

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

Олена Михайленко, Галина Антонова,
Ілля Тетервак

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА (ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА)
СТАТИКА. КІНЕМАТИКА

Конспект лекцій



Запоріжжя, 2023

УДК [621.8+531.2](075)
М69

Автори: О. Ю. Михайленко, Г. В. Антонова, І. Р. Тетервак

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
механіко-технологічний факультету
Протокол № ____ від _____ 2023 р

Рецензенти:

І. О. Чижиков – к.т.н., доцент кафедри «Мехатронні системи тракторів та сільськогосподарські машини»;

А. М. Бондар – к.т.н., ст. викладач кафедри «Експлуатація та технічний сервіс машин».

Михайленко О.Ю., Антонова Г.В., Тетервак І.Р. Інженерна механіка (Теоретична механіка). Статика: навчально – методичний посібник. Конспект лекцій. Запоріжжя: ТДАТУ, 2023. 122 с.

Навчально-методичний посібник (конспект лекцій) складено з метою допомогти студентам під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу «Інженерна механіка (Теоретична механіка)». Вивчення механіки в рамках курсу фізики недостатньо для всебічної підготовки бакалаврів та спеціалістів – механіків. Надалі студенти освоюватимуть багато інших дисциплін, що спираються на знання, які вони отримають у теоретичній механіці. Такими дисциплінами будуть: опір матеріалів, теорія машин та механізмів, деталі машин, гідравліка та ін. Конспект лекцій – це короткий, і по можливості доступний виклад основних понять, допоможе надалі швидше увійти у світ теоретичної механіки.

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів зі спеціальностей: 133 «Галузеве машинобудування» за ОПП «Комп'ютерний інжиніринг харчових і переробних виробництв» та 131 «Прикладна механіка» за ОПП «Комп'ютерне проектування і дизайн».

УДК [621.8+531.2](075)

© Таврійський державний
агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	6
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.	
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА».	7
ТЕМА 1: ЗАКОНИ ТА ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕХАНІКИ	7
1.1. Історична роль теоретичної механіки	7
1.2. Введення у теоретичну механіку. Закони та основні поняття механіки	16
ТЕМА 2. СТАТИКА	29
2.1 Основні визначення та положення статyki.	
Класифікація сил.	29
2.2 Аксиоми статyki. Основні типи в'язей та їх реакції.	37
ТЕМА 3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ	54
3.1. Класифікація систем сил у статиці	54
3.2. Система збіжних сил	56
ТЕМА 4. МОМЕНТ СИЛІ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. ПЛОСКА СИСТЕМА ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ СИЛ	72
4.1 Момент сили щодо точки та осі	73
4.2 Пара сил	76
4.3 Плоска система довільно розташованих сил	83
ТЕМА 5. РОЗРАХУНОК ФЕРМ	88
5.1 Загальні відомості про ферми	88
5.2 Розрахунок плоскої ферми аналітичним та графічним методом. Метод Ріттера	98
ТЕМА 6. ТЕРТЯ КОВЗАННЯ ТА ТЕРТЯ КОЧЕННЯ	110
6.1 Тертя ковзання. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя ковзання	112
6.2 Тертя кочення. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя кочення	118
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.	
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА».	124
ТЕМА 7: ВВЕДЕННЯ В КІНЕМАТИКУ. ШВИДКІСТЬ ТОЧКИ	

7.1. Предмет кінематики. Основне завдання кінематики.	124
7.2. Основні поняття кінематики.	125
7.3. Способи завдання руху точки.	126
7.4. Поняття швидкості. Визначення швидкості точки при завданні її руху векторним способом.	129
7.5. Визначення швидкості точки при завданні її руху природним і координатним способом.	129
7.6. Графіки руху швидкості. Годограф швидкості.	133
ТЕМА 8: ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ.	137
8.1. Поняття прискорення точки.	137
8.2. Визначення прискорення точки при трьох способах завдання її руху (векторний, координатний, природний).	139
8.3. Окремі випадки руху точки.	144
8.4. Технічні приклади.	146
ТЕМА 9: НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА.	150
9.1. Поступальний рух твердого тіла.	150
9.2. Обертний рух твердого тіла.	152
ТЕМА 10: ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.	161
10.1. Плоскопаралельний рух твердого тіла й рух плоскої фігури в її площині.	161
10.2. Рівняння руху плоскої фігури і її точок.	162
10.3. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертний рух навколо полюса.	163
10.4. Основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху.	164
10.5. Визначення швидкостей точок плоскої фігури.	167
10.6. Теорема про проєкції швидкостей 2-х точок плоскої фігури на пряму з'єднуючі ці точки.	168
10.7. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою МЦС.	169
10.8. Окремі випадки визначення МЦС.	171
10.9. Визначення прискорень точок плоскої	172

фігури.	
10.10. Технічні приклади.	174
ТЕМА 11: СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ	178
11.1. Переносний і відносний рух точки.	
Абсолютний рух.	178
11.2. Теорема про додавання швидкостей.	179
11.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса).	181
11.4. Технічні приклади.	183
ТЕМА 12: СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	188
12.1. Постановка завдання.	188
12.2. Додавання поступальних рухів.	189
12.3. Додавання обертань.	189
12.4. Додавання обертального й поступального рухів.	193
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	198

ВСТУП

Теоретична механіка охоплює на даний час всі життєво важливі сучасні проблеми; дедалі вагомішою стає її частка у розвитку світової науки. Праці механіків вкладено й у розрахунок траєкторій космічних кораблів, й у прилади, що управляють їх рухом, й у конструкції двигунів і ракет, використовуваних на вирішення нагальних народногосподарських проблем і перспективних завдань освоєння ближнього і далекого Космосу. Праці механіків вкладено у ті різноманітні устрою та конструкції, у ті механізми і машини, без яких немислиме існування нашого суспільства та його подальший розвиток. Будівництво та транспорт здавна пов'язані з механікою, а тепер на неї спирається і технологія різноманітних виробничих процесів. Без досягнень теоретичної механіки неможливе створення автоматизованих та поточкових ліній, систем автоматичного управління виробничими процесами, робототехніки.

Механіку використовує медицина при діагностиці хвороб та створенні штучних органів. Жодна сучасна навігаційна система неспроможна уникнути застосування останніх результатів теоретичної механіки.

Успіхи у вивченні коливальних систем дозволяють застосовувати їх для прискорення, удосконалення та створення нових технологічних процесів. Все ширше використовує механіка експеримент із усіма можливостями, які представляє сучасна техніка.

Теоретична механіка все більше збагачується новими теоріями, що дозволяють розрахунковим шляхом передбачити перебіг різних процесів та керувати ними.

Перед теоретичною механікою постійно виникають нові життєво необхідні завдання, є в ній чимало старих, але ще недостатньо досліджених важливих питань.

Потужний розвиток сучасної механіки є переконливим доказом життєздатності класичної теоретичної механіки, плідності її зв'язків із сучасною наукою та технікою.

Вивчення механіки в рамках курсу фізики недостатньо для всебічної підготовки бакалаврів та спеціалістів – механіків. Надалі студенти освоюватимуть багато інших дисциплін, що спираються на знання, які вони отримують у теоретичній механіці. Такими

дисциплінами будуть: опір матеріалів, теорія машин та механізмів, деталі машин, гідравліка та ін.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА».

ТЕМА 1: ЗАКОНИ ТА ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕХАНІКИ

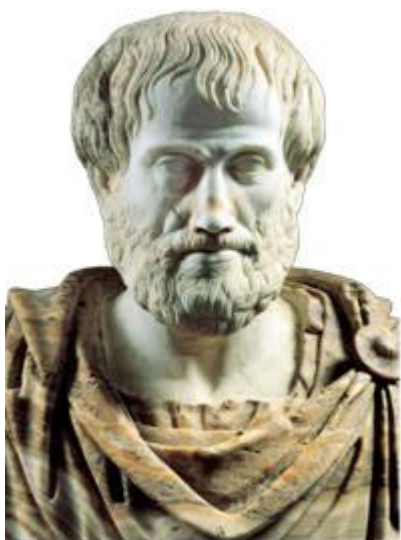
ПЛАН

1.1. Історична роль теоретичної механіки

1.2. Введення у теоретичну механіку. Закони та основні поняття механіки.

1.1. Історична роль теоретичної механіки

Механіка - одна з найдавніших наук. Вона виникла та розвивалася під впливом запитів суспільної практики, а також завдяки діяльності людського мислення. Багато законів механічного руху та рівноваги матеріальних тіл пізнавались людством шляхом багаторазових повторень, суто експериментально. Цей суспільно-історичний досвід, що передається від покоління до покоління, був тим вихідним матеріалом, на аналізі якого розвивалася механіка як наука.



Перші рукописи, що дійшли до наших днів, і наукові повідомлення в галузі механіки належать античним вченим Єгипту та Греції. Найдавніші папіруси та книги, в яких збереглися дослідження деяких найпростіших завдань механіки, відносяться головним чином до різних завдань статички, тобто вчення про рівновагу. У першу чергу тут слід назвати твори видатного філософа давньої Греції Аристотеля (384-322 рр. до нашої ери), який ввів у наукову термінологію назву механіка для широкої галузі людського знання, в якій вивчаються найпростіші рухи матеріальних тіл, що спостерігаються в природі і створені людиною за його діяльності.

Багато міркувань Аристотеля про явища механічного руху наївні, заплутані, непослідовні. Виходячи із загальних аксіоматичних положень, він часто робив неправдиві висновки про закономірності

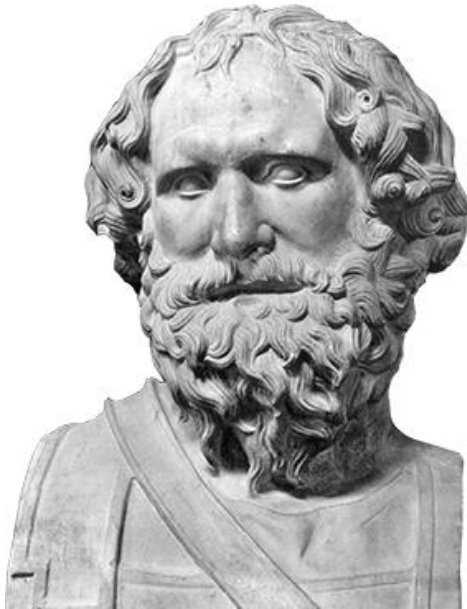
конкретних явищ. Нехтування експериментом і ряд висновків, заснованих на безпосередньому спогляданні видимих процесів руху тіл без подальшого кількісного аналізу, привели Аристотеля до результатів, які не підтверджуються науково поставленим досвідом.

До правильних припущень Аристотеля відноситься зміст теореми про складання швидкостей і твердження, що повітря має вагу.

Вважаючи, що світ ідей є досконалішим, ніж світ речей, і вважаючи експеримент справою рабів, послідовники Аристотеля не звертали великої уваги на явну незгоду багатьох теоретичних висновків Аристотеля з найпростішими дослідженнями.

Наукові основи вчення про рівновагу було закладено геніальним Архімедом (287-212 рр. до нашої ери), який першим із вчених почав

успішно застосовувати суворі математичні методи для дослідження проблем механіки.



У своєму творі про рівновагу плоских фігур і про центр тяжіння Архімед відкрив закон рівноваги важеля і встановив основні принципи статички твердого тіла. Архімед в теорії важеля виходить із наступних припущень (постулатів), що він вважає зрозумілими:

1. Рівні вантажі, прикладені до рівних плечей важеля, врівноважуються.
 2. Рівні вантажі, прикладені до нерівних плечей важеля, не перебувають у рівновазі. Вантаж, прикладений до довшого плеча, падає вниз.
 3. Якщо вантажі, підвішені на яких-небудь плечах важеля, знаходяться в рівновазі, то якщо до одного з вантажів щось додати, то рівновага порушиться і вантаж, до якого додано, падатиме вниз.
 4. Так само, якщо від одного вантажу відібрати що-небудь, то рівновага порушиться і вантаж, від якого не було відібрано, падатиме вниз.
- З цих цілком очевидних аксіоматичних положень Архімед отримав умову рівноваги важеля. Будь-які (сумірні або несумірні)

вантажі знаходяться в рівновазі, коли плечі важеля обернено пропорційні вантажам (формулювання закону рівноваги важеля дана в творі Архімеда, що дійшов до нас, «Про рівновагу плоских тіл, або про центри тяжкості плоских тіл»). Цією умовою рівноваги важеля ми користуємося статикою досі.

Інтенсивний розвиток механіки почався в епоху Відродження з початку XV ст. в Італії, а потім і в інших країнах. У цю епоху особливо великий прогрес у розвитку механіки було досягнуто завдяки роботам Леонардо да Вінчі (1452-1519), Коперника (1473-1543) та Галілея (1564-1642).



Знаменитий італійський художник, математик, механік та інженер, Леонардо да Вінчі займався дослідженнями з теорії механізмів (ім збудовано еліптичний токарний верстат), вивчав тертя в машинах, досліджував рух води в трубах та рух тіл по похилій площині. Він перший пізнав надзвичайну важливість нового поняття механіки – моменту сили щодо точки. Досліджуючи рівновагу сил, що діють на блок, Леонардо да Вінчі встановив, що роль плеча сили грає довжина перпендикуляра, опущеного з нерухомої точки блоку на напрямок мотузки, що несе вантаж. Рівновагу блоку можливе тільки в тому випадку, якщо добутки сил на довжини відповідних перпендикулярів будуть рівні; інакше кажучи, рівновага блоку можлива лише за умови, що сума статичних моментів сил щодо точки приросту ваги блоку буде дорівнює нулю.

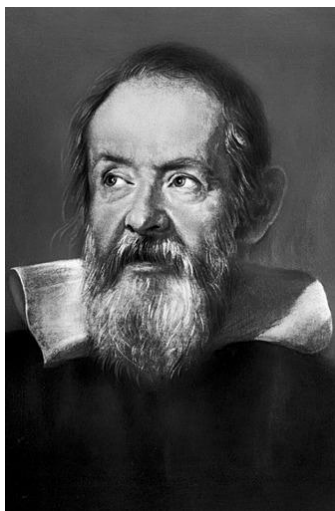
Револьюційний переворот у поглядах на будову всесвіту було зроблено польським вченим Миколою Коперником, який, як образно написано на його пам'ятнику у Варшаві, «зупинив Сонце та зрушив Землю». Нова, геліоцентрична система світу пояснювала рух планет, виходячи з того, що Сонце є нерухомим центром, біля якого по колам рухають усі планети. Ось справжні слова Коперника, взяті з його безсмертного твору: «Те, що нам представляється як рух Сонця, походить не від його руху, а від руху Землі та її сфери, разом з якою ми обертаємось навколо Сонця, як будь-яка інша планета. Так, Земля має більше, ніж один рух. Видимі прості і зворотні рухи планет

відбуваються не в силу їхнього руху, але руху Землі. Таким чином, один рух Землі достатньо для пояснення і багатьох видимих нерівностей на небі».



У роботі Коперника було розкрито головну особливість руху планет і дано розрахунки, що стосуються прогнозів сонячних і місячних затемнень. Пояснення зворотних видимих рухів Меркурія, Венери, Марса, Юпітера та Сатурна щодо сфери нерухомих зірок набули ясності, виразності та простоти. Коперник ясно розумів кінематику відносного руху тіл у просторі.

Роботи геніального італійського вченого Галілея (1564-1642) мали фундаментальне значення у розвитку динаміки.



Динаміка як наука була заснована Галілеєм, який відкрив багато важливих властивостей рівноприскорених і рівноуповільнених рухів. Підстави цієї нової науки були викладені Галілеєм у книзі під назвою «Бесіди та математичні докази, що стосуються двох нових галузей науки, які стосуються механіки та місцевого руху».

У розділі III, присвяченій динаміці, Галілей пише: «Ми створюємо нову науку, предмет якої є надзвичайно старим. У природі немає нічого древнішого руху, але саме щодо нього філософами написано дуже мало значного. Тому я багаторазово вивчав на досвіді його особливості, що цілком цього заслуговують, але досі або невідомі, або недоведені. Так, наприклад, кажуть, що природний рух падаючого тіла є прискореним рухом. Однак якою мірою наростає прискорення, досі не було вказано; наскільки я знаю, ніхто ще не довів, що простори, що проходять падаючим тілом в однакові проміжки часу, ставляться між собою як послідовні непарні числа. Було помічено також, що тіла або снаряди, які кидають, описують деяку криву лінію, але того, що ця лінія є параболою, ніхто не вказав».

До Галілея сили, які діють на тіла, розглядали зазвичай в стані рівноваги і вимірювали дію сил лише статичними методами (важіль,

ваги). Галілей зазначив, що сила є причиною зміни швидкості, і тим самим встановив динамічний метод порівняння дії сил. Дослідження Галілея в галузі механіки важливі не лише тими результатами, які йому вдалося отримати, а й послідовним введенням у механіку експериментального методу дослідження рухів.

Багато положень механіки Аристотеля були Галілеєм уточнені (як, наприклад, закон про складання рухів) або дуже дотепно спростовані суто логічними міркуваннями (спростування шляхом постановки дослідів вважалося на той час недостатнім). Отже, Галілей був зачинателем сучасної динаміки. Закони інерції та незалежної дії сил Галілей чітко розумів у їхній сучасній формі.

Роботи Галілея були продовжені та розвинені Гюйгенсом (1629-



1695), який розробив теорію коливань фізичного маятника та встановив закони дії відцентрових сил. Гюйгенс поширив теорію прискорених і уповільнених рухів однієї точки (поступального руху тіла) у разі механічної системи точок. Це було значним кроком уперед, оскільки дозволило вивчати обертальні рухи твердого тіла. Гюйгенс ввів у механіку поняття про момент інерції тіла щодо осі та визначив так званий «центр хитань» фізичного маятника.

Праці Гюйгенса з механіки з'явилися продовженням досліджень Галілея і були широко використані Ньютоном, який вважав основну роботу Гюйгенса «Маятниковий годинник» чудовою.

Завершення побудови основ сучасної механіки повільних (порівняно зі швидкістю світла) рухів було зроблено великим англійським математиком та механіком І. Ньютоном (1643-1727), який



у своїй книзі «Математичні начала натуральної філософії» дав цілком сувору і досить повну систему законів класичної механіки. Ньютон визначає раціональну механіку як вчення про рухи, вироблених будь-якими силами, і про сили, необхідні для виробництва будь-яких рухів.

Ньютону належить відкриття двох

найважливіших законів механіки: закону дії та протидії та закону всесвітнього тяжіння. Закон рівності дії та протидії дозволяє вивчати рухи механічних систем точок та досліджувати найбільш природним методом закони невільних рухів. Закон всесвітнього тяжіння розширив межі застосування механіки та дав наукову основу для обробки астрономічних спостережень та теоретичних розрахунків рухів небесних тіл.

Основний закон механіки (другий закон Ньютона) було сформульовано Ньютоном, на відміну робіт попередніх вчених, у диференційної формі. Механічні завдання, вирішені Галілеєм, перетворилися після досліджень Ньютона на прості окремі випадки.



Варіньон Пьер (1654-1722) Французький механік і математик. В трактаті “Проект нової механіки” (1687) він вперше показав статику твердого тіла на площині, яка була основана на правилі паралелограма сил, тобто в XVII ст. правило паралелограма сил стає загальною аксіомою класичної механіки. В його “Новій механіці або статиці” (1725) систематично викладене вчення про додавання і розкладання сил, про моменти сил, що майже не змінилося в наш час.

Систематичне застосування методів аналізу нескінченно малих до завдань механіки було проведено вперше з усією послідовністю великим математиком та механіком Леонардом Ейлером (1707–1783).

Застосування в механіці геометричного методу Евкліда вимагало великого мистецтва, і вирішення кожної нової задачі мало значні труднощі. Аналітичний метод у багатьох випадках полегшує отримання вихідних рівнянь руху та дозволяє провести рішення найкоротшим та найпростішим шляхом.



На зорі розвитку диференціального та інтегрального обчислень Ейлер першим оцінив найбільшу могутність нового математичного методу для завдань теоретичної механіки. Теорія звичайних диференціальних рівнянь є цілком адекватний апарат пізнання сутності

великого класу механічних рухів. Саме тому Ейлеру у своїх роботах вдалося розсунути межі механіки до меж, про які в ті роки вчені навіть не мріяли.

Великий вплив в розвиток теоретичної механіки надав російський учений, поет, філософ та інженер М. У. Ломоносов (1711-1765). Знайдені їм конкретні результати у сфері вивчення механічних рухів відкрили нову сторінку наукових досліджень.

