичну обробку результатів експериментів; у НДІ і відділах, що ведуть економіко-математичне моделювання виробничих процесів і статистичну обробку інформації; в бюро і відділах, які процюють над

проектуванням нової техніки, зокрема, криволінійних поверхонь, обводів і т. ін.

6. Подальший розвиток запропонованного в роботі спрямування доцільно вести в напрямку розширення множини вхідних даних; розширенняя класу моделюючих функцій, особливо за рахунок їх дискретного представлення; підключення нових критеріїв і розробки на цій основі нових обчислювальних методів; розробки нових методів згладжування та одержання на цій основі нових моделей прогнозування; розвитку кореляційного аналізу та складення нових статистичних таблиць на основі запропонованих методів.

Основні положення дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Найдиш А.В. Геометричні основи методу найменших графічних відхилень (НГВ) // Прикл.геом. та інж.граф.- К.: КДТУБА, 1996.- Вип.61.- С.64-67.

2. Найдиш А.В. Геометричне обгрунтування методу найменших сумарних відхилень (НСВ) //Прикл.геом. та інж.граф.- К.: КДТУБА, 1996.- Вип.61.- С.128-131.

3. Найдыш А.В. Решение экономических задач по критерию наименьшей суммы отклонений (НСО) //Сб. науч. тр. Национального аграрного университета. – К.; 1998 .- Т4.- С.267-272.

4. Найдыш А.В. Двойственная задача метода наименьших суммарных отклонений // Сб. науч. тр. Национального аграрного университета. – К.; 1998 .- Т4.- С.262-266.

5. Найдыш А.В. Многомерная НСО-аппроксимация // Вестник Приазовского технического ун-та.: Сб.науч.тр. Вып.3. – Мариуполь, 1997.- С.281-283.

6. Найдыш А.В. НСО-аппроксимация с весовыми коэффициентами //Вестник Приазовского технического ун-та. : Сб.науч.тр. Вып.3. – Мариуполь, 1997.- С.278-280.

7. Найдыш А.В. Решение задач геометрического моделирования на основе перенесения в пространство параметров //Прикл. геом. та инж.граф.- К.: КДТУБА, 1997.- Вип.62.- С.56-59.

8. Найдыш А.В. НПО-аппроксимация с весовыми коэффициентами. Сб.тр.//Тавр.гос.агротех.академии.- Вып.1 - Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.3.- С.115-120.

9. Найдыш А.В. Двойственная задача метода наименьших предельных отклонений Сб.тр.//Тавр.гос.агротех.академии.-Вып.4 - Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.1.- С.65-70.

10. Найдыш А.В. Применение метода наименьших предельных отклонений в экономических исследованиях. //Сб.тр.Тавр. гос. агротех.академии.- Вып.2- Мелитополь: ТГАТА, 1998.- Т.4.- С.105-113

11. Найдыш А.В. Аппроксимация по критерию наименьшей суммы отклонений (НСО) перенесением в пространство параметров //Прикл.геом. та інж.граф.- К.: КДТУБА, 1997.- Вип.62.- С.172-176.

12. Найдыш А.В. Метод НСО с групповыми весовыми коэффициентами//Сб.тр.Тавр.гос.агротех.академии.- Вып.1 - Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.3.- С.110-114.

13. Найдыш А.В. НПО-аппроксимация с групповыми весовыми коэффициентами //Сб.тр.Тавр.гос.агротех.академии.- Вып.4 – Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.1.- С.43-50.

14. Найдиш А.В. Про графіки відгуку в методах НСВ та НГВ // Прикл. геом. та інж.граф.- К.:КДТУБА,1998.- Вип.63.- С.154-158.

15. Найдиш А.В. Багатовимірна НГВ-апроксимація// Прикл. геом. та інж.граф.- К.: КДТУБА, 1998.- Вип.63.- С. 67-70.

16. Найдыш А.В. Регрессионные модели на основе новых статистических методов //Сб.тр.Тавр.гос.агротех. академии. - Вып.2. - Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.3.- С.93-97.

17. Найдыш А.В. Модели прогнозирования на основе новых статистических методов // Сб. тр.Тавр.гос.агротех.академии. Вып.2.- Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.3.- С.88-92.

18. Найдыш А.В. Вычислительный алгоритм метода наименьшего предельного отклонения // Сб.тр.Тавр.гос.агротех.академии.-Вып.1. Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Т.1.- С.32-39.

19. Найдыш А.В. Решение проблемы равномерных приближений дискретно представленной информации на основе перенесения в пространство параметров //Сб.трудов IV Междунар. научно-практ.конф. "Современные проблемы геом. моделирования".- Мелитополь: ТГАТА, 1997.- Ч.1.- С.71-78.