Ломоносов добре розумів, що зміна механічного руху відбувається за допомогою активної передачі від одного тіла до іншого. По Ломоносову, пояснення основних якісних ознак тіл потрібно шукати у нечутливих фізичних частинках (атомах), що становлять тіла природи. Тяжіння, сила інерції, форма і рух цих частинок визначають загальні, інтегральні властивості тіл. Головне завдання науки Ломоносов бачив у тому, щоб пояснювати різноманітність явищ і законів природи з руху та взаємодії найдрібніших частинок матерії.



У 1743 році французький енциклопедист і математик Жан Лерон Д'аламбер (1717-1783) запропонував прямий та загальний метод вирішення задач динаміки, який називають тепер принципом Даламбера. За допомогою цього принципу можна скласти рівняння для будь-якої задачі руху невідомої механічної системи і, отже, труднощі аналізу механічних завдань значною мірою звести до труднощів інтегрування диференціальних рівнянь. У тих випадках, коли потрібно знайти прискорення системи тіл, завдання зводиться до вирішення системи алгебраїчних рівнянь і, отже, вирішується порівняно легко.



Аналітичний метод вирішення основних завдань механіки отримав дуже широкі узагальнення у наукових дослідженнях великого французького вченого Жозефа Луї Лагранжа (1736-1813). У книзі Лагранжа "Аналітична механіка" всі основні результати отримані на основі одного загального методу, який називається принципом віртуальних

(можливих) переміщень. Принцип можливих переміщень, покладений Лагранжем в основу механіки, виявився одним із найбільш загальних та плідних методів дослідження механічного руху та рівноваги матеріальних тіл, проте механіка, яка є наукою про природу, не стала головою математичного аналізу.

Завдання, які стосуються теорії пружності, теорії пластичності, гідро- і аеромеханіки, тобто до механіки деформованих тіл, у більшій кількості випадків отримують ясне рішення, якщо з необхідних рівнянь класичної механіки твердого тіла взяти ті, які виходять методом можливих переміщень. Аналітичні методи, запропоновані Лагранжем, мають дуже велику спільність, та їх подальший розвиток призвело до встановлення низки диференціальних і варіаційних принципів механіки, у тому числі основні теореми механіки Ньютона виходять за приватних припущеннях.



Одночасно із розвитком аналітичних методів у XIX столітті почали удосконалюватися і геометричні методи дослідження завдань механіки. Так, у книзі французького механіка і геометра Луї Пуансо (1777-1859), що вийшла в 1804 році, «Елементи статики» використаний наочний геометричний метод викладання.

Користуючись геометричними побудовами, Пуансо знаходить всі основні властивості механічних рухів, що розглядаються. Особливо вдалим було застосування геометричного методу завдання про рух твердого тіла навколо нерухомої точки в тому випадку, коли момент зовнішніх сил щодо цієї точки дорівнює нулю. Ця задача була вирішена аналітичним методом ще Ейлером, але геометрична інтерпретація, що надав Пуансо, дозволила уявити цей складний рух так ясно, що дослідження рішення в еліптичних функціях стало майже зайвим.

Розвиток механіки у XX ст. як у нашій країні, так і за кордоном характеризувався створенням наукових шкіл, які вносили нові ідеї у розвиток усіх напрямів теоретичної механіки й створенням її нових розділів. Саме завдяки високому рівню й стрімкому прогресу теоретичних і прикладних досліджень у галузі теоретичної механіки,

досягнутих різними школами, стали можливими успіхи в авіації, ракетній техніці та у ряді інших галузей промисловості, транспорту, будівництва, видатні досягнення в галузі космічних польотів.

У другій половині XX ст. в Україні бурхливий розвиток отримала теоретична механіка, яка є основою для побудови і розвитку механіки суцільного середовища (теорії пружності, теорії пластичності, гідроаеромеханіки та ін.). Дослідження вітчизняних вчених : Г.М. Савіна, М.О. Кільчевського, О.М. Гузя, А.Ф. Улітки, В.Т. Грінченка, М.А.Павловського та ін. – у зазначених галузях належать до золотого фонду світової науки і є провідними в розвитку багатьох фундаментальних проблем і методів сучасної механіки та її численних застосувань у природознавстві і техніці.

Кільчевський Микола Олександрович (1909 – 1979) Відомий вчений в



області механіки та математики. Проклав шлях в дослідженні механічних явищ в теоретичній механіці, механіці пластин та оболонок, тензорному численні, теорії удару, механіці поліагрегатних систем, аналітичній механіці континуальних систем. Ним була узагальнена постановка та методи розв'язання статичних та динамічних трьохвимірних контактних пружних та пружно-пластичних задач; розроблений новий підхід до

аналітичного опису процесів, що супроводжують динамічну контактну взаємодію твердих тіл.

Павловський Михайло Антонович (1942-2004) Павловський М.А.



ввійшов в історію НТУУ «КПІ» як засновник української школи гіроскопістів. Він є відомим вченим в області механіки, систем управління космічними апаратами. Під його керівництвом було розроблене унікальне спорядження для наземних випробувань ракетно-космічного комплексу «Енергія-Буран», а після Чорнобильської аварії – дистанційно керовані роботизовані комплекси для проведення робіт з радіоактивними матеріалами

1.2. Введення у теоретичну механіку. Закони та основні поняття механіки.

Механіка, від грецької μηχανική – наука про машини, мистецтво побудови машин

Механіка вивчає загальні закономірності, що пов'язують рух та взаємодію тіл, що знаходяться в різних станах – твердому, рідкому та газоподібному. Відповідно до цього механіку можна розділити на такі частини:

- ◆ механіка матеріальної точки;
- ◆ механіка абсолютно твердого тіла (теоретична механіка);
- ◆ механіка системи матеріальних точок;
- ◆ механіка суцільного середовища, що включає:
 - теорію пружності;
 - теорію пластичності;
 - гідродинаміку;
 - аеродинаміку;
 - газову динаміку та ін.
- ◆ механіку деформованого твердого тіла (теорія пружності, теорія пластичності, теорія тріщин);
- ◆ механіку іонізованого газу (механіка плазми).

Ці предмети багато хто з Вас може вивчити в майбутньому.

У теоретичній механіці вивчаються рухи матеріальної точки, дискретних систем матеріальних точок та абсолютно твердого тіла. Механіка суцільного середовища – велика частина механіки, присвячена руху газоподібних, рідких і твердих тіл, що деформуються. Тут за допомогою та на основі методів та даних, розвинених у теоретичній механіці, розглядаються рухи таких матеріальних тіл, які заповнюють простір безперервно, суцільно, та відстані між точками яких під час руху змінюються.

Необхідно підкреслити, що механіка ґрунтується лише на найбільш елементарних фізичних властивостях речовини. Схематизуючи фізичні явища, механіка не розглядає молекулярну будову речовини та міжмолекулярні взаємодії.

Теоретична механіка - наука, що вивчає механічний рух матеріальних тіл.

Під **механічним рухом** слід розуміти зміну з часом взаємного становища тіл чи взаємного становища частинок тіла – його деформацію.

У теоретичній механіці вивчаються найзагальніші закономірності механічного руху матеріальних об'єктів.

Отже:

♦ **Механічний рух** – це зміна положення матеріальних об'єктів у просторі з часом.

Прикладами механічного руху:

- у природі є рухи небесних тіл, повітряні та морські течії, рух крапель дощу тощо;
- у техніці – рух літальних апаратів, машин, частин двигунів, машин та механізмів, деформації елементів конструкцій та споруд, рух рідин та газів тощо.

Під **взаємодією** слід розуміти ті дії об'єктів один на одного, результатом яких може з'явитися зміна швидкостей точок тіл або їх деформації, наприклад, взаємні тиски дотичних тіл, взаємодії частинок рідини або газу один на одного і на тіла, що рухаються в них, взаємодії в гравітаційних, електростатичних та електромагнітних полях та ін.

Поняття **простору** та **часу**, їх властивості є базовими для побудови моделей матеріального світу.

Дві основні концепції простору та часу:

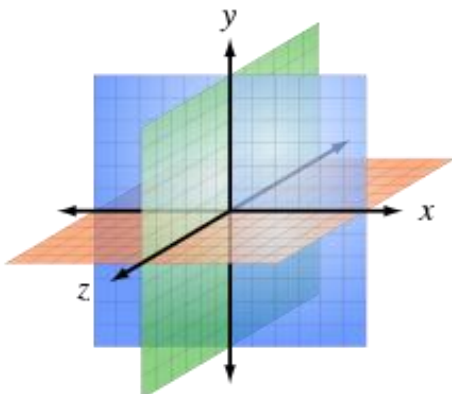
■ Простір і час абсолютні, не залежать від вір і події, представляють окремі сутності, величезні вмістилища (Ньютон). Якщо все зникне, простір та час залишаться.

■ Простір і час є стосунки речей та подій, з зникненням речей та подій зникнуть і простір та час (Лейбніц).

Простір

Простір – первинне поняття, що виникло під час практичної

діяльності. Виникнення поняття простору пов'язані з тим, що матеріальні об'єкти мають форму, розміри, взаємне становище друг щодо друга. матеріальні об'єкти знаходяться близько, далеко, спереду, ззаду (у чомусь, десь).



Як відомо, з теорії відносності якості простору (відстань, розміри) залежить від руху об'єкта, у якому перебуває спостерігач. В курсі теоретичної механіки ми знаходимося в рамках класичної механіки.

Класична механіка заснована на законах Галілея – Ньютона та предметом її вивчення є рух матеріальних об'єктів будь-яких матеріальних тіл (крім елементарних частинок) із швидкостями, малими в порівнянні зі швидкістю світла.

Рух тіл зі швидкостями порядку швидкості світла розглядаються в теорії відносності А. Ейнштейна, а внутрішньоатомні явища та рух елементарних частинок вивчаються у квантовій механіці.

Простір, у яких справедливі закони Галілея – Ньютона, називають *інерційними*.

Ісак Ньютон говорив: «Абсолютний простір за самою своєю сутністю, безвідносно до чогось не будь зовнішнього, залишається завжди однаковим і нерухомим».

Таким чином, він визнавав незалежність простору від матеріальних об'єктів та їхнього руху.

Властивості простору у класичній механіці:

- Тривимірність.
- Однорідність.
- Ізотропність.
- Безперервність.
- Відкритість.
- Нескінченність.

Тривимірність простору означає, що через одну точку простору можна провести лише 3 взаємно перпендикулярні прямі. Цей факт усвідомлений у давнину Аристотелем і всією практикою людини, він є основою природознавства.

Однорідність простору означає однаковість геометричних властивостей його та всіх об'єктів у будь-якому місці простору.

Ізотропність простору говорить про незалежність геометричних властивостей його та об'єктів від напрямку (орієнтації).

Безперервність простору означає повну його заповненість, відкритість – відсутність границь, нескінченність – існування скільки завгодно віддалених точок.

Питання про **скінченність** простору досі вирішується. Існують моделі як кінчених, так і нескінченних просторів, наприклад, модель всесвіту, що розширюється, теорія «великого вибуху».

Час

Час – також первинне поняття. Виникнення поняття часу



пов'язано з тим, що спостережувані під час практичної діяльності людини процеси мають тривалість, періодичність, повторюваність.

Таким чином, поняття часу можна застосовувати тільки за наявності навколишнього світу, що

змінюється, а, отже, і при механічному русі матеріальних об'єктів.

У нерухомому незмінному світі поняття про час не виникає.

Властивості часу у класичній механіці:

- Одномірність.
- Однорідність.
- Безперервність.
- Нескінченність.

Ісак Ньютон в «Математичних началах...» писав: «Абсолютний, справжній математичний час сам по собі та за своєю сутністю, без будь-якого відношення до чогось не будь зовнішньому, протікає рівномірно і називається тривалістю. Відносний, здавалося б або звичайний час є ... міра тривалості, що вживається в повсякденному житті замість справжнього математичного часу, як-то: годину, день ... ».

І далі: «Всі рухи можуть прискорюватися або сповільнюватися, протягом абсолютного часу змінитися не може».

Отже, час у ньютонівській механіці – тече безперервно, рівномірно, однаково у період від минулого до майбутнього і залежить від зовнішніх чинників: властивостей і руху матеріальних об'єктів.

Це розуміння відрізняється від існуючого в даний час уявлення про час у спеціальній теорії відносності А. Ейнштейна.

Моделі матеріальних об'єктів у теоретичній механіці.

Для вивчення та опису механічного руху та взаємодії реальних об'єктів у теоретичній механіці вводяться найпростіші моделі:

- ◆ Матеріальна точка;

- ♦ Абсолютно тверде тіло;
- ♦ Механічна система або система матеріальних точок;
- ♦ Суцільне середовище, що змінюється.

Матеріальна точка – геометрична точка, наділена кінцевою чи нескінченно малою масою. Матеріальною точкою моделюються тіла, розмірами яких нехтують, вважаючи їх розміри малими чи важливими вирішення поставленого завдання. Часто це можливо, якщо відсутні відмінності в рухах окремих точок тіла або в даній конкретній задачі ці відмінності можна знехтувати. Камінь, кинутий нагору можна вважати матеріальною точкою, якщо його розміри будуть малі в порівнянні з відстанню до нього (рисунок 1.1)

Зокрема, при поступальному (без повороту) русі тіла, його точки рухаються з однаковими швидкостями, їх траєкторії конгруентні (однакові). Матеріальною точкою маси d_m є також подумки виділену скільки завгодно малу матеріальну частинку тіла.



Рисунок 1.1 – Приклад матеріальної точки

Абсолютно тверде тіло – тіло, взаємне положення частинок якого залишається незмінним. Модель абсолютно твердого тіла застосовується, коли можна знехтувати деформацією тіла. Іноді абсолютно тверде тіло називають **твердим тілом** (рисунок 1.2).чи просто **тілом**.

Отже, система двох чи кількох точок, якщо відстані між точками не змінюється, може бути названа абсолютно твердим тілом



Рисунок 1.2 - Модель розташування атомів у кристалі твердого тіла

Механічна система або система матеріальних точок - обрана за якоюсь ознакою безліч матеріальних точок і твердих тіл, що взаємодіють між собою.

Якщо тіло не можна прийняти за матеріальну точку, його можна у вигляді системи матеріальних точок. У цьому тіло подумки ділять на нескінченно малі елементи, кожен із яких можна вважати матеріальну точку.

У механіці кожне тіло можна як системи матеріальних точок. Маючи закони руху точки, ми можемо вважати, що ми маємо метод опису будь-якого тіла.

У механіці істотну роль грає поняття абсолютно твердого тіла, яке визначають як систему матеріальних точок, відстані між якими незмінні, за будь-яких взаємодій цього тіла.

За якою ознакою матеріальні об'єкти можна вводити до складу однієї механічної системи? Це може бути різні частини однієї машини, механізму, одного об'єкта. Наприклад, для автомобіля – окремі підшипники, колеса, кузов, ходова частина та інші його частини. Автомобіль загалом, звичайно, також можна вважати механічною системою. Для сонячної системи – окрема планета, кілька планет, окрема комета, метеоритний дощ тощо.

Найважливішою властивістю об'єктів у складі механічної системи є їхня механічна взаємодія. Усі об'єкти у механічній системі повинні взаємодіяти один з одним. Введення до складу механічної системи окремих об'єктів, які не взаємодіють з іншими в цій системі, призведе до неможливості адекватного математичного опису їхньої поведінки.

Іноді тверде тіло є геометрично незмінною механічною системою матеріальних точок. Тому про будь-яку механічну систему можна говорити як про **механічну систему матеріальних точок**.

Питання можливості уявлення тіла чи механічної системи як матеріальної точки вирішується у теоретичній механіці теоремою про рух центру мас. Доводиться, що коли ми представляємо рух тіла чи системи рухом матеріальної точки з масою тіла чи системи, ми

стежимо рухом лише однієї геометричної точки цих об'єктів – центру мас.

Суцільне середовище, що змінюється – модель середовища, що змінюється (деформоване тверде тіло, рідина, газ), коли при вивченні її руху можна знехтувати молекулярною структурою речовини.

Для такої моделі найчастіше вдаються до таких моделей реального суцільного середовища: ідеально пружне тіло, пластичне тіло, ідеальна рідина, в'язка рідина, ідеальний газ та ін.

Залежно та умовами завдання одне й те ж реальне фізичне тіло може бути представлено різними абстрактними моделями. Так щодо руху літака з чисто геометричної точки зору (траєкторія руху, швидкість і час польоту з пункту А в пункт В) його можна розглядати як матеріальну точку. У більшості астрономічних завдань тіла, зірки, планети, комети і т. д. представляють у вигляді матеріальних точок.

При визначенні сил, що діють на фюзеляж і оперення літака з боку повітряного потоку, що набігає, в режимі стаціонарного польоту (сили опору повітря, підйомні сили) можна знехтувати порівняно невеликими деформаціями обшивки і вважати літак твердим тілом, що має певну форму і розміри.

При визначенні сил, що діють на елементи літака з боку повітряного середовища в режимі маневрування, коли змінюється взаємне положення окремих частин (фюзеляж, крила і елерони, закрилки, керма висоти та ін., що змінюють по відношенню до них), літак представляють як механічну систему взаємодіючих тел.

Деформації частин літака, що мало впливають на величину сил, можуть виявитися визначальними для міцності конструкції. Для розрахунку конструкції на міцність та працездатність необхідно визначати внутрішні сили в матеріалі та деформації. Для вирішення цієї задачі слід використовувати модель суцільного середовища, наприклад, модель пружно-пластичного тіла.

Основні розділи теоретичної механіки

Історично, курс теоретичної механіки для інженерів ділиться на три розділи:

- СТАТИКА.
- КІНЕМАТИКА.
- ДИНАМІКА.

СТАТИКА - загальне вчення про сили та умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією цих сил. Завдання статистики:

- ◆ Приведення заданої системи сил до найпростішого вигляду.
- ◆ Визначення умов рівноваги системи сил.

КІНЕМАТИКА - розділ механіки, в якому вивчається рух без урахування причин, що викликали цей рух. Відповідає питанням – як тіло рухається?

Основне завдання кінематики: знаючи закон руху, встановити методи визначення кінематичних характеристик цього руху.

ДИНАМІКА – розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл під впливом сил. Відповідає питанням – чому тіло рухається?

Основні закони механіки

Як і чому рухаються тіла, цікавило філософів і вчених з давніх часів. Так Аристотель вважав, що об'єкти переміщуються в просторі тільки тому, що існує деякий зовнішній вплив на них. Якщо цей вплив припинити, то тіло відразу ж зупиниться. Багато давньогрецьких філософів вважали, що природним станом усіх тіл є спокій.

З приходом Нового часу багато вчених вивчали закони руху в механіці. Слід зазначити такі прізвища, як Гюйгенс, Гук і Галілей. Останній розробив науковий підхід до вивчення явищ природи і, по суті, відкрив перший закон механіки, який, однак, носить не його прізвище.

У 1687 році в світ вийшла наукова публікація, автором якої був англієць Ісак Ньютон. У своїй науковій праці він чітко сформулював основні закони руху тіл у просторі, який разом із законом Всесвітнього тяжіння, сформулювали основу не тільки механіки, а й усієї сучасної класичної фізики.

Закони Ньютона

Їх також називають законами класичної механіки на відміну від релятивістської, постулати якої були викладені на початку XX століття Альбертом Ейнштейном. У першій існують всього три головні закони, на основі яких тримається весь розділ фізики. Вони називаються так:

- ◆ Закон інерції.
- ◆ Закон взаємодій між силою і прискоренням.

♦ Закон дії та протидії.

Чому саме ці три закони є головними? Все просто, будь-яка формула механіки може бути отримана на їх основі, однак, жоден теоретичний принцип не призводить до жодного з них. Названі закони впливають виключно з численних спостережень і експериментів. Їхня справедливість підтверджується надійністю передбачень, отриманих за допомогою них, при вирішенні різних завдань на практиці.

Закон інерції

Перший закон Ньютона в механіці свідчить, що всяке тіло при відсутності зовнішнього впливу на нього буде зберігати стан спокою або прямолінійного руху в будь-якій інерційній системі зв'язу.

Щоб зрозуміти цей закон, слід розібратися з системою зв'язу. Інерційною вона називається тільки в тому випадку, якщо задовольняє викладеному закону. Іншими словами, в інерційній системі не існує фіктивних сил, які б відчували спостерігачі. Наприклад, рухається рівномірно і по прямій лінії система може вважатися інерційною. З іншого боку, система, яка рівномірно обертається навколо осі, є неінерційною через наявність у ній фіктивної відцентрової сили.

Закон інерції встановлює причину, через яку змінюється характер руху. Цією причиною є наявність зовнішньої сили. Зауважимо, що на тіло можуть діяти кілька сил. У такому випадку вони повинні бути складені за правилом векторів, якщо результуюча сила виявиться рівною нулю, то тіло продовжить свій рівномірний рух. Важливо також розуміти, що в класичній механіці немає відмінності між рівномірним рухом тіла і його станом спокою.