20. Найдыш А.В. Моделирование экономической информации по критерию минимума предельных отклонений с учетом групповых весовых коэффициентов.//Экономика и управление. – 1998.- № 2.- С.35-37.

Найдиш А. В. Геометричне моделювання дискретних точкових множин на основі перенесення до простору параметрів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття вченого ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.01. 01. - прикладна геометрія, інженерна графіка. – Київський державний технічний університет будівництва і архітектури, Україна, Київ, 1998.

Дисертація присвячена розробці нового спрямування геометричного моделювання дискретних точкових множин для рішення екстремальних задач з цільовими функціями – критеріями, що не диференціюються. Сформульовані основні риси і особливості спрямування. Його основою є перенесення до простору параметрів моделюючої функції, який сформовано таким чином, щоб забезпечити лінійність відображення і збереження метричних властивостей функції – критерію. Виділені конструктивні медіанні і серединні елементи, що беруться до уваги при розрахунку значень цільового критерію в процесі послідовного нарощування числа параметрів і підвищення точності наближення. Запропоновані в межах нового спрямування методи розв’язання поставленої проблеми спираються на означені конструктивні елементи і співвідношення між ними і реалізують кожний окремо моделювання за критеріями найменшого сумарного і найменшого граничного відхилень. По кожному з методів розроблені різноманітні варіанти їхньої практичної реалізації, складені алгоритми і програми розрахунків на ПЕОМ. Здійснене впровадження результатів досліджень у різноманітних підприємствах промисловості і сільського господарства.

Ключові слова: геометричне моделювання, перенесення до простору параметрів, пучок, медіанна смуга, серединна лінія, критерій, найменше сумарне відхилення, найменше граничне відхилення.

Найдыш А.В. Геометрическое моделирование дискретных точечных множеств на основе перенесения в пространство параметров.– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.01.01.– прикладная геометрия, инженерная графика.–

Киевский государственный технический университет строительства и архитектуры, Украина, Киев, 1998.

Диссертация посвящена разработке нового направления геометрического моделирования дискретных точечных множеств для решения экстремальных задач с недифференцируемыми целевыми функциями – критериями. Сформулированы основные черты и особенности предлагаемого направления. Основой направления является перенесение в пространство параметров моделирующей функции, сформированное таким образом, чтобы обеспечить линейность отображения и сохранение метрических свойств функции – критерия. Выделены конструктивные медианные и серединные элементы, учитываемые при расчете значений целевого критерия в процессе последовательного наращивания числа параметров и повышения точности приближения. Предложенные в рамках нового направления методы решения поставленной проблемы опираются на указанные конструктивные элементы и соотношения между ними и реализуют каждый в отдельности моделирование по критериям наименьшего суммарного и наименьшего предельного отклонений. По каждому из методов разработаны различные варианты их практической реализации, составлены алгоритмы и программы расчетов на ПЭВМ. Осуществлено внедрение результатов исследований в различных предприятиях промышленности и сельского хозяйства.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, перенесение в пространство параметров, пучок, медианная полоса, серединная линия, критерий, наименьшее суммарное отклонение, наименьшее предельное отклонение.

Naydysh A.V. Geometrical modelling of discrete point sets on the base of moving in the space of parameters.- Manuscript.

The dissertation on cosearching a teaching degree of doctor of technical sciences on speciality 05.01.01.- applied geometry, engineering graphics.- Kiev State Technical University of Building and Architecture, Ukraine, Kiev, 1998.

The dissertation is devoted to the creation of a new direction of geometrical modelling of discrete point sets for the solution of extremeproblems with nondifferentiable target functions-criterions. Main features and peculiaritiyes of proposed direction are formed. The base of the direction is a moving into space of parameters of modelling function, formed so as to ensure the linear of mapping and conservation of metric characteristics of the function-criterion. Constructive median and middle elements taken account into the calculation of values target criterion in the process of consequent increasing a number of parameters and raising accuracy of approach are chosen. Offered within the framework of a new direction the methods of solution of a raised problem are leaned on specified constructive elements and correlations between them and realize each separately modeling on criterions of the least sum of deviations and least maximum deviation. Different variants of practical realization of these methods, algorithms and programs of calculations on PC were worked out. The introduction of the results of investigation is realized in different enterprises of industry and agriculture.

Key words: geometrical modelling, moving in the space of parameters, bunch, median band, middle line, criterion, least sum of deviations and least maximum deviation.

Підписано до друку 12.08.98. Формат 21x31. Умовн. др. а. 2,0. Папір фінський. Гарнітура Times ET. Тираж 100 прим. Замовл. №227. Надруковано на ризографі ТДАТА.

332313, м. Мелітополь,
пр. Б. Хмельницького, 18