Простіше кажучи, суть першого закону Ньютона можна сформулювати так: якщо ми на абсолютно рівній дорозі штовхнемо візок і уявимо, що можна знехтувати силами тертя коліс та опору повітря, то він котитиметься з однаковою швидкістю нескінченно довго.

Зрозуміло, що таких систем, де візок штовхнули, а він покотився без дії зовнішніх сил, насправді не буває. На тіла завжди діють сили, причому компенсувати дію цих сил цілком практично неможливо.

Наприклад, все Землі перебуває у постійному полі сили тяжкості. Коли ми пересуваємось (не важливо, ходимо пішки, їзимо

на машині чи велосипеді), нам потрібно долати безліч сил: силу тертя ковзання та силу тертя ковзання, силу тяжіння.

Другий ньютонівський закон

Пам'ятаєте приклад про візок? У цей момент ми доклали до неї сили! Інтуїтивно зрозуміло, що візок покотиться і незабаром зупиниться. Це означає, що її швидкість зміниться.

У реальному світі швидкість тіла найчастіше змінюється, а чи не залишається постійної. Іншими словами, тіло рухається із прискоренням. Якщо швидкість наростає або зменшується рівномірно, то кажуть, що рух рівноприскорений.

Якщо рояль падає з даху будинку вниз, він рухається рівноприскорено під впливом постійного прискорення вільного падіння g . Причому будь-який дугою предмет, викинутий з вікна на планеті, рухатиметься з тим самим прискоренням вільного падіння.

Другий закон Ньютона встановлює зв'язок між масою, прискоренням та силою, що діє на тіло.

Він говорить про те, що причиною зміни характеру переміщення тіла в просторі є наявність зовнішньої ненульової сили, докладеної до нього. По суті, цей закон є продовженням попереднього. Математичний його запис виглядає наступним чином:

$$F = m \cdot a, \quad (1.1)$$

де m - інерційна маса тіла;

a - це прискорення, що описує швидкість зміни вектора швидкості.

Оскільки m завжди більше нуля, то вектори сили і прискорення спрямовані в одному і тому ж напрямку.

Розглянутий закон застосуємо до величезної кількості явищ у механіці, наприклад, до опису процесу вільного падіння, руху з прискоренням автомобіля, зісковзування бруска по похилій площині, коливання маятника, розтягнення пружинних терезів і так далі. Можна з упевненістю сказати, що він є головним законом динаміки.

Кількість руху та імпульс

Якщо звернеться безпосередньо до наукової праці Ньютона, то можна побачити, що сам вчений другий закон механіки сформулював дещо інакше:

$$F \cdot dt = dp, \text{ де } p = m \cdot V, \quad (1.2)$$

Величина p називається кількістю руху. Багато хто помилково її називає імпульсом тіла. Кількість руху - це інерційно-енергетична характеристика, рівна виробу маси тіла на його швидкість.

Змінити кількість руху на деяку величину dp може тільки зовнішня сила F , що діє на тіло протягом проміжку часу dt . Твір сили на час її дії називається імпульсом сили або просто імпульсом.

Коли два тіла стикаються, то між ними діє сила зіткнення, яка змінює кількості руху кожного тіла, однак, оскільки ця сила є внутрішньою по відношенню до вивчуваної системи двох тіл, то вона не призводить до зміни загальної кількості руху системи. Цей факт має назву закону збереження імпульсу.

Обертання з прискоренням

Якщо сформульований Ньютоном закон механіки застосувати до руху обертання, то вийде такий вираз:

$$M = I \cdot a, \quad (1.3)$$

Тут M - момент імпульсу - це величина, яка показує можливість сили здійснити поворот в системі. Момент сили обчислюється, як витвір векторної сили на радіус-вектор, спрямований від осі до точки програми. Величина I - це момент інерції. Як і момент сили, він залежить від параметрів оберткової системи, зокрема, від геометричного розподілу маси тіла відносно осі. Нарешті, величина - це кутове прискорення, що дозволяє визначити, на скільки радіан в секунду змінюється кутова швидкість.

Якщо уважно подивитися на записане рівняння і провести аналогію між його величинами і показниками з другого ньютонівського закону, то ми отримаємо повне їх тотожність.

Закон дії та протидії

Нам залишилося розглянути третій закон механіки. Якщо перші два, так чи інакше, були сформульовані попередниками Ньютона, а сам вчений лише надав їм стрункий математичний вигляд, то третій закон є оригінальним дітищем великого англійця. Отже, він говорить: якщо два тіла вступають в силовий контакт, то діючі між ними сили рівні за модулем і протилежні за напрямком. Більш коротко можна сказати, що будь-яка дія викликає протидію.

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}, \quad (1.4)$$

де $\bar{F}_{12}$ і $\bar{F}_{21}$ - діючі з боку 1-го тіла на 2-е і з боку 2-го на 1-е сили, відповідно.

Прикладів, що підтверджують цей закон, можна навести безліч. Наприклад, під час стрибка людина відштовхується від поверхні землі, остання штовхає її вгору. Те ж саме стосується ходьби пішохода і відштовхування від стінки басейну плавця. Інший приклад, якщо натиснути рукою на стіл, то відчувається зворотний вплив столу на руку, який називається силою реакції опори.



При вирішенні завдань на застосування третього ньютонівського закону слід не забувати, що сила дії і сила протидії докладена до різних тіл, тому повідомляють їм різні прискорення.

Ісак Ньютон: міфи та факти з життя

На момент публікації своєї основної праці Ньютону було 45 років. За своє довге життя вчений зробив величезний внесок у науку, заклавши фундамент сучасної фізики та визначивши її розвиток на роки вперед.

Він займався як механікою, а й оптикою, хімією та інші науками, непогано малював і писав вірші. Не дивно, що особистість Ньютона оточена безліччю легенд.

Нижче наведено деякі факти та міфи з життя І. Ньютона. Відразу уточнимо, що міф – це не достовірна інформація. Однак ми припускаємо, що міфи і легенди не з'являються власними силами і щось із перерахованого цілком може виявитися правдою.

Факт. Ісак Ньютон був дуже скромною і сором'язливою людиною. Він увічнив себе завдяки своїм відкриттям, проте сам ніколи не прагнув слави і навіть намагався її уникнути.

Міф. Існує легенда, за якою Ньютона осяяло, коли на нього в саду впало яблуко. Це був час чумної епідемії (1665-1667) і вчений

був змушений покинути Кембридж, де постійно працював. Точно невідомо, чи справді падіння яблука було такою фатальною для науки подією, оскільки перші згадки про це з'являються лише в біографіях вченого вже після його смерті, а дані різних біографів розходяться.

Факт. Ньютон навчався, а потім багато працював у Кембриджі. За обов'язком служби йому потрібно було кілька годин на тиждень вести заняття у студентів. Незважаючи на визнані заслуги вченого, заняття Ньютона відвідували погано. Бувало, що на його лекції взагалі ніхто не приходив. Швидше за все це пов'язано з тим, що вчений був повністю поглинений своїми власними дослідженнями.

Міф. У 1689 Ньютон був обраний членом Кембриджського парламенту. Згідно з легендою, більш ніж за рік засідання в парламенті вчений своїми думками вчений взяв слово для виступу лише один раз. Він попросив зачинити вікно, бо був протяг.

факт. Невідомо, як би склалася доля вченого та всієї сучасної науки, якби він послуухався матері та почав займатися господарством на сімейній фермі. Тільки завдяки вмовленням вчителів і свого дядька юний Ісак вирушив вчитися далі замість того, щоб садити буряки, розкидати по полях гній і вечорами випивати у місцевих пабах.

Контрольні питання

- 1.1. Яка історична роль теоретичної механіки?
- 1.2. Сенс терміна «механіка»?
- 1.3. Що вивчає «теоретична механіка»?
- 1.4. Що вивчає статика?
- 1.5. Що означає термін «маса»?
- 1.6. Що означає термін «інертність»?
- 1.7. Що означає термін «простір»?
- 1.8. Властивості простору у класичній механіці?
- 1.9. Властивості часу у класичній механіці?
- 1.10. Що означає термін «час»?
- 1.11. Що розуміємо під «матеріальною точкою»?
- 1.12. Що таке «абсолютно тверде тіло»?
- 1.13. Що означає термін «механічна система»?
- 1.14. Визначення терміна «механічний рух»?
- 1.15. У яких випадках застосовують поняття матеріальної точки?

- 1.16. Що називається системою сил?
1.17. Що вивчає кінематика?
1.18. Що вивчає динаміка?
1.19. Які моделі матеріальних об'єктів у теоретичній механіці?

ТЕМА 2. СТАТИКА

ПЛАН

2.1 Основні визначення та положення статyki. Класифікація сил.

2.2 Аксиоми статyki. Основні типи в'язей та їх реакції.

2.1 Основні визначення та положення статyki.

Класифікація сил

Статика є загальне вчення про сили.

У статистиці вивчаються закони рівноваги абсолютно твердих тіл під дією прикладених до них сил та способи перетворення систем сил на найпростіші, їм еквівалентні.

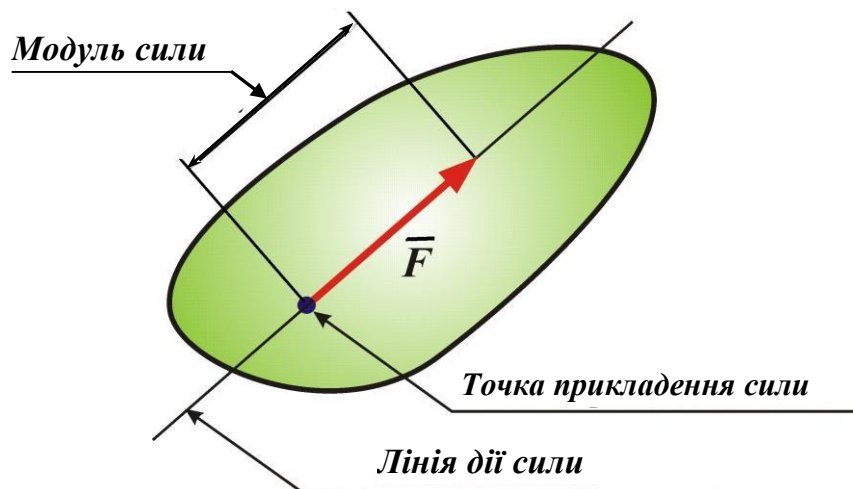


Рисунок 2.1- Визначення сили

Основним поняттям статyki є сила.

Сила – це міра механічної взаємодії матеріальних тіл між собою. Дія сили на тіло визначається трьома параметрами (рисунок 2.1):

- ◆ чисельним значенням;
- ◆ напрямком вздовж лінії дії;

♦ точкою прикладення..

Сила є векторною величиною. Силу позначають великими літерами латинського алфавіту - $\vec{F}$, $\vec{Q}$, і т.п. Цими ж літерами, але без рис, позначають модулі цих сил - F , Q , Розмірність сили у системі СІ - Ньютон (Н)) $[1\text{Н} = 1 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}]$ в технічній системі одиниць - кілограм сили (кґс), причому $1\text{кґс} = 9,81\text{Н}$. У техніці широко використовується кілоньютон: $1\text{кН} = 10^3\text{Н}$.

Точкою прикладення сили називається та матеріальна частинка тіла, до якої сила безпосередньо додана (точка А на рисунку 2.1).

Лінія дії сили - пряма «а – а» (рисунок 2.1), вздовж якої спрямований вектор, що зображує цю силу.

Класифікація сил

Сили (або системи сил), які діють тіло, ділять на:

- зовнішні (рисунок 2.2а);
- внутрішні (рисунок 2.2б).

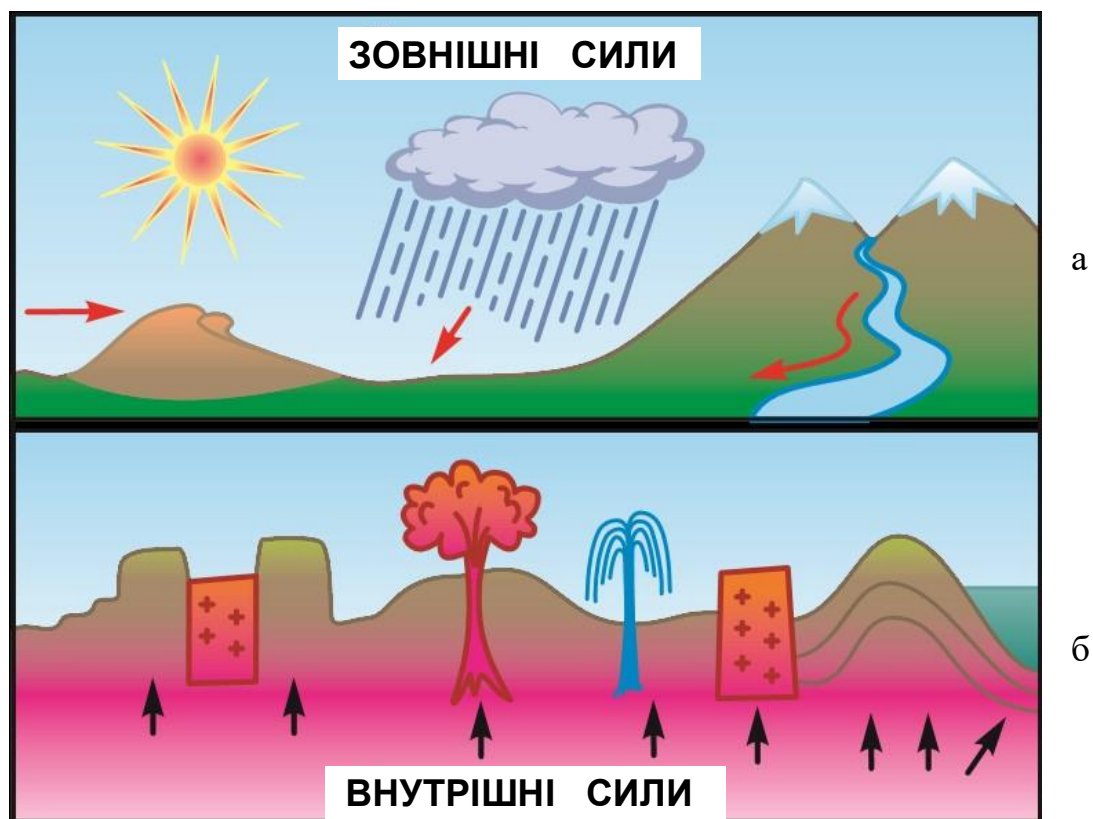


Рисунок 2.2 – класифікація сил: а – зовнішні, б – внутрішні сили.

Сили, що діють на частинки тіла з боку інших матеріальних тіл, називають **зовнішніми**, а з боку інших частинок цього тіла – **внутрішніми** силами.

Зовнішні сили бувають:

- активні;
- реактивні.

Активні сили викликають рух тіла.

Реактивні прагнуть протидіяти переміщенню тіла під впливом зовнішніх сил.

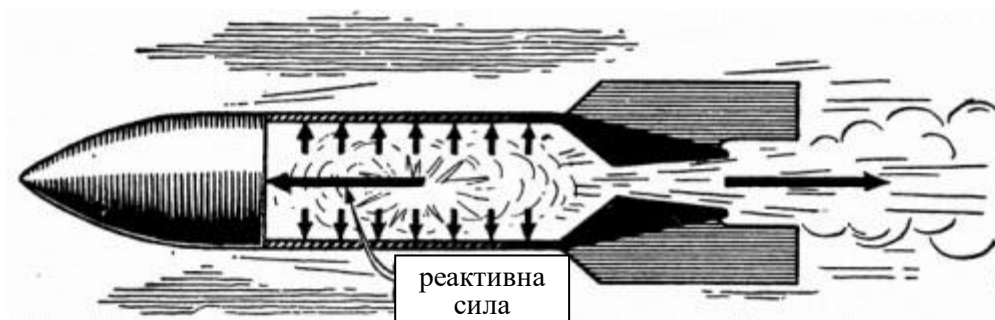


Рисунок 2.3 – Ракета, що рухається під дією реактивної сили

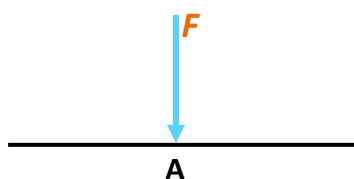
Внутрішні сили з'являються під впливом зовнішніх сил.

Класифікацію зовнішніх сил проводять за декількома ознаками.

За способом застосування розрізняють сили:

- ♦ зосереджені;
- ♦ розподілені.

Зосереджені сили передаються на елементи споруди через невеликі майданчики та умовно вважають, що вони додані у точці. До таких сил належить, наприклад, тиск гідрометричної лебідки на міст.



Одиницею вимірювання зосереджених сил обов'язкової до застосування на даний час міжнародної системи одиниць СІ є ньютон (Н) і кратні йому одиниці: кілоньютон $1\text{кН} = 10^3\text{Н}$, мегаНьютон $1\text{мН} = 10^6\text{ Н}$ та ін.

Розподілені навантаження передаються спорудженням через певну площу і вимірюються в одиницях сили, віднесеної до одиниці

площі – Н/м². До таких навантажень відносяться тиск снігу на покрівлю, тиск води на щит водозливу з тонкою стінкою і т. п. При розрахунку багатьох елементів конструкції розподілену на площу навантаження, як показано на рисунку 2.4, замінюють навантаженням, що відноситься до одиниці довжини елемента (балки).

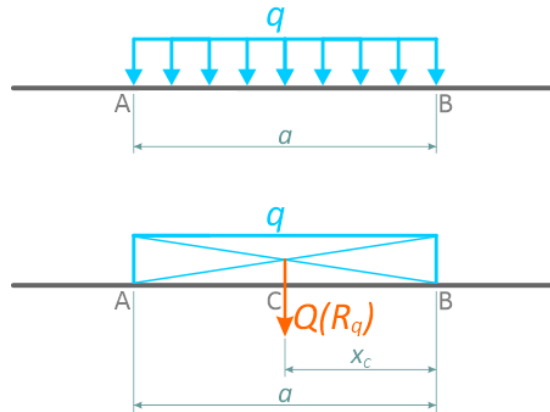


Рисунок 2.4 – Розподілене навантаження

В цьому випадку інтенсивність навантаження на одиницю довжини визначається добутком інтенсивності розподіленого навантаження q на довжину балки ℓ (в даному випадку a) і тому вимірюється в одиницях сили, віднесеної до одиниці довжини, наприклад Н/м.

$$Q(R_q) = q \cdot a, \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м} = \text{Н} \right]$$

По тривалості дії на спорудження розрізняють навантаження:

- ♦ постійні;
- ♦ тимчасові.

Постійним називається навантаження, яке діє безперервно протягом усього терміну служби споруди, наприклад, власна вага конструкції.

Тимчасове навантаження має обмежену тривалість дії, наприклад, вага снігу і т. п. Зауважимо, що в опорі матеріалів власна вага об'ємних елементів вважається силою зосередженою, прикладеною в центрі тяжкості об'єму, а власну вагу подовжених

елементів (балок) вважають розподіленою вздовж поздовжньої осі елемента .

Для того щоб зробити розрахунок якоїсь споруди, спочатку необхідно скласти так звану розрахункову схему і вже для неї проводити всі необхідні обчислення. Так, на рисунку 2.5 показана реальна балка (вгорі) та відповідна їй розрахункова схема (внизу). Схематично кожна балка зображується у вигляді однієї осьової лінії з ідеалізованими опорами. При складанні розрахункових схем допускаються деякі відступи від дійсних умов роботи конструкції. Вважається, наприклад, що балка, що вільно лежить, закріплена на кінцях шарнірами, в яких немає тертя; навантаження, що діє на балку, передається на вісь.

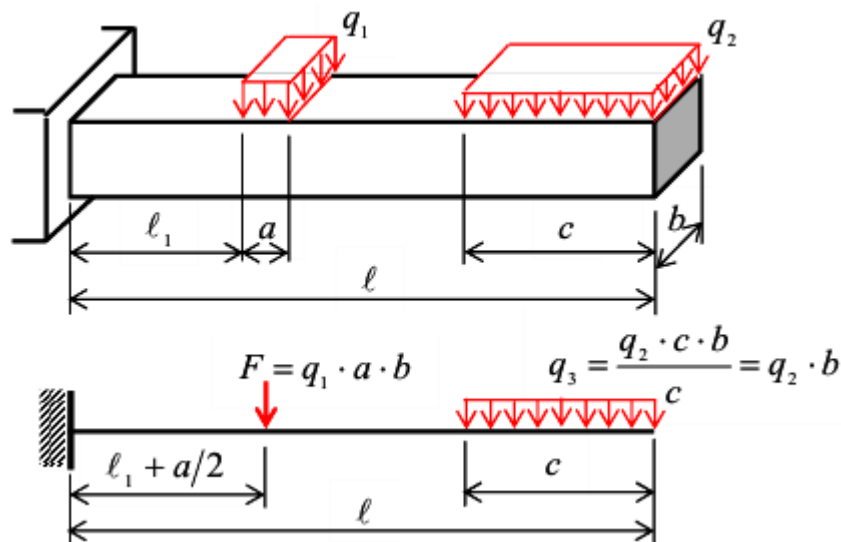


Рисунок 2.5 - Реальна балка та відповідна їй розрахункова схема

Проекції сили на осі координат

Сила у тривимірному просторі

Нехай ми маємо декартову систему координат $Oxyz$ (рисунок 2.6). Та нехай $\bar{i} \bar{j} \bar{k}$ – одиничні вектори, спрямовані вздовж її осей Ox , Oy та Oz , відповідно.

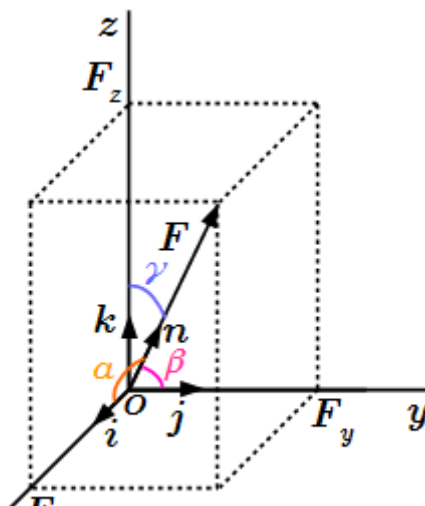


Рисунок 2.6 - Сила у тривимірному просторі

Нехай F_x, F_y, F_z – проекції вектора сили $\vec{F}$ на осі координат. Тоді розкладання сили $\vec{F}$ на складові вздовж координатних осей має вигляд:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}, \quad (2.1)$$

Абсолютне значення (модуль) сили:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (2.2)$$

Введемо одиничний вектор $\vec{n}$, спрямований уздовж вектора сили $\vec{F}$. Тоді

$$\vec{F} = F \cdot \vec{n}, \quad (2.3)$$

Ця формула виражає той факт, що вектор сили можна задати, вказавши її модуль F і напрямок $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ має три проекції на осі координат: $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Оскільки його довжина дорівнює одиниці: $|\vec{n}| = 1$, то вони пов'язані співвідношенням:

$$n^2 = (\vec{n} \cdot \vec{n}) = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad (2.4)$$

Тобто одиничний вектор $\vec{n}$ має лише дві незалежні компоненти. Таким чином, для завдання вектора сили $\vec{F}$ потрібно знати три величини:

- ♦ або три проекції на осі координат F_x, F_y, F_z ;
- ♦ або модуль F та напрямок $\vec{n}$, який задається двома незалежними величинами.

Введемо кути α , β , γ між вектором сили $\vec{F}$ і осями координат Ox , Oy , та Oz . Тоді проекції сили на осі координат визначаються за формулами:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha; F_y = F \cdot \cos\beta; F_z = F \cdot \cos\gamma, \quad (2.5)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}, \quad (2.6)$$

Косинуси кутів α , β , γ називаються **напрямними косинусами**.

Напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора $\vec{F}$ – це косинуси кутів між вектором $\vec{F}$ – і осями координат. Вони є Проекціями одиничного вектора $\vec{n}$, співспрямованого з $\vec{F}$:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad (2.7)$$

і пов'язані співвідношенням:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (2.8)$$

Сила на площині (рисунок 2.7)

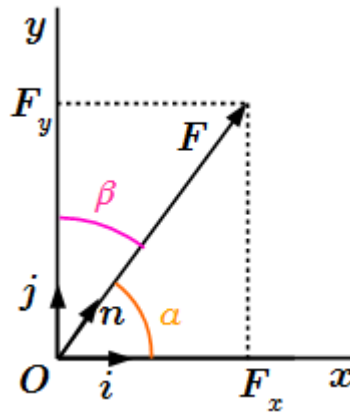


Рисунок 2.7 - Вектор сили $\vec{F}$ та її проекції на осі плоскої системи координат

Результати, наведені вище, можна застосувати і для плоскої декартової системи координат Oxy . У цьому випадку маємо:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j}, \quad (2.8)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (2.9)$$

$$\bar{F} = F \cdot \bar{n}; \quad |\bar{n}| = 1, \quad (2.10)$$

$$\bar{n} = (n_x, n_y) = (\cos\alpha, \cos\beta), \quad (2.11)$$

$$F_x = F \cdot \cos\alpha; \quad F_y = F \cdot \cos\beta, \quad (2.12)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad (2.13)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1, \quad (2.14)$$

Оскільки $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Останнє рівняння є відомою тригонометричною формулою:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad (2.15)$$

Для завдання вектору сили $\bar{F}$, необхідно знати дві незалежні величини:

- ♦ або проєкції вектору на осі координат F_x, F_y ;
- ♦ або модуль F та напрямок $\bar{n}$, який задається одним кутом α .

Проекція сили на вісь

Проекція сили на вісь x – це алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між позитивним напрямом осі та вектором сили (тобто це відрізок, що відкладається силою на відповідні осі (рисунок 2.8):

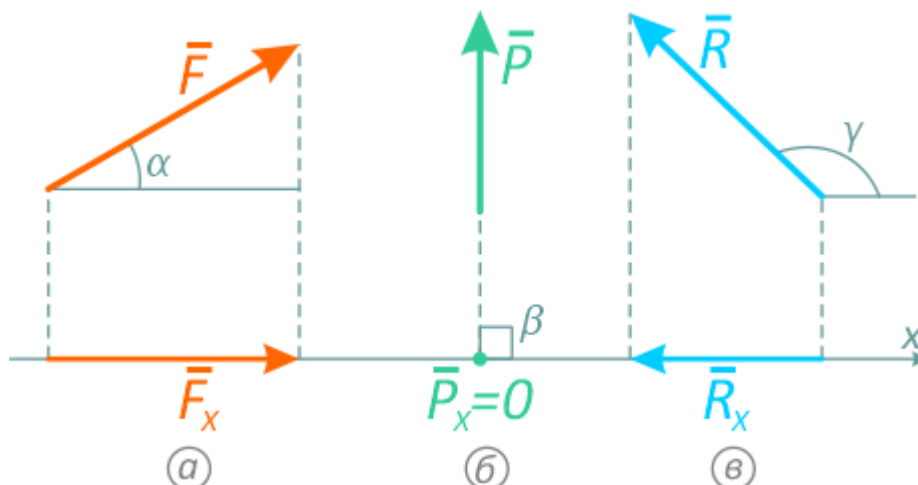


Рисунок 2.8 – Проекція сили на вісь x

$$F_x = F \cdot \cos\alpha;$$

$$P_x = P \cdot \cos\beta = P \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$R_x = R \cdot \cos\gamma = -R \cdot \cos(180^\circ - \gamma).$$

Проекція сили на вісь може бути;

- позитивною (рисунок 2.8а) ($0 \leq \alpha < \pi/2$);
- рівною нулю (рисунок 2.8б), ($\beta = \pi/2$);
- негативною (рисунок 2.8в), ($\pi/2 < \gamma \leq \pi$).

Проекцію сили на вісь можна уявити як тінь, що відкидає вектор сили на відповідну вісь від нескінченно далекого джерела світла.

2.2 Аксиоми статички. Основні типи в'язей та їх реакції

У статиці вирішуються два основні завдання:

- ◆ завдання про перетворення сил;
- ◆ завдання про рівновагу сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

Завдання про перетворення сил полягає у вирішенні наступного питання: як цю систему сил замінити іншою системою сил, їй еквівалентною?

Із завданням такого типу ми неодноразово зустрічалися в курсі фізики, коли потрібно скласти дві сили або розкласти цю силу на складові двох заданих напрямків. Ця сила та її складові – суть дві еквівалентні системи сил. Найчастіше потрібно знайти найпростішу систему сил, еквівалентну даної.

У задачі про рівновагу виводяться умови, яким повинні задовольняти діючі сили, щоб тверде тіло під їхньою сукупною дією могло перебувати в стані рівноваги.

Під час вирішення цих завдань керуються **аксіомами статички** – деякими основними вихідними положеннями, справедливості яких приймається без доказів. Ось ці аксіоми.

Аксиоми статички

Аксиоми статички технічної та теоретичної механіки узагальнюють багатовіковий досвід спостереження фізичних явищ.

Частина аксіом (1 та 5) є основними законами класичної механіки Галілея та Ньютона. Інша частина (2, 3, 4) відноситься до законів перетворення сил, які діють абсолютно тверде тіло, і застосовується тільки до завдань теоретичної механіки. За своєю суттю вони висловлюють собою той факт, що дія сили на тіло є ковзним вектором.

▲ №1. Аксіома інерції (закон інерції Галілея)

Існують такі системи відліку, у яких будь-яка матеріальна точка, яка не взаємодіє з іншими тілами та точками, рухається прямолінійно та рівномірно. Зокрема, якщо тіло знаходилося у спокої у певний момент часу, воно буде знаходитися у спокої і в наступні моменти.

Такі системи відліку називаються **інерційними**. У механіці, якщо це не обумовлено, під системою відліку мається на увазі саме інерційна система відліку. Аксіому інерції іноді формують так.

● №1'. Аксіома інерції (рисунок 2.9)

В інерційній системі відліку, під дією сил, що взаємно врівноважуються, матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно, а тіло, що спочатку знаходилося в спокої, продовжує знаходитися в спокої і в наступні моменти часу.

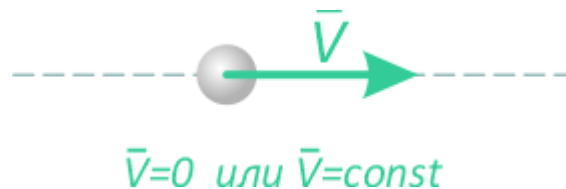


Рисунок 2.9 - Аксіома інерції

▲ №2. Аксіома рівноваги двох сил (рисунок 2.10)

Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, є врівноваженими тоді і лише тоді, коли вони рівні за модулем, спрямовані в протилежні сторони та їх лінії дії збігаються. Іншими словами: «абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил тоді і тільки тоді, коли ці сили дорівнюють модулю, діють по одній прямій і спрямовані в протилежні сторони» (рисунок 2.10).

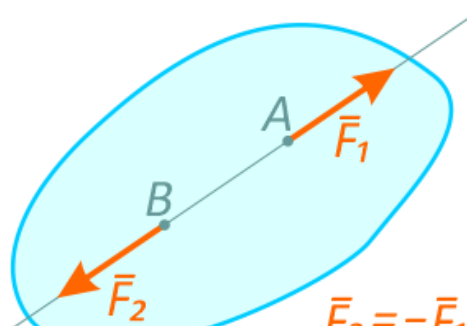


Рисунок 2.10 - Аксиома рівноваги двох сил

Таким чином, для рівноваги двох сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, прикладених до твердого тіла необхідно і достатньо щоб вони були рівні по модулю і направлені по одній прямій в протилежні сторони.

Дана аксіома визначає найпростішу систему сил, що врівноважується, прикладених до твердого тіла, сили рівні по модулю і направлені в протилежні сторони, тобто $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Слід зазначити, що сили мають бути спрямовані вздовж однієї лінії дії.

Для врівноваженої системи сил використовуватимемо позначення $\sim$ (символ еквівалентності нулю).

Тоді зміст першої аксіоми запишеться так: $(\vec{F}_{1A}, \vec{F}_{1B}) \sim 0$.

▲ №3. Аксиома приєднання і виключення сил, що врівноважуються (рисунок 2.11)

Кінематичний стан твердого тіла не зміниться, якщо до системи сил, що діє на нього, додати або відібрати врівноважену систему сил.

Іншими словами, дія системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо додати до неї або відібрати від неї систему сил, що врівноважується.

Наслідок із третьої аксіоми: не змінюючи дію сили на тверде тіло точку прикладення сили можна переносити по лінії її дії

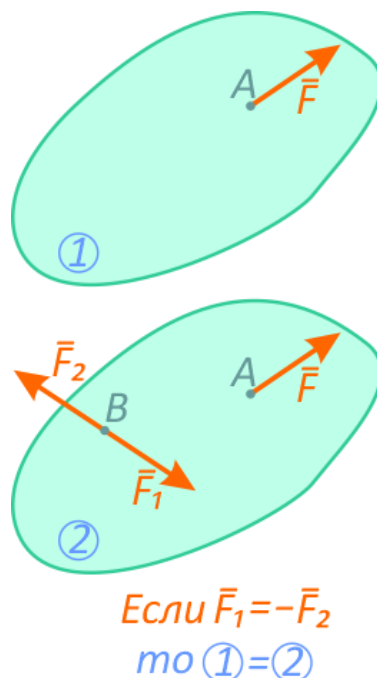


Рисунок 2.11 – Аксиома приєднання та виключення сил, що врівноважуються

Наслідок із третьої аксіоми: не змінюючи дію сили на тверде тіло точку застосування сили можна переносити по лінії її дії.

Припустимо, що до твердого тіла у точці А прикладена сила $\vec{F}$ (рисунок 2.12).

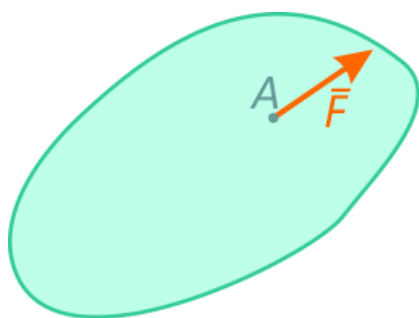


Рисунок 2.12 – До аксіоми №3.

Доведемо, що дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо точку прикладення сили перенести по лінії її дії.

Покажемо лінію дії сили $\vec{F}$ та виберемо на лінії дії цієї сили довільну точку В.

Прикладемо в точці В дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що взаємно врівноважуються, рівні за модулем силою $\vec{F}$ і направлені по прямій АВ. У сили $\vec{F}_1 = \vec{F} = -\vec{F}_2$ (рисунок 2.13).

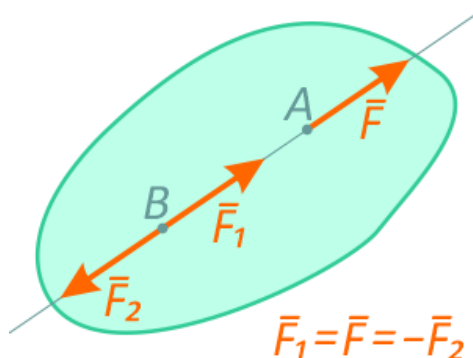


Рисунок 2.13 – Сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, що взаємно врівноважуються.

Згідно з аксіомою №3 система трьох сил сили $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ еквівалентна силі $\vec{F}$.

Але сили $\vec{F}$ та $\vec{F}_2$ рівні по модулю і спрямовані по одній прямій у протилежні сторони.

З цієї ж аксіоми №3 їх можна відкинути як взаємно врівноважені.

В результаті на тверде тіло діятиме одна сила $\vec{F}_1$, що дорівнює силі $\vec{F}$ та еквівалентна їй, але прикладена в точці В (рисунок 2.14).

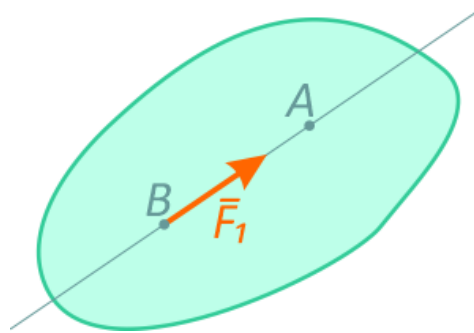


Рисунок 2.14 – Еквівалентна сила $\vec{F}_1$

Таким чином, у статиці твердого тіла силу можна розглядати як ковзний вектор, який визначається модулем, лінією дії та напрямком.

Дане слідство застосовується тільки для сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

В інженерних розрахунках ним можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги будь-якої жорсткої конструкції і не розглядаються внутрішні напруження і деформації, що виникають у ній.

▲ №4. Аксіома паралелограма сил

Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодіючу, яка проходить через цю точку і дорівнює їх геометричній сумі.

Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці, зображується діагоналлю паралелограма побудованого на цих силах.

Нехай до твердого тіла у точці А прикладені сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ (рисунок 2.15).

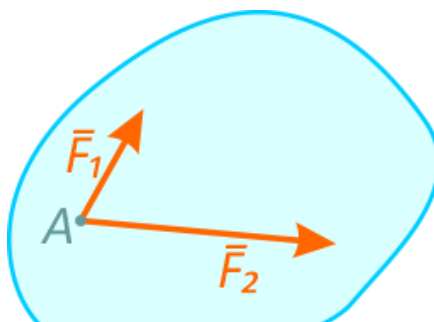


Рисунок 2.15 – Схема прикладення сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$.

Побудуємо паралелограм сил і визначимо їх діючу, що позначається буквою $\vec{R}$ (рисунок 2.16).

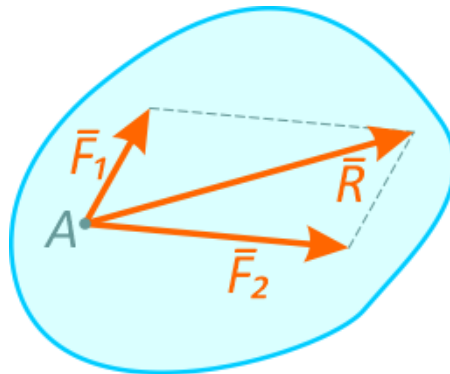


Рисунок 2.16 – Паралелограм сил.

Побудову паралелограма можна замінити побудовою трикутника сил:

- * з точки А відкладаємо вектор $\vec{F}_1$, від стрілки якого відкладаємо вектор $\vec{F}_2$;

- * з'єднавши початок вектору $\vec{F}_1$ з кінцем вектора $\vec{F}_2$, отримаємо вектор рівнодіючої $\vec{R}$ (рисунок 2.17).

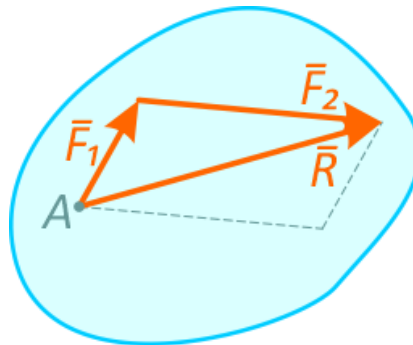


Рисунок 2.17 – Трикутник сил.

- Аксиому №4 можна сформулювати інакше: «Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює геометричній сумі цих сил і прикладена в тій же точці».

Правила паралелограма та трикутника можна узагальнити на систему сил, прикладених в одній точці.

Застосовуючи послідовно правило трикутника можна побудувати багатокутник кількох сил, рівнодіюча якого є замикаючий стороною багатокутника сил (рисунок 2.18).

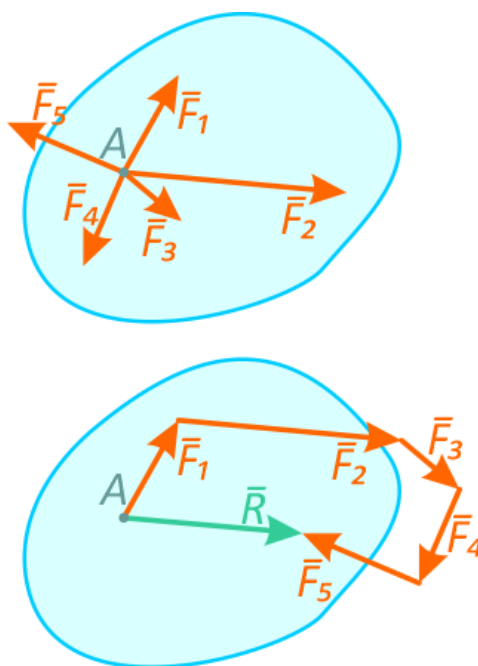


Рисунок 2.18 – Багатокутник сил.

Таким чином, рівнодіюча система схожих сил дорівнює їхній геометричній сумі і прикладена в тій же точці.

▲ №5. Аксиома рівності дії та протидії (3-й закон Ньютона)

Будь-якій дії відповідає рівна та протилежно спрямована протидія (рисунок 2.19).

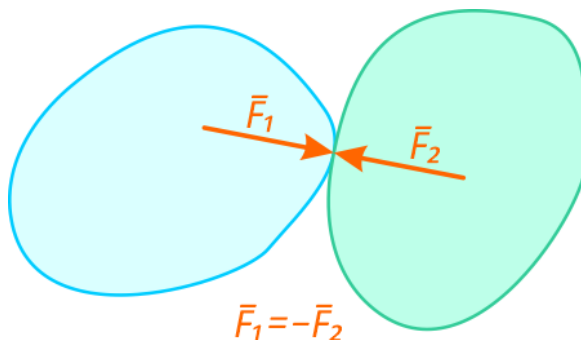


Рисунок 2.19 – До аксіоми №5.

Сили, з якими два тіла діють один на одного, завжди рівні за модулем і направлені по одній прямій у протилежні сторони.

Тобто, якщо ми візьмемо всі сили, що діють на тіло 2 з боку тіла 1, та об'єднаємо їх із силами, що діють на тіло 1 з боку тіла 2, то отримаємо врівноважену систему сил.

▲ №6. Принцип затвердіння

Якщо тіло, що деформується, знаходиться в рівновазі, то його рівновага не порушиться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

Іншими словами, аксіома про збереження рівноваги сил, прикладених до тіла, що деформується, говорить про те, що рівновага деформованого тіла не порушиться, якщо це тіло затвердіє.

Якщо тіло, що деформується, під дією даної системи сил знаходиться в рівновазі, то воно збереже стан рівноваги і після його затвердіння.

З цієї аксіоми випливає, що умови рівноваги твердого тіла повинні дотримуватися і для тіл, що деформуються.

Однак, умови рівноваги необхідні та достатні для абсолютно твердого тіла можуть бути недостатніми для тіла, що деформується.

Наведемо простий приклад: для рівноваги твердого стержня під дією двох сил прикладених до його кінців необхідно і достатньо щоб ці сили були рівні по модулю та спрямовані вздовж стержня в протилежні сторони.

Для пружної нитки ці умови необхідні але недостатні, т. як нитка перебуватиме в рівновазі за наявності додаткової умови: сили, що діють на неї, повинні бути такими, що розтягують, але не стискають.

Принцип затвердіння дозволяє застосовувати рівняння рівноваги твердого тіла до тіла, що деформуються.

Цим пояснюється широке застосування рівнянь статички твердого тіла в теорії пружності, механіки матеріалів та конструкцій, будівельної механіки та інших механічних дисциплін, наступних за технічною та теоретичною механікою.

В'язі та їх реакції

Визначення та властивості

В'язі – це обмеження на можливі переміщення тіла чи матеріальної точки, викликані взаємодіями з іншими тілами чи точками. Іншими словами: *«В'язю називають тіла, що обмежують свободу переміщення розглянутого тіла»*.

Реакції в'язей – це зусилля, із якими в'язі діють дане тіло (рисунок 2.20).

Тіла в природі бувають:

- ♦ вільними;
- ♦ невільними.

Тіла, свобода переміщення яких нічим не обмежена, називаються **вільними**.

Тіло називається **невільним**, якщо на його переміщення накладено одна або декілька в'язей, тобто якщо його переміщення обмежене іншими тілами.

Одним з основних положень механіки є принцип звільнення від в'язей, згідно з яким невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, що діють на нього, та замінити їх силами – реакціями в'язей.

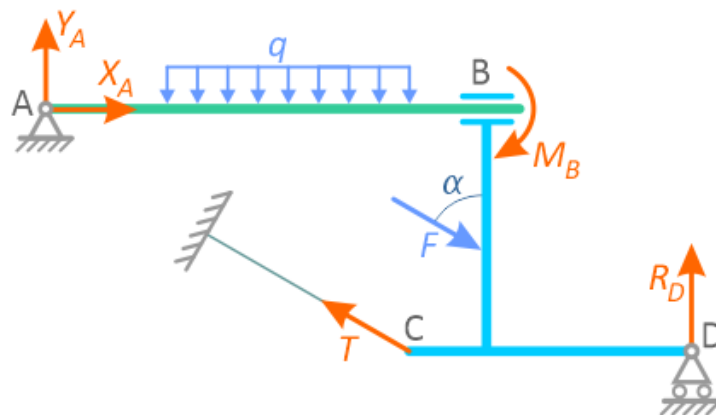


Рисунок 2.20 – Реакції в'язей.

Дуже важливо правильно розставити реакції в'язей, інакше написані рівняння виявляться невірними.

Розглянемо реакції в'язей основних типів, що зустрічаються при розв'язанні задач:

- гладкої поверхні;
- ребра;

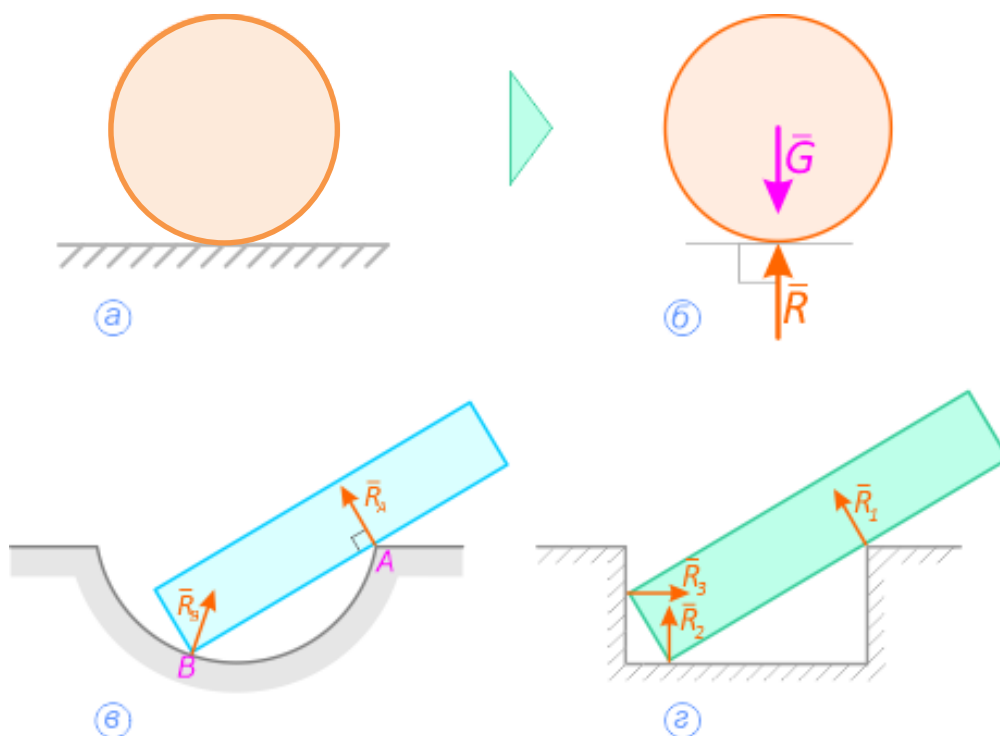
- гнучкої нитки;
- стержня;
- шарнірних опор;
- закріплень,

а також приклади заміни в'язей їх реакціями.

Типи в'язей

▲ Реакції гладкої поверхні та ребра

Нижче наведено приклади заміни в'язей в гладкої поверхні та ребра їх реакціями. На рисунках 2.21 – 2.29 показані приклади заміни реакціями сил, розташованих у площині.



а – тіло вагою $\vec{G}$ на гладкій поверхні;

б – дія поверхні замінено реакцією – силою $\vec{R}$;

в – в точці А в'язь «опорна точка» або ребро;

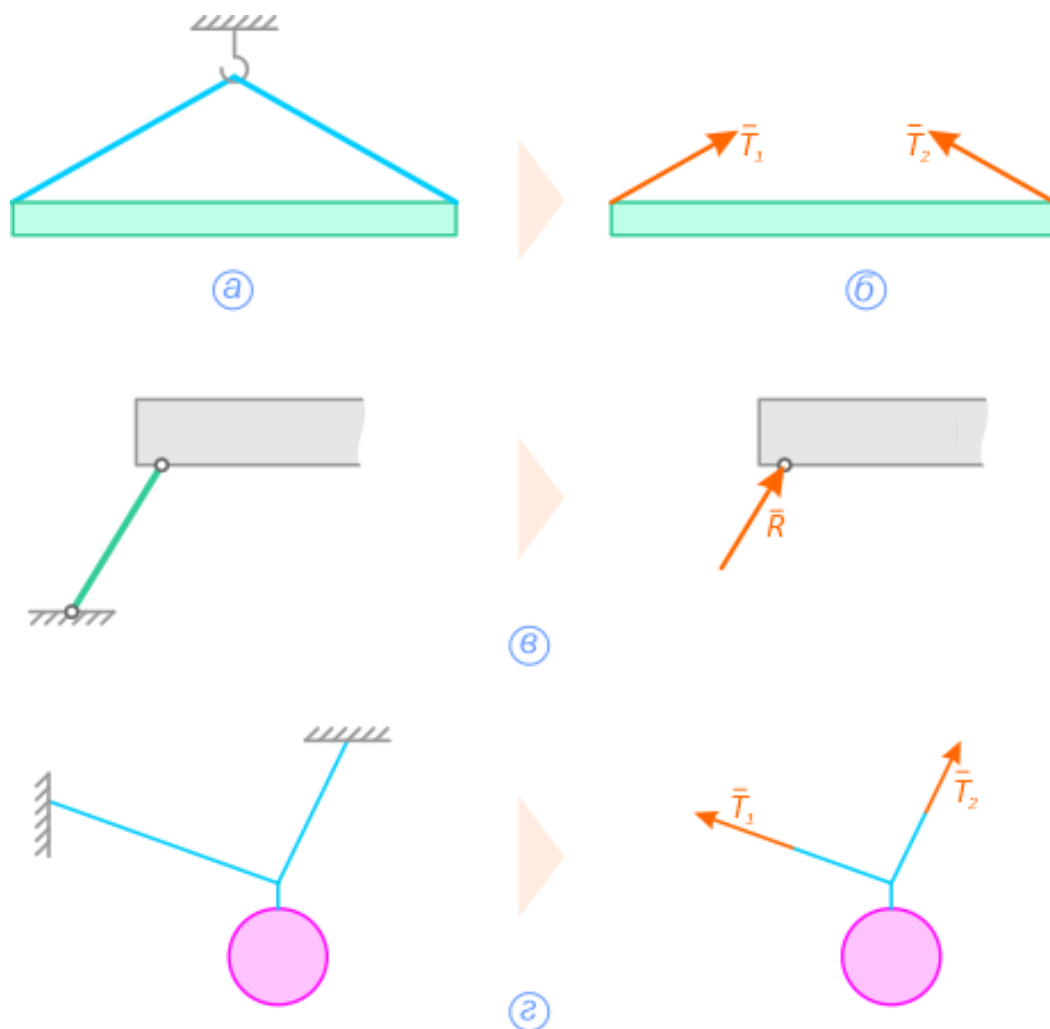
г – реакції спрямовані перпендикулярно площинам, що спирається або опирається.

Рисунок 2.21 – Реакції гладкої поверхні та ребра

Реакція гладкої поверхні завжди спрямована по нормалі до цієї поверхні (рисунок 2.21).

▲ Реакції в'язей нитки та стержня

Реакція «невагомого» троса (нитки, ланцюга, стержня) завжди спрямована вздовж самого троса (нитки, ланцюга, стержня) (рисунок 2.22).



а – балка висить двох тросах;

б – дія тросів замінено силами $\vec{T}_1$ та $\vec{T}_2$;

в – в'язь «ідеальний стержень»;

г – в'язь «ідеальна нитка»

Рисунок 2.22 – Реакції в'язей нитки та стержня

▲ Реакції в'язей шарнірних опор

Шарнірні опори допускають обертання щодо шарніра, тому в них не виникає момент, що обертає.

► **Шарнірно-нерухома опора** може зображуватись по-різному (рисунок 2.23а або 2.23б). Вона може бути замінена або силою R з кутом α (рисунок 2.23в), або двома силами, наприклад: X_A і Y_A (рисунок 2.23г).



Рисунок 2.23 – Шарнірно-нерухома опора

Завжди можна перейти від R і α до X_A та Y_A (і навпаки):

$$X_A = R \cdot \cos \alpha ; \quad Y_A = R \cdot \sin \alpha, \quad (2.16)$$

$$R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad (2.17)$$

► Шарнірно-рухлива опора (рисунок 2.24 а, б, в) допускає (в даному випадку) горизонтальне переміщення та не допускає вертикальне.

Реакція R може бути спрямована тільки по нормалі до опорної поверхні (рисунок 2.24 г).

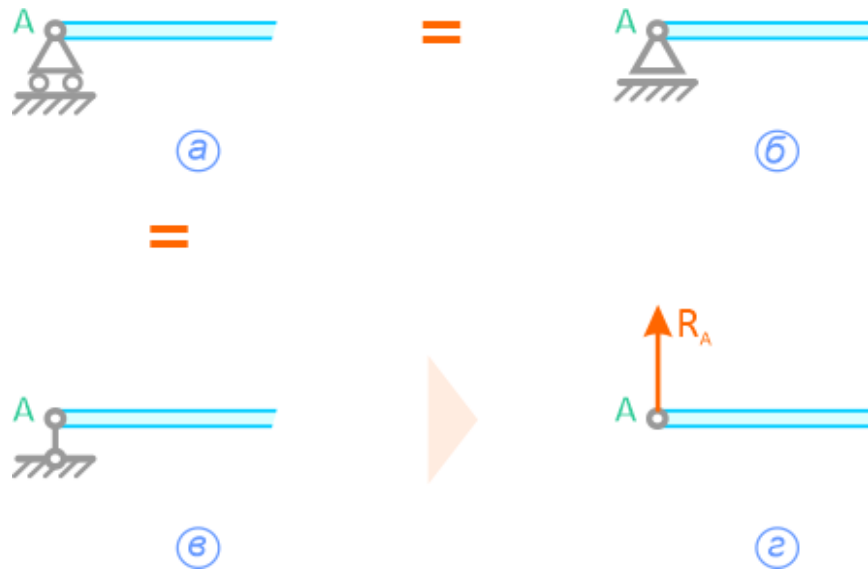


Рисунок 2.24 – Шарнірно-рухлива опора

У наступному прикладі (рисунок 2.25а) в'язі шарнірно-нерухомої опори в точці А і шарнірно-рухомої опори в точці В відкинуті (рисунок 2.25б), а їх дія замінена силами X_A , Y_A і R_B .

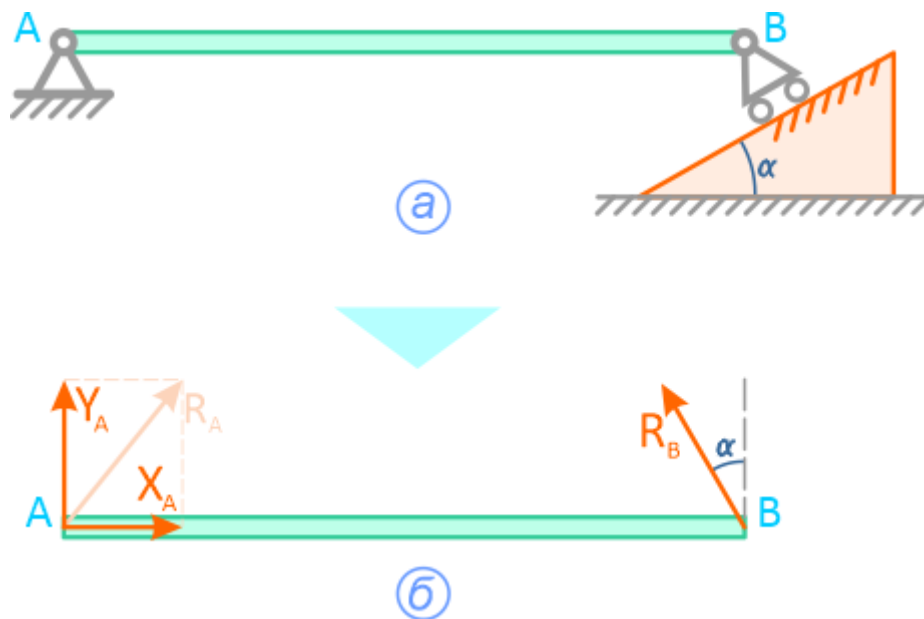


Рисунок 2.25 – В'язі шарнірно-нерухомої та шарнірно-рухомий опор

▲ Реакції зв'язку у закріпленні

Всі види закріплень унеможливають поворот, тому в них завжди виникає в'язь «момент».

З'єднання стержня та втулки в площині (рисунок 2.26) – **ковзаюче закріплення**. Відкинувши втулку – отримуємо дію на стержень сили R_D та моменту M_D .

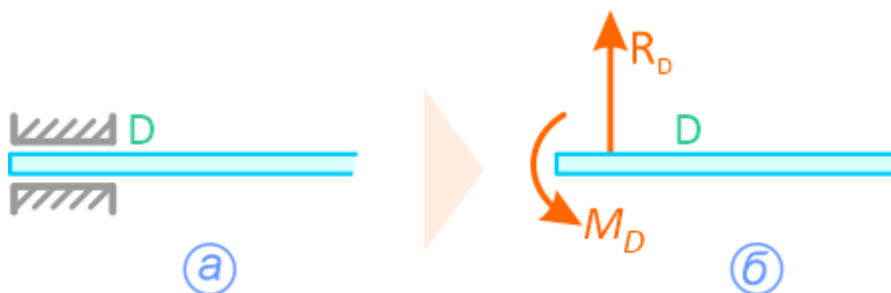


Рисунок 2.26 – Ковзаюче закріплення

На рисунку 2.27а зображено **біковзаюче закріплення**. У площині дана опора допускає поступальне переміщення стержня як по горизонталі, так і по вертикалі, але перешкоджає повороту (площині). Реакцією такої опори буде лише момент M_C (рисунок 2.27б).

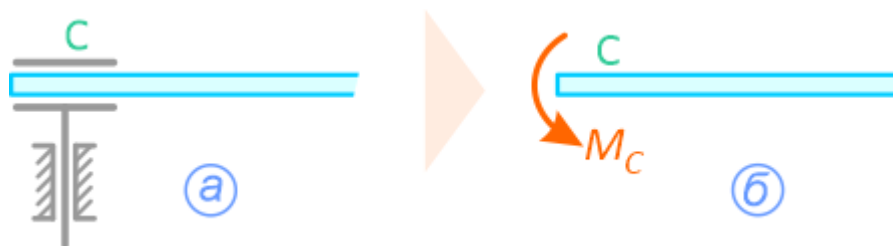


Рисунок 2.27 – Біковзаюче закріплення

Консоль (глухе або жорстке закріплення) не допускає жодного переміщення деталі. Реакцією такої опори є невідома за величиною та напрямком сила R_A з кутом α (або X_A та Y_A) та момент M_A (рисунок 2.28).

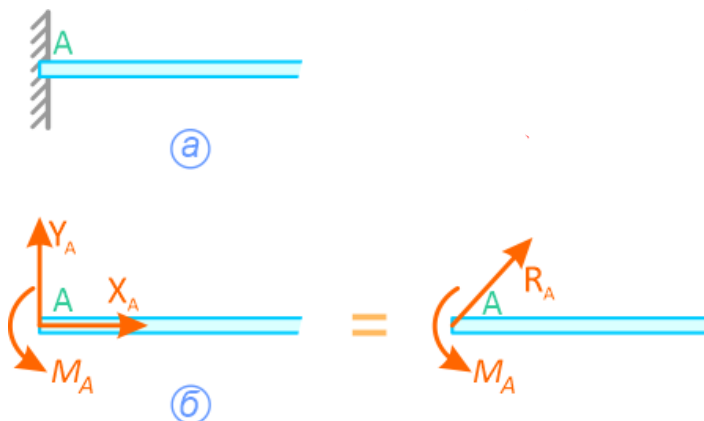


Рисунок 2.28 – Консоль (глухе або жорстке закріплення)

▲ Реакції просторових зв'язків

Тривимірний шарнірно-нерухома опора або **сферичний шарнір** (рисунок 2.22а), замінюється системою сил (рисунок 2.22б) X_A , Y_A та Z_A , тобто силою, невідомою за величиною та напрямком.

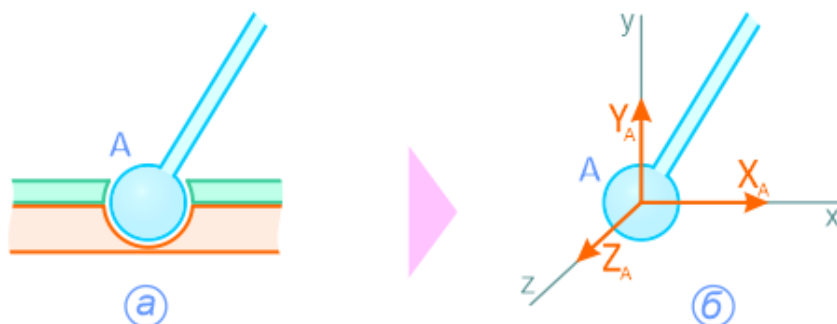


Рисунок 2.29 – Тривимірний шарнірно-нерухома опора
або сферичний шарнір

На рисунку 2.30а показаний вал із колесом, закріплений в опорах:

- * у точці А – підп'ятник або стакан,
- * у точці В – втулка або підшипник.

Дія опор замінено силами X_A , Y_A , Z_A та X_B , Z_B (рисунок 2.30б).

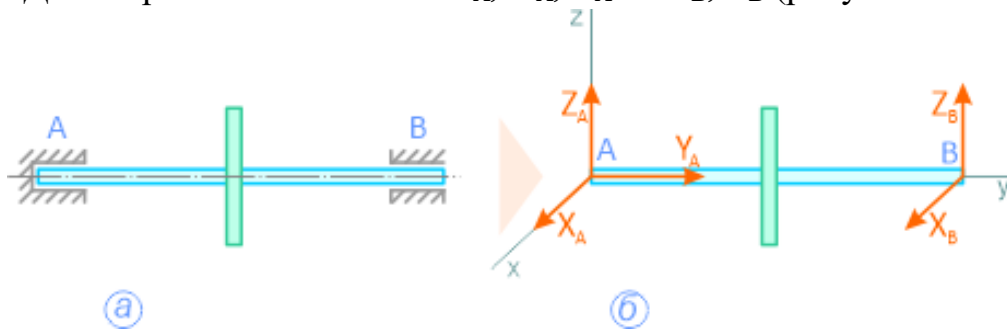


Рисунок 2.23 – Вал с колесом

На наступному рисунку 2.24 показані приклади заміни різних типів в'язей їх реакціями.

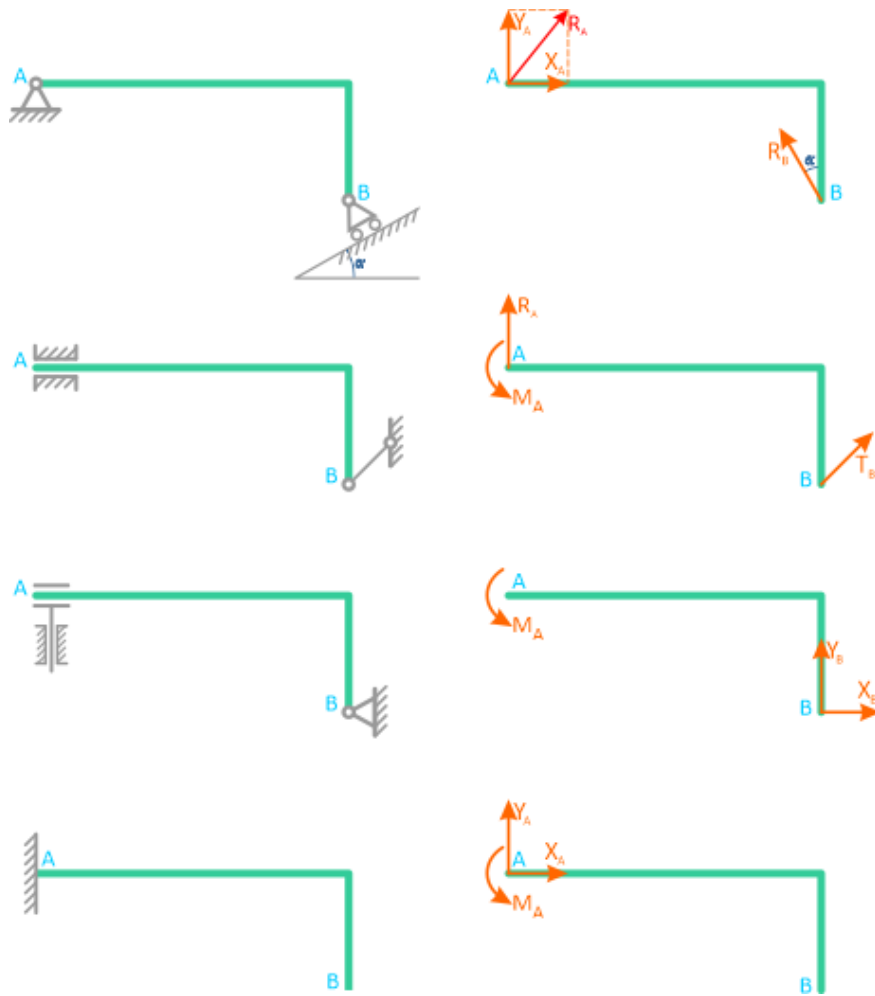


Рисунок 2.24 – Заміни різних типів в'язей їх реакціями.

Тривимірна система, що утримується в рівновазі трьома типами в'язей: ковзаючим закріпленням, шарнірно нерухомою опорою та тросом.

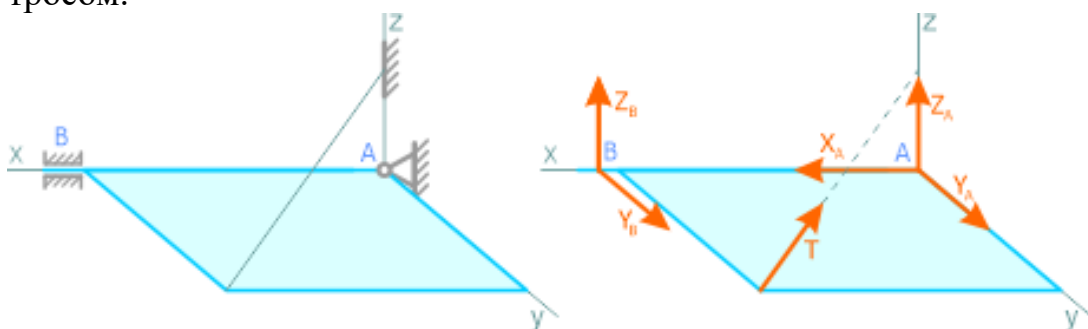


Рисунок 2.25 – Тривимірна система

У загальному випадку просторового навантаження, в глухому закріпленні може виникати до шести реакцій в'язей: три сили та три моменти.

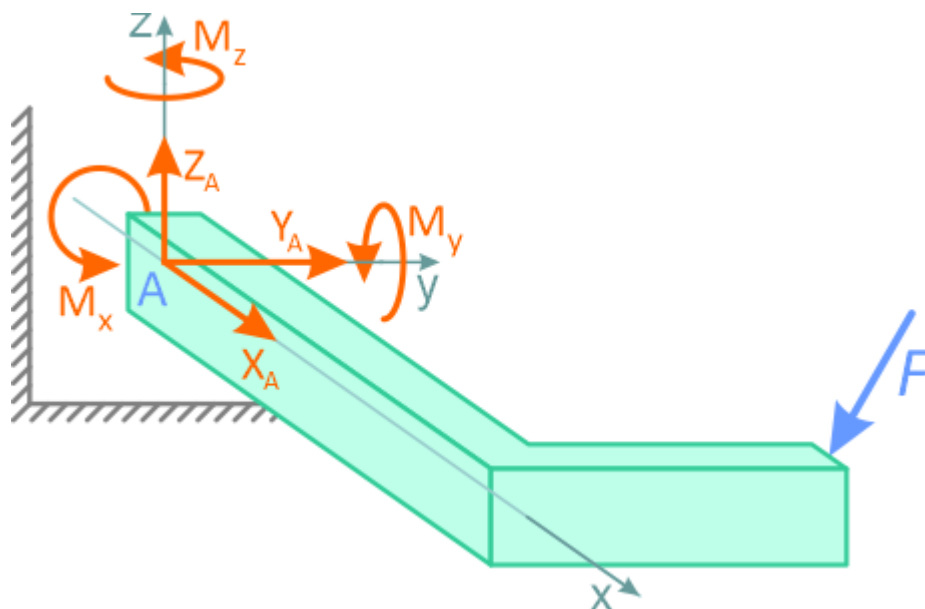


Рисунок 2.26 – Просторового навантаження

Розмір і справжнє напрям сил реакцій зв'язків визначаються з рівнянь рівноваги аналізованої системи.

Для плоскої системи сил складається 3 рівняння:

$$\begin{cases} \sum F(x) = 0, \\ \sum F(y) = 0, \\ \sum M(z) = 0. \end{cases}$$

Для просторової системи – до шести рівнянь статички.

$$\begin{cases} \sum F(x) = 0, \\ \sum F(y) = 0, \\ \sum F(z) = 0, \\ \sum M(x) = 0, \\ \sum M(y) = 0, \\ \sum M(z) = 0. \end{cases}$$

З яких виражаються та розраховуються реакції, що шукаються.

Контрольні питання

- 2.1. Які величини називаються векторними та скалярними?
- 2.2. Що таке сила?
- 2.3. Якими одиницями вимірюється сила у Міжнародній системі (СІ)?
- 2.4. Перелічіть ознаки, що характеризують силу.
- 2.5. Що називається системою сил?
- 2.6. Наведіть приклади зосереджених та розподілених сил.
- 2.7. Що називається рівнодійною системи сил?
- 2.8. Яка сила називається такою, що врівноважується?
- 2.9. Дайте визначення зовнішньої та внутрішньої сили.
- 2.10. Сформулюйте аксіому про рівновагу двох сил.
- 2.11. Які системи сил називаються еквівалентними?
- 2.12. Що таке рівнодіюча сила та сила, що врівноважує?
- 2.13. Сформулюйте першу, другу, третю та четверту аксіоми статички.
- 2.14. Сформулюйте п'яту аксіому статички.
- 2.15. Які різновиди в'язей розглядаються у статиці?

- 2.16. Сформулюйте правило паралелограма сил.
- 2.17. Що називається в'язю, накладеною на тверде тіло?
- 2.18. Що таке реакція в'язі?
- 2.19. Сформулюйте принцип звільнення від в'язей.
- 2.20. Скільки рівнянь можна скласти для плоскої та просторової системи сил?

ТЕМА 3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

ПЛАН

- 3.1. Класифікація систем сил у статиці
- 3.2. Система збіжних сил

3.1. Класифікація систем сил у статиці

Сили та інші дії, наприклад моменти, зазвичай, діють не на самоті, а в сукупності, утворюючи деяку систему. Не зупиняючись на теоретичних підходах до оцінки на тіло системи сил (таких як принцип незалежності дії сил та інших), розглянемо найпоширеніші випадки на тіло системи сил.

Головними ознаками, за якими класифікують систему сил, є положення цих систем у просторі і відносно щодо одне одного. За цими ознаками виділяють:

- ◆ плоскі системи сил, тобто розташовані в одній площині, які в свою чергу поділяються на:
 - систему збіжних сил, тобто, що перетинаються в одній точці;
 - систему довільно розташованих сил;
- ◆ просторові системи сил, тобто що не лежать в одній площині, також поділяються на систему збіжних сил і систему довільно розташованих сил.

Опишемо докладніше кожну із систем.

Плоскі системи сил.

До них відносяться:

- система збіжних сил;
- система довільно розташованих сил.

Сили системи збіжних сил лежать в одній площині, причому всі вони (або лінії їхньої дії) перетинаються в одній точці (рисунок 3.1). Якщо хоч одна з сил не проходить через загальну точку перетину

інших сил у площині, то дана система не є системою збіжних сил, а відноситься до якоїсь іншої системи.

Особливістю системи збіжних сил є те, що в ній відсутні моментні та розподілені навантаження. Це найпростіший і найпоширеніший випадок дії сил.

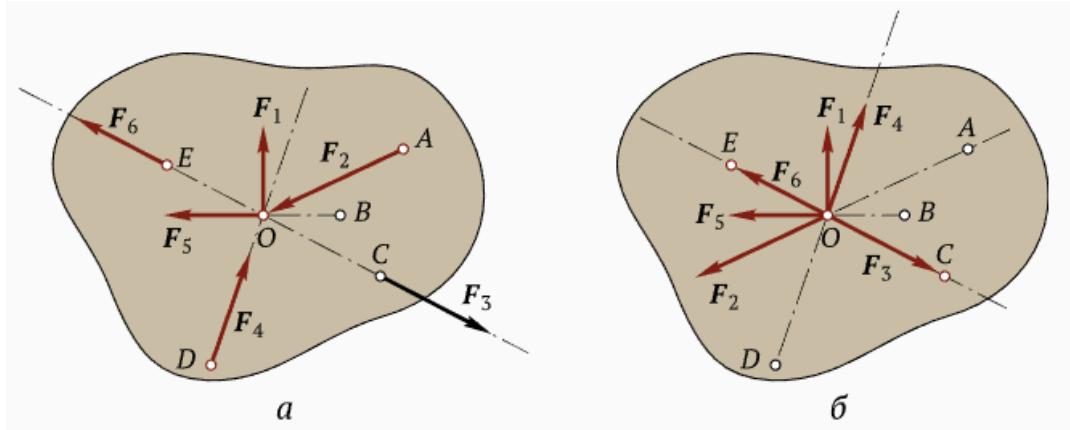


Рисунок 3.1 – Плоска система сил: а - що сходяться в одній точці;
б - що перетинаються в одній точці

У системі довільно розташованих сил, як і в системі збіжних сил, сили лежать (розташовані) в одній площині. Серед них можуть бути окремі групи сил, що перетинаються в одній точці або в різних точках, а деякі можуть взагалі не перетинатися (рисунок 3.2).

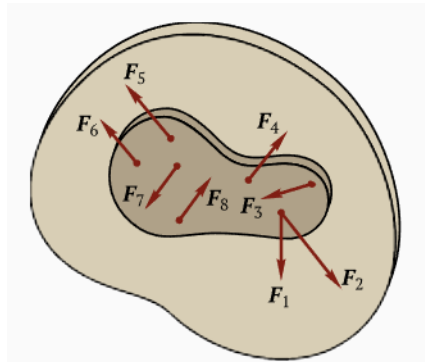


Рисунок 3.1 – Система довільно розташованих сил

У такій системі можуть бути розподілені та моментні навантаження, яких, як і сил, може бути кілька. Це дуже поширений тип дії сил (навантажень) на тіло в практичних задачах.

Просторові системи сил

Як згадувалося, ці системи також поділяються на систему збіжних сил у просторі, тобто. що не лежать в одній площині, але перетинаються в одній точці (рисунок 3.3), та систему довільно розташованих сил у просторі, тобто. що не лежать в одній площині і не перетинаються в одній точці (рисунок 3.4).

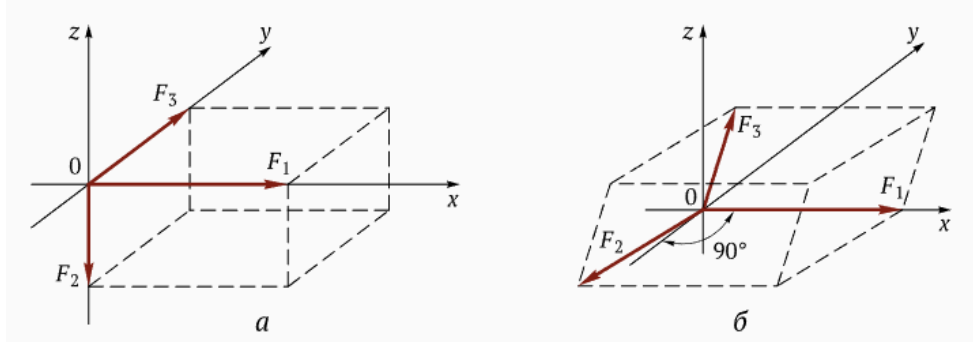


Рисунок 3.3 – Просторові системи сил, що сходяться:
а – взаємно-перпендикулярних; б – довільно розташованих

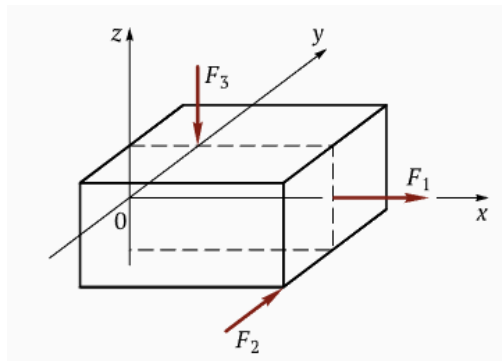


Рисунок 3.4 – Просторова система довільно
розташованих сил

Ці системи рідше зустрічаються в будівельній практиці і складніші для розрахунку.

У кожній із систем можуть бути окремі випадки з точки зору кількості сил, розташування їх друг щодо друга і т.д. Наприклад, можуть бути симетричні системи, в яких всі сили рівні за величиною або всі спрямовані в один бік, або всі паралельні і т.д.

Головним завданням статички є складання рівнянь рівноваги для кожної із систем, які дозволяють знайти реакції та зусилля в тілі (конструкції) від дії сил. Може бути вирішена й обернена задача, наприклад про визначення навантаження, якщо відомі зусилля.

3.2 Система збіжних сил

Визначення: Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається системою збіжних сил. Системи сил, що сходяться, можуть бути плоскими і просторовими.

Нехай на тверде тіло діє система збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, лінії дії яких перетинаються в точці O (рисунок 3.5а).

Використовуючи теорему про ковзний вектор сили (Не змінюючи дії сили на тверде тіло, точку прикладення сили можна переносити по лінії її дії), перенесемо сили вздовж ліній їх дії в точку O і отримаємо еквівалентну систему сил, прикладених до твердого тіла в одній точці (рисунок 3.5б), яку ще називають **пучком**.

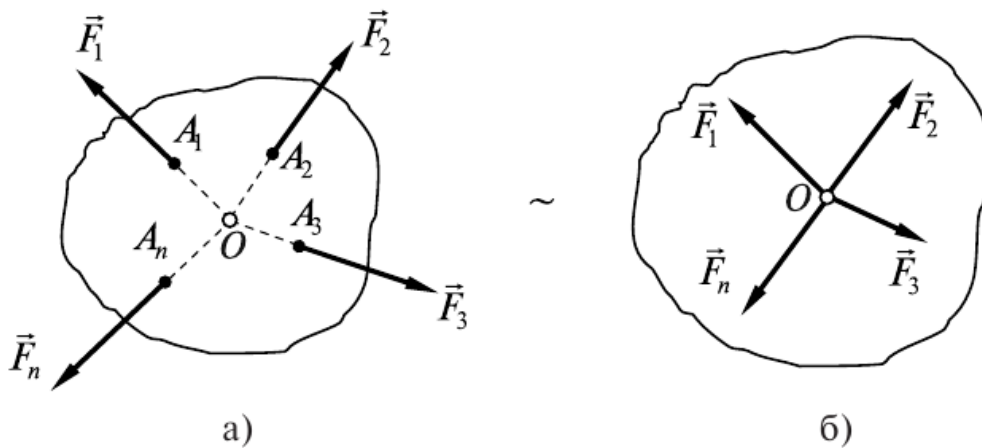


Рисунок 3.5 – Система збіжних сил

Сили, прикладені в одній точці твердого тіла, можна додавати, використовуючи аксіому паралелограм сил. Нехай до тіла в точці O прикладена система n збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рисунок 3.6а).

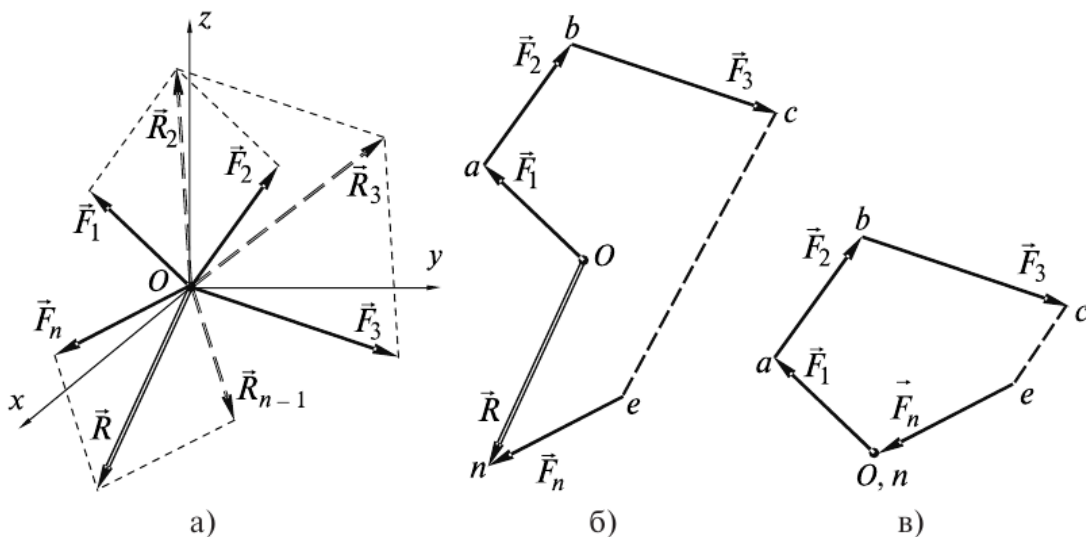


Рисунок 3.6 – Визначення рівнодіючої

Знайдемо рівнодіючу $\vec{R}_2$ сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ (рисунок 3.6а):

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{R}_2 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2), \quad (3.1)$$

(індекс у позначенні рівнодіючої відповідає кількості позитивних сил).

До рівнодіючої $\vec{R}_2$ додамо силу $\vec{F}_3$. Отримаємо:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \quad \vec{R}_3 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3), \quad (3.2)$$

Складемо рівнодіючу $\vec{R}_{n-1}$ з останньою силою $\vec{F}_n$ й отримаємо рівнодіючу n сил.

$$\vec{R} = \vec{R}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n, \quad (3.3)$$

Отже, є система сил, що сходяться, еквівалентна одній силі – рівнодіючій, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в точці перетину ліній їх дії:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (3.4)$$

Як видно з рисунку 3.6б, побудова паралелограмів сил еквівалентна побудові векторного багатокутника сил. Для системи сил, зображеної на рисунку 3.6б, векторний багатокутник сил побудуємо так: до кінця вектору $\vec{F}_1$ F приєднаємо вектор, геометрично рівний $\vec{F}_2$, та з його кінця відкладемо вектор $\vec{F}_3$ і так далі. Вектор, проведений з точки прикладення першої сили $\vec{F}_1$ до кінця вектора $\vec{F}_n$, є рівнодіючою силою $\vec{R}$. Отриманий у такий спосіб багатокутник $O_{abc\dots n}$ називається **силовим чи багатокутником сил**.

Замикаюча сторона силового багатокутника, яка спрямована проти його обходу, визначає рівнодіючу як за величиною, так і за напрямом (рисунок 3.6б). Визначення рівнодіючої системи сил, що

сходяться за правилом паралелограма або силового багатокутника називається **геометричним способом** визначення рівнодіючої.

У разі плоскої системи збіжних сил, силовий багатокутник використовується для графічного визначення рівнодіючої. Зображуючи сили у певному масштабі, величину рівнодіючої сили визначимо безпосереднім виміром її на кресленні. Геометричний спосіб визначення рівнодіючої використовується у графостатиці.

Розкладання сили за заданими напрямками

Розкласти цю силу на кілька складових – значить знайти таку систему декількох сил, для яких дана сила є рівнодіючою. Це завдання є невизначеним і має однозначне рішення лише за завданням додаткових умов. Такими додатковими умовами можуть, наприклад, бути:

- ▶ завдання двох напрямків, вздовж яких мають діяти складові сили;
- ▶ завдання модулів обох складових сил;
- ▶ завдання модуля однієї складової сили та напрямку другої.

Розглянемо два окремі випадки.

▲ Розкладання сили за двома заданими напрямками

Завдання зводиться до побудови такого паралелограма, у якого сила, що розкладається є діагоналлю, а сторони паралельні заданим напрямкам. Наприклад, на рисунку 3.7а, показано, що сила $\vec{R}$ розкладається за напрямками АВ та АД на сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ – складові сили $\vec{R}$ (сила $\vec{R}$ та прямі АВ та АД лежать в одній площині).

▲ Розкладання сили за трьома заданими напрямками

Якщо задані напрямки АВ, АС та АД не лежать в одній площині, то завдання є визначеною та зводиться до побудови такого паралелепіпеда, у якого діагональ є заданою силою $\vec{R}$, а ребра паралельні заданим напрямкам і визначають складові $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (рисунок 3.7б).

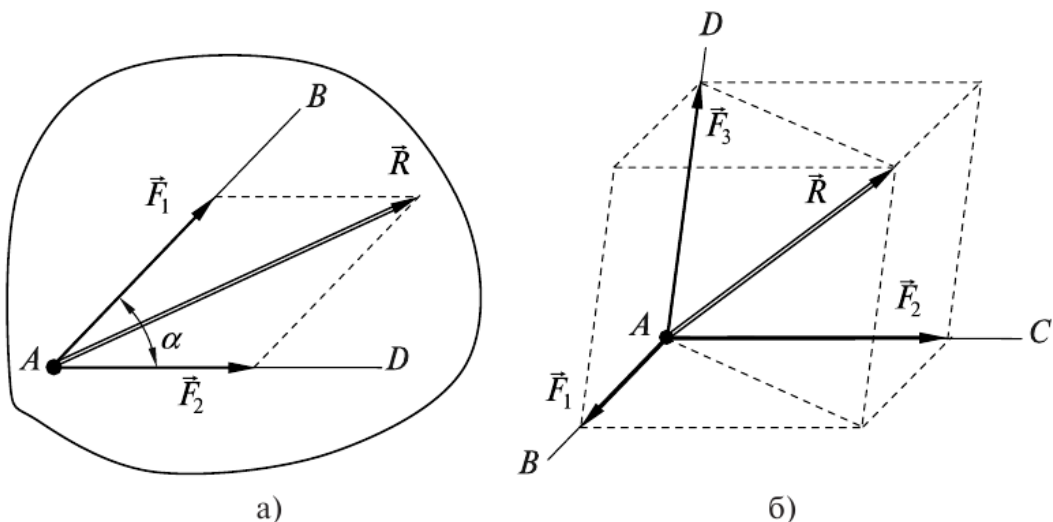


Рисунок 3.7 – Розкладання сили за двома заданими напрямками

Проекція сили на вісь та площину

Аналітичний спосіб розв'язання задач статички ґрунтується на понятті проекції сили на вісь. Проекція сили на вісь є алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між позитивним напрямом осі та силою (рисунок 3,8)

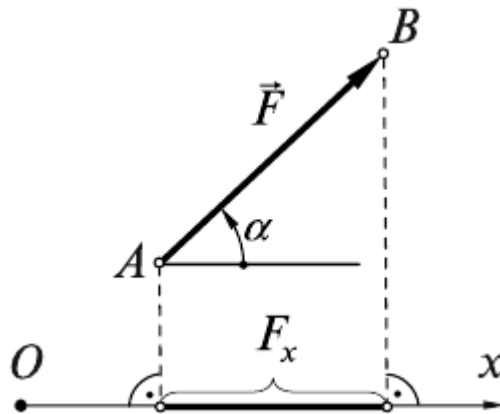


Рисунок 3.8 – Проекція сили на вісь

$$F_x = \text{пр}_x \vec{F} = F \cdot \cos \alpha, \quad (3.5)$$

Зазначимо, що:

$$F_x > 0, \text{ якщо } 0 \leq \alpha < \pi/2;$$

$$F_x = 0, \text{ якщо } \alpha = \pi/2;$$

$$F_x < 0, \text{ якщо } \pi/2 < \alpha \leq \pi.$$

Проекцією сили $\vec{F}$ на площину O_{xy} називається вектор $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$, який з'єднує проекції початку та кінця вектора $\vec{F}$ на цю площину (рисунок 3.9).

На відміну від проекції сили на вісь, Проекція сили на площину є векторною величиною. Вона характеризується не тільки своїм модулем, а й напрямом у площині O_{xy} . Модуль проекції сили на площину:

$$F_{xy} = F \cdot \cos\theta, \quad (3.6)$$

де θ – кут між напрямком сили $\vec{F}$ та площиною. У деяких випадках для визначення проекції сили на вісь вигідніше знайти спочатку її проекцію на площину, в якій лежить ця вісь, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на цю вісь.

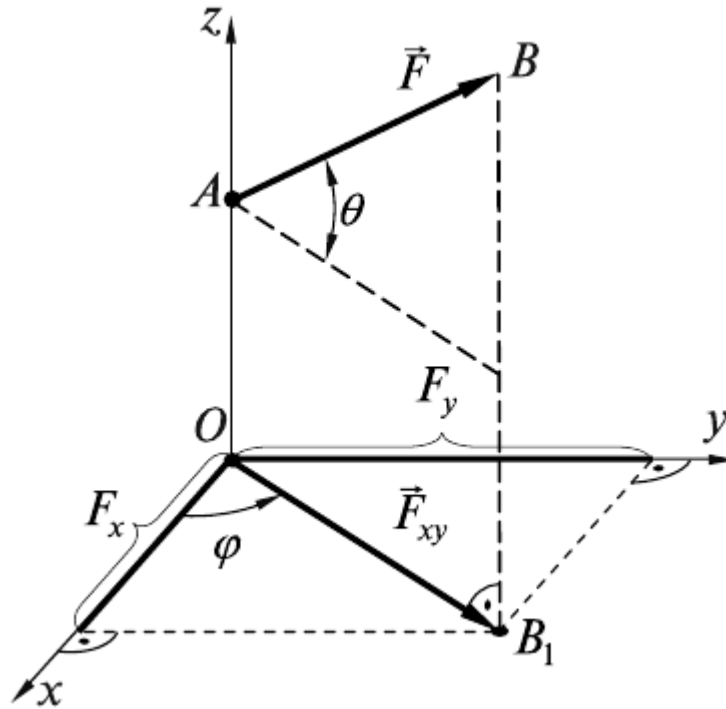


Рисунок 3.9 – Проекція сили на площину

Наприклад, у випадку, зображеному на рисунку 3.9, у такий спосіб знайдемо, що:

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi, \quad (3.7)$$

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi,$$

При вирішенні багатьох задач механіки зручно задавати силу через її проекції на осі прямокутної декартової системи координат (рисунок 3.10):

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}, \quad (3.8)$$

де F_x, F_y, F_z – проекції сили $\vec{F}$ на відповідні осі координат;
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні орти осей x, y, z .

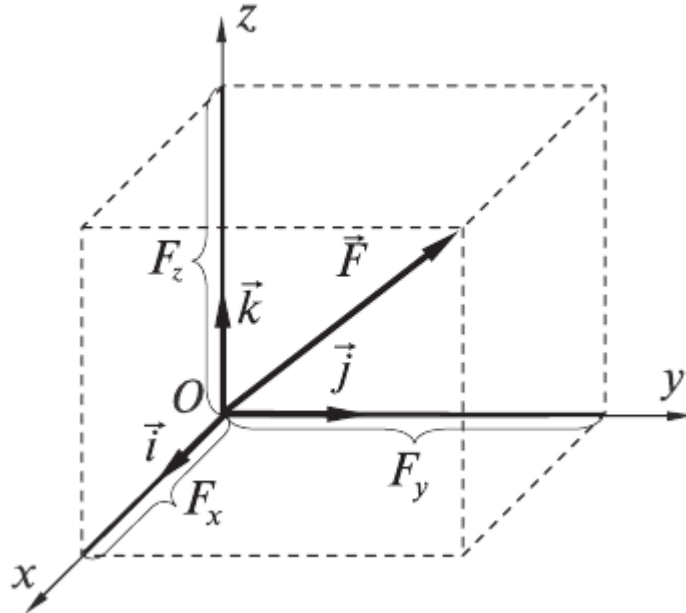


Рисунок 3.10 – Проекції на осі прямокутної декартової системи координат

За відомими проекціями сили на осі координат можна визначити модуль сили та кути, які вона утворює з координатними осями, за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (3.9)$$

$$\cos(\vec{Ox} \wedge \vec{F}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{Oy} \wedge \vec{F}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{Oz} \wedge \vec{F}) = \frac{F_z}{F}, \quad (3.10)$$

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої

Крім геометричного існує ще й аналітичний спосіб визначення рівнодіючої системи збіжних сил. Якщо рівність (3.4) спроектуємо на осі декартової системи координат (рисунок 3.6а), то отримаємо:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (3.11)$$

де R_x, R_y, R_z – проекції рівнодіючої $\vec{R}$ на осі координат;

F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції сили $\vec{F}_i$ на осі координат.

▲ Отже, проєкція рівнодіючої системи збіжних сил на цю вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових сил на цю ж вісь.

Оскільки формули (3.11) визначають проєкції рівнодіючої на три взаємно перпендикулярні осі, то модуль та напрямок рівнодіючої $\vec{R}$ обчислюються за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$
$$\cos(\vec{Ox}, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{Oy}, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{Oz}, \vec{R}) = \frac{R_z}{R}. \quad (3.12)$$

Умови та рівняння рівноваги системи схожих сил

За визначенням урівноваженої системи сил маємо

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0, \quad (a)$$

а для системи збіжних сил (рисунок 3.5) отримали

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}, \quad (б)$$

Порівнюючи еквівалентності (а) і (б), отримаємо векторну умову рівноваги: *для рівноваги системи сил, що сходяться необхідно і достатньо, щоб її рівнодіюча дорівнювала нулю:*

$$\vec{R} = 0, \quad (3.13)$$

Векторна рівність (3.13) є необхідною і достатньою умовою рівноваги системи збіжних сил. Умови, яким при цьому повинні задовольняти самі сили, можна виразити у геометричній чи аналітичній формі.

Геометрична умова рівноваги

Як відомо, рівнодіюча – це замикаюча сторона силового багатокутника (рисунок 3.6б). Умова (3.13) виконуватиметься лише тоді, коли кінець останньої сили з'єднається з початком першої сили

при побудові силового багатокутника, тобто коли силовий багатокутник буде замкнутим. **Необхідною і достатньою** умовою рівноваги системи сил є замкнутість її силового багатокутника (рисунок 3.6 в).

Аналітичні умови рівноваги. Рівняння рівноваги

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил впливають з умови (3.13), згідно з якою модуль рівнодіючої дорівнює нулю. Використовуючи формулу (3.12), отримуємо

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0,$$

або, згідно з (3.11),

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad (3.14)$$

Це означає, що для рівноваги системи збіжної сил **необхідно і достатньо**, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

Рівності (3.14) називаються **аналітичними умовами рівноваги** системи збіжних сил.

Для випадку плоскої системи сил, що сходяться будемо мати:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad (3.15)$$

Отже, завдання на рівновагу системи збіжних сил, можна вирішувати двома способами:

- геометрично;
- аналітично.

Перший спосіб зручний для плоскої системи збіжних сил.

Аналітичні умови рівноваги (3.14) або (3.15), розписані для конкретного завдання, до яких входять невідомі параметри, реакції в'язей, активні сили, відстані, кути тощо, називаються **рівняннями рівноваги**.

При розв'язанні задач статки реакції в'язей завжди є невідомими величинами. Для визначення використовують умови рівноваги тієї чи іншої системи сил.

Завдання, у яких число невідомих величин дорівнює кількості рівнянь рівноваги, до яких вони входять, **називаються статично визначеними**. Системи, для яких це має місце, *називаються статично визначеними*.

Задачі, у яких число невідомих величин більше, ніж кількість рівнянь рівноваги, куди входять ці величини, **називаються статично невизначеними**. Системи, для яких це має місце, *називаються статично невизначеними*.

Методика розв'язання задач на рівновагу

Усі задачі на рівновагу тіл бажано вирішувати за такою методикою.

1. Дотримуючись масштабу, зробити чіткий схематичний рисунок до завдання.

2. Вибрати об'єкт рівноваги. Останнім може бути точка, тіло або система тіл, до яких додано задані та невідомі сили. Якщо задані сили діють одне тіло, а невідомі – друге, необхідно розглядати рівновагу системи тіл загалом чи послідовно рівновагу кожного тіла.

3. Зобразити на рисунку всі задані сили, прикладені до об'єкта рівноваги.

4. Умовно звільнити об'єкт рівноваги від накладених в'язей, а їх дію замінити реакціями в'язей. Зобразити на рисунку реакції в'язей.

5. З'ясувати, яка система сил діє на об'єкт рівноваги та умови рівноваги раціонально використати.

6. Відповідно до умов рівноваги скласти рівняння рівноваги або виконати відповідні графічні побудови.

7. Вирішити рівняння рівноваги, знайти невідомі величини та проаналізувати отримані результати.

Усі розрахунки у процесі розв'язання задачі рекомендується виконувати у загальному вигляді, а числові значення підставляти лише кінцеві алгебраїчні вирази.

Приклади розв'язання задач на рівновагу під дією системи збіжних сил.

Задача 1. Однорідна горизонтальна балка, вага якої $P = 200$ Н, знаходиться в рівновазі шарнірно-нерухомою опорою А та шарнірно-рухомою опорою (рисунок 3.11). Визначити реакції опор.

Розв'язання. Об'єктом рівноваги виберемо балку АВ, на яку діє одна задана сила $\vec{P}$ прикладена посередині довжини балки (рисунок 3.11б).

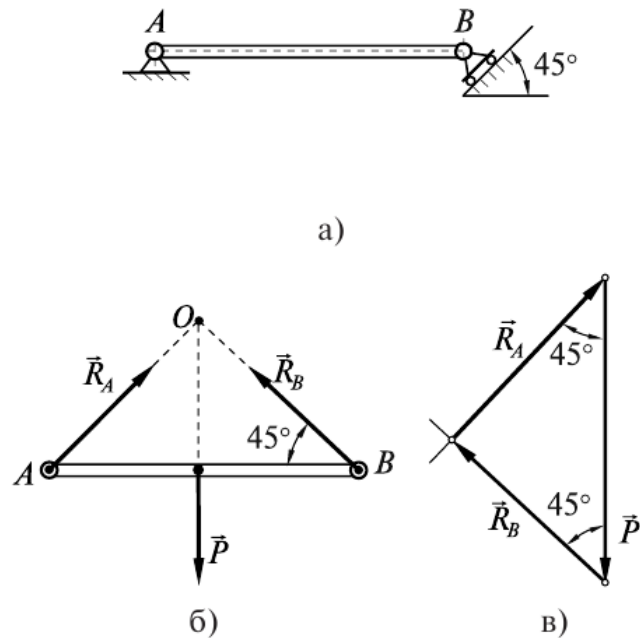


Рисунок 3.11 – Розрахункова схема до задачі 1

Подумки звільнимось від в'язей. Лінія дії реакції $\vec{R}_B$ перпендикулярна до площини, на яку спирається шарнірно-рухлива опора В. Відома точка прикладення реакції $\vec{R}_A$ (точка А). Очевидно, що балка знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині. Знайдемо точку перетину ліній їхньої дії. Для цього продовжимо лінії дії сил $\vec{P}$ та $\vec{R}_B$ до перетину в точці О. Відповідно до теореми про три непаралельні сили, лінія дії реакції $\vec{R}_A$ має пройти через точку В (по лінії АО) (рисунок 3.11б).

Балка знаходиться в рівновазі під дією трьох збіжних сил $\vec{P}$, $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$. Використаємо геометричну умову рівноваги та побудуємо замкнутий трикутник сил (рисунок 3.11в). Для цього в обраному масштабі відкладемо вектор сили $\vec{P}$ з початку якого проведемо пряму, паралельну лінії АО, а з кінця - пряму, паралельну лінії ВО. Точка перетину цих прямих визначить кінець вектору $\vec{R}_B$ та початок вектора

$\vec{R}_A$. З трикутника сил визначимо величини невідомих реакцій $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$.

Оскільки в $\triangle AOB$ кут $\angle ABO = 45^\circ$, а лінія дії сили $\vec{P}$ є медіаною та висотою основи AB , тому також $\angle OAB = 45^\circ$. Перенесемо знайдені кути на силовий трикутник. Вирішивши його, отримаємо:

$$R_A = R_B = P \cdot \cos 45^\circ = 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 141 \text{ Н.}$$

Відповідь: $R_A = R_B = 141 \text{ Н}$

Задача 2. Вертикальний стояк підйомного крана спирається на підп'ятник A та підшипник (рисунок 3.12а). У точці діє вертикальне навантаження $P = 20 \text{ кН}$. Висота стояка AB дорівнює 2 м , виліт стріли крана – 4 м . Знайти опорні реакції за умови, що кран перебуває у рівновазі.

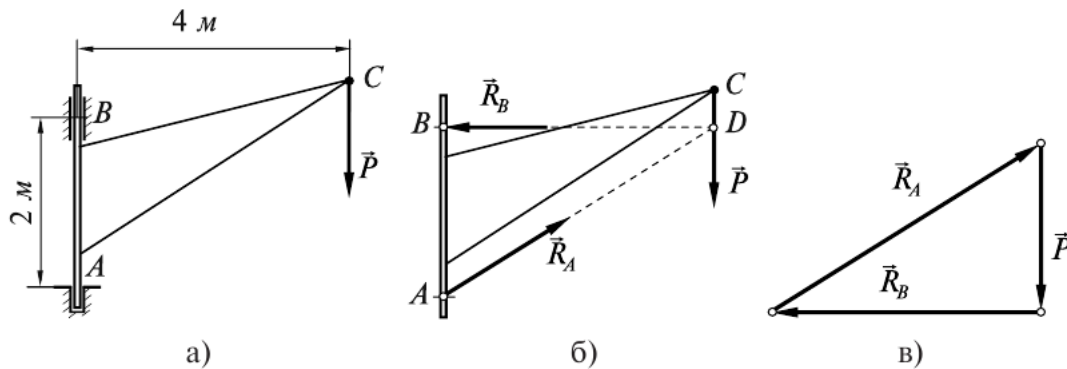


Рисунок 3.12 – Розрахункова схема до задачі 2

Розв'язання. Розглянемо рівновагу крана. На нього діє задана сила $\vec{P}$ прикладена в точці C . Застосуємо принцип звільнення від в'язей та знайдемо напрямки реакцій в'язей. Лінія дії реакції у підшипнику $\vec{R}_B$ – горизонтальна; лінія дії реакції підп'ятника $\vec{R}_A$ – невідома. Оскільки три сили сил $\vec{P}$, $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$ взаємно врівноважені (кран знаходиться в рівновазі), лежать в одній площині і непаралельні, то вони повинні перетинатися в одній точці згідно з теореми про три сили. Знайдемо точку перетину D ліній дії сил $\vec{P}$ та $\vec{R}_B$ і з'єднаємо з нею точку A (рисунок 3.12). Пряма AD буде лінією дії реакції $\vec{R}_A$.

Цю задачу також вирішимо, використовуючи геометричну умову рівноваги системи збіжних сил. Побудуємо замкнутий силовий трикутник (рисунок 3.12в). Бачимо, що трикутник сил подібний до

трикутника ABD (рисунок 3.12б). З подоби трикутників записуємо відношення відповідних сторін:

$$\frac{P}{AB} = \frac{R_B}{BD} = \frac{R_A}{AD}$$

звідки визначаємо величини реакції в'язей $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$.

$$R_B = \frac{P \cdot BD}{AB} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{P \cdot AD}{AB} = \frac{P \cdot \sqrt{AB^2 + BD^2}}{AB} = \frac{20 \cdot \sqrt{4 + 16}}{2} = 44,7 \text{ кН}.$$

Відповідь: $R_A = 44,7 \text{ кН}$; $R_B = 40 \text{ кН}$.

Задачі 1 і 2 можуть бути вирішені аналітичним способом з використанням умов рівноваги довільної плоскої системи сил.

Задача 3. Вантаж P вагою 2 кН перебуває у рівновазі лебідкою D з допомогою канату, перекинутого через блок B (рисунок 3.13а). Нехтуючи тертям на блоці, визначити зусилля в стержнях AB і CB , вважаючи, що кріплення в точках A , B і C - шарнірні. Кути показані на рисунку 3.13а. Розмірами блоку і вагою стержнів знехтувати.

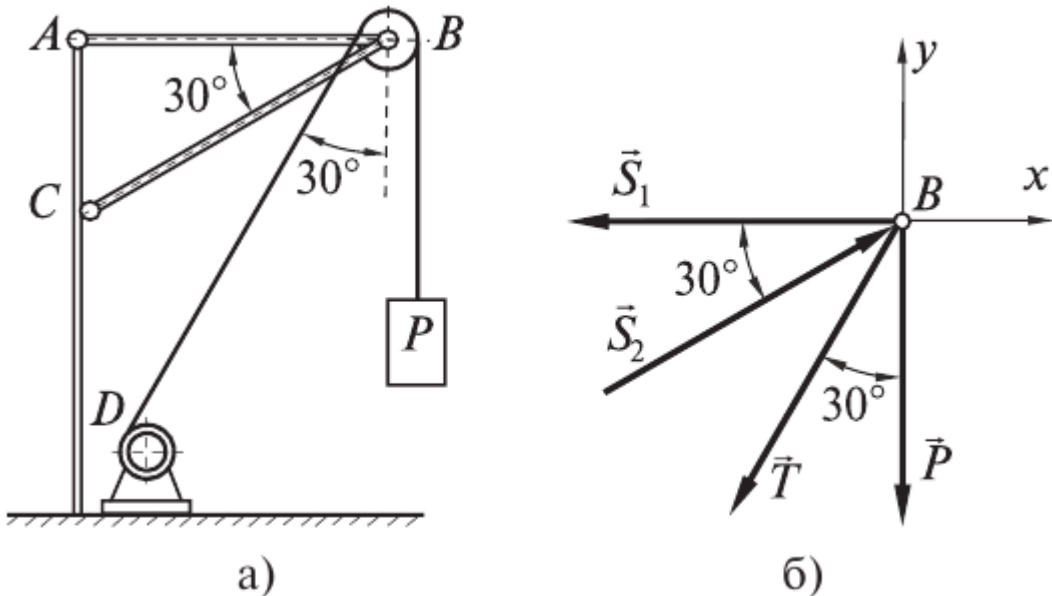


Рисунок 3.13 – Розрахункова схема до задачі 3

Розв'язання. Об'єктом рівноваги обираємо блок В, що розглядається як точка. До нього додано задану силу тяжіння вантажу $\vec{P}$. Подумки звільнимось від в'язей та замінимо дію їх на блок В реакціями в'язей. Оскільки стержні АВ і ВС занурені в точці, а їх з'єднання - шарнірні, то вони можуть бути тільки або розтягнутими або стиснутими, тобто реакції стержнів будуть спрямовані вздовж їх осей.

Стержень АВ є розтягнутий, тому його реакція $\vec{S}_1$ буде спрямована від точки В до точки А, стержень ВС – стиснутий, і його реакція $\vec{S}_2$ спрямована від точки С до точки В. Натяг канату BD буде спрямований по лінії канату, і оскільки тертя між блоком та канатом нехтуємо, то $T = P$.

На блок діє система збіжних сил, розташованих в площині рисунка. Для розв'язання задачі використовуємо аналітичні умови рівноваги. Для цього виберемо систему координат з початком у точці В (рисунок 3.12б) та запишемо два рівняння рівноваги (3.15):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = -S_1 + S_2 \cdot \cos 30^\circ - T \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = S_2 \cdot \sin 30^\circ - T \cdot \cos 30^\circ - P = 0.$$

Розв'яжемо ці рівняння і визначимо невідомі величини:

$$S_2 = \frac{P + T \cdot \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1/2} = 7,45 \text{ кН};$$

$$S_1 = S_2 \cdot \cos 30^\circ - T \cdot \cos 60^\circ = 7,45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 5,45 \text{ кН}.$$

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що зусилля $\vec{S}_1$ та $\vec{S}_2$ отримані зі знаком «+». Це означає, що стержень АВ працює на розтяг, а стержень ВС – на стиск.

Відповідь: $S_1 = 5,45 \text{ кН}$; $S_2 = 7,45 \text{ кН}$.

Задача 4. Знайти зусилля, що виникають у стержнях АВ, АС і AD (рисунок 3.14) під дією сили $\vec{F}$ та сили тяжіння вантажу $\vec{P}$ підвішеного в точці А. Площина прямокутника АВОС – горизонтальна, кріплення стержнів у точках А, В, С, D – шарнірні, сила $\vec{F}$ та вантаж $\vec{P}$ знаходяться у вертикальній площині OAD. Кути показані на рисунку.

Розв’язання. Об’єктом рівноваги виберемо вузол А. На нього діють задані сили $\vec{F}$ та $\vec{P}$. Подумки звільнимо вузол А від в’язей. Реакції ідеальних жорстких стержнів $\vec{S}_{AB}$, $\vec{S}_{AC}$ та $\vec{S}_{AD}$ спрямовані по осях стержнів.

На вузол А діє просторова система збіжних сил. Виберемо систему координат з початком у точці О та запишемо рівняння рівноваги (3.14):

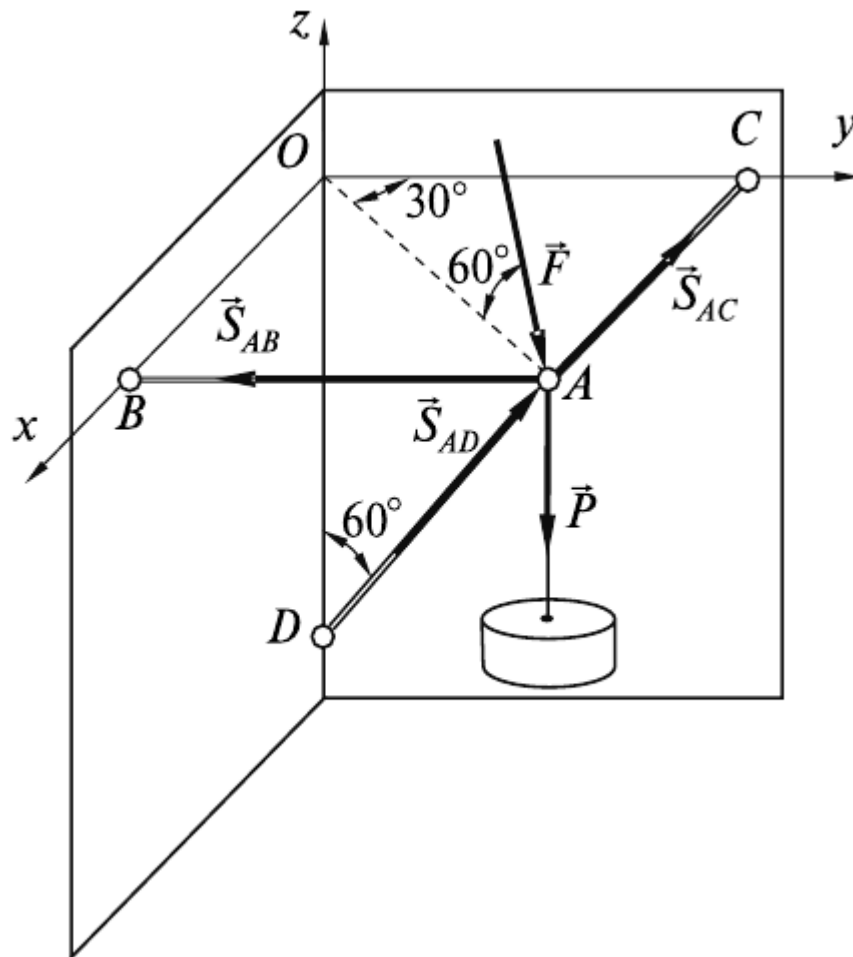


Рисунок 3.14 – Розрахункова схема до задачі 4.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = F \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - S_{AC} + S_{AD} \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = F \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - S_{AB} + S_{AD} \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = -F \cdot \sin 60^\circ - P + S_{AD} \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

Так як, у рівняннях (1) та (2) по дві невідомих, то розв'язання розпочинаємо з рівняння (3):

$$S_{AD} = \frac{F \cdot \sin 60^\circ + P}{\cos 60^\circ};$$

Невідому реакцію S_{AC} знаходимо з рівняння (1):

$$S_{AC} = F \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + S_{AD} \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ;$$

Невідому реакцію S_{AB} знаходимо з рівняння (2):

$$S_{AB} = F \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + S_{AD} \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ;$$

Відповідь: Зусилля, що виникають у стержнях AB, AC і AD знайдені.

Контрольні питання

- 3.1. Яка система сил називається збіжною?
- 3.2. Як геометрично знайти рівнодіючу плоскої системи збіжних сил ?
- 3.3. Назвіть правила складання двох сил, що виходять із однієї точки?
- 3.4. Як знайти векторну проекцію на вісь?
- 3.5. У чому полягає геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил?
- 3.6. У чому полягає аналітична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил ?
- 3.7. Як правильно вибрати осі координат?
- 3.8. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи збіжних сил?

3.9. Якщо значення зусилля у стержні вийшло негативним, що це означає?

3.10. Які вимоги висуваються при побудові силового багатокутника?

ТЕМА 4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. ПЛОСКА СИСТЕМА ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ СИЛ

ПЛАН

4.1 Момент сили щодо точки та осі.

4.2 Пара сил

4.3 Плоска система довільно розташованих сил

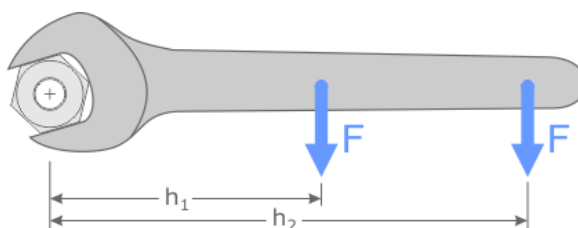
Кажуть, колись великий Архімед сказав фразу: «Дайте мені точку опори, і я переверну Землю». Сучасна фізика стверджує, що з практичної точки зору мудрий грек, звичайно ж, погарячкував – навіть зрушити на долі міліметра такий масив, як планета за допомогою м'язової сили – заняття не одного року, а вже перевернути Землю...



Тим не менш, з теоретичної точки зору Архімед має рацію – якщо знайти відповідну точку опори, то за допомогою важеля Землю зрушити з місця може навіть комар. Справа в тому, що тут грає роль не сила, як така, а її момент.

Що ж таке момент сили? Слід одразу зазначити, що момент сили – поняття відносне, оскільки без вказівки того, щодо якої точки він розглядається, поняття моменту сили втрачає сенс (не плутати з моментом пари сил, про який йтиметься далі).

Розглянемо гайку, яку затягують гайковим ключем певної довжини, прикладаючи до кінця ключа м'язове зусилля. Якщо взяти більш довгий ключ, то гайку можна загорнути значно сильніше, прикладаючи однакове зусилля. З цього випливає, що однією й тією ж силою можна виконати різну за ефективністю обертову дію на тіло. У цьому й криється поняття моменту сили – це дія сили, що



обертає, відносно якої-небудь точки в просторі.

Поняття моменту сили щодо точки ввів геніальний італієць Леонардо да Вінчі (1452-1519), який відомий як великий художник, а й видний учений свого часу.

4.1 Момент сили щодо точки та осі

Досі ми розглядали тіла, які під дією сил прагнули здійснити поступальний рух, а інші тіла перешкоджали цьому.

Насправді, часто трапляються випадки, коли сили викликають не поступальний, а обертальний рух тіла навколо якоїсь осі (рисунок 4.1а). Статика твердого тіла не вивчає закони обертального руху, вона вивчає випадки, коли сили прагнуть повернути тіло, але при цьому воно залишається нерухомим. Причин того, що тіло залишається нерухомим при дії тих сил, які прагнуть його повернути, у реальних конструкціях може бути кілька, наприклад така сила тертя в осі, яку зовнішня сила не може подолати, або така маса тіла, що величини зовнішньої сили недостатньо для створення обертального руху, чи перешкода обертальному руху з боку інших зовнішніх сил тощо.

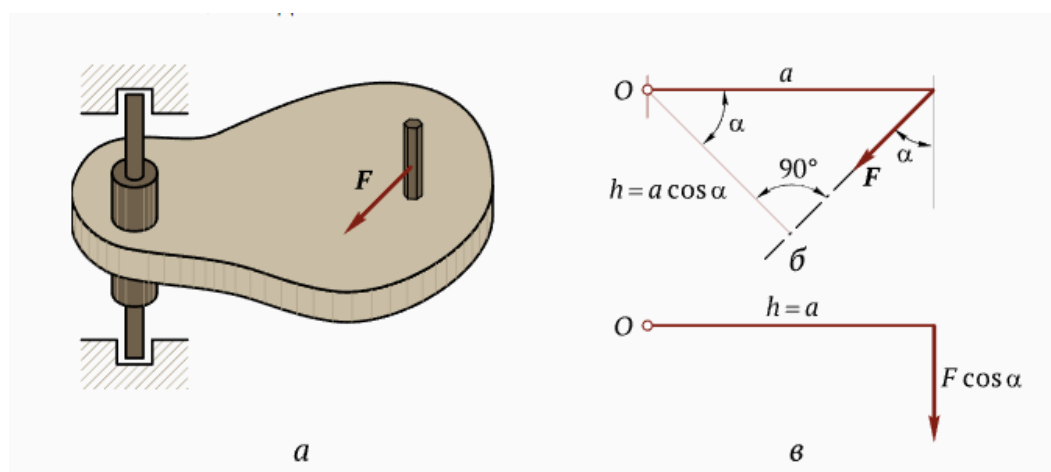


Рисунок 4.1 – Момент сили відносно точки: а – сила, що прагне повернути тіло; б, в – визначення плеча сили

В ідеальних тілах і в'язях, які вважаються невагомими і в яких відсутні сили тертя, нерухомість тіла забезпечується прикладенням до нього якихось в'язей, наприклад, опорних стержнів, що прикріплюють тіло до основи. За цих умов зовнішні сили створюють обертальний

ефект, але тіло залишається нерухомим. Розмір обертального ефекту (дії) оцінюється моментом сили щодо точки (осі).

Момент сили відносно точки – добуток величини (модуля) цієї сили F на найкоротшу (перпендикуляр) відстань від цієї точки до лінії дії сили. Цю відстань прийнято називати **плечем** і позначати буквою h (рисунок 4.1б, в).

Момент сили позначають буквою M і загалом визначають за формулою:

$$M_O = \pm F \cdot h, \quad (4.1)$$

При цьому обов'язково вказується, відносно якої точки визначається момент (в нашому випадку відносно точки O).

Якщо сила прагне повернути брус (тіло) проти годинникової стрілки відносно точки тіла, що розглядається, то момент вважається **позитивним** (перед ним ставлять знак «плюс», хоча найчастіше цей знак опускають), а якщо за годинниковою, то **негативним** (перед ним ставлять знак «мінус»).

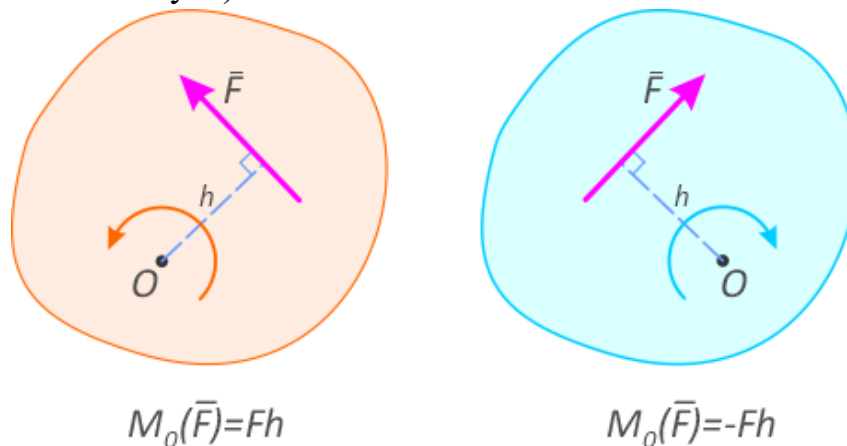


Рисунок 4.2 – Правило знаків

Деякі властивості моменту сили відносно точки:

- ♦ момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні точки прикладення сили вздовж її лінії дії;
- ♦ момент сили відносно точки дорівнює нулю, коли
 - $F = 0$;
 - $h = 0$, т. е. коли точка розташована на лінії дії сили.

Момент сили відносно осі

Проекція моменту сили відносно точки на деяку вісь, що проходить через цю точку, називається **моментів сили відносно осі**.

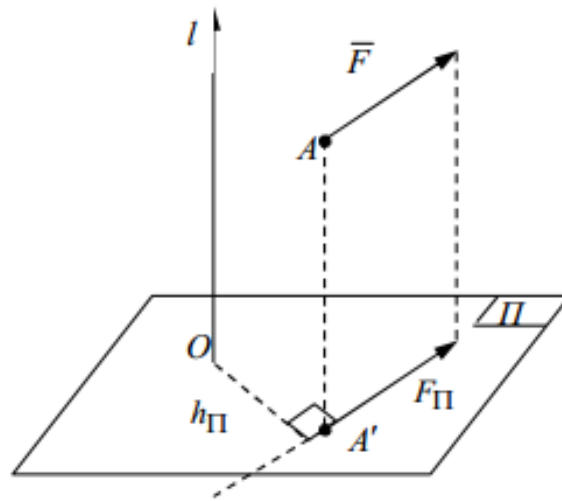


Рисунок 4.3 – Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі обчислюється як момент проекції сили $\vec{F}$ на площину Π , перпендикулярну до осі, відносно точки O перетину осі з площиною Π :

$$M_\ell(\vec{F}) = F_\Pi \cdot h_\Pi, \quad (4.2)$$

Момент береться зі знаком плюс при прагненні сили повернути тіло, до якого вона прикладена, проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця осі, і зі знаком мінус – у протилежному випадку.

Головний вектор та головний момент плоскої системи сил

Розглянемо плоску систему сил $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, що діють на тверде тіло координатної площині O_{xy} (рисунок 4.4).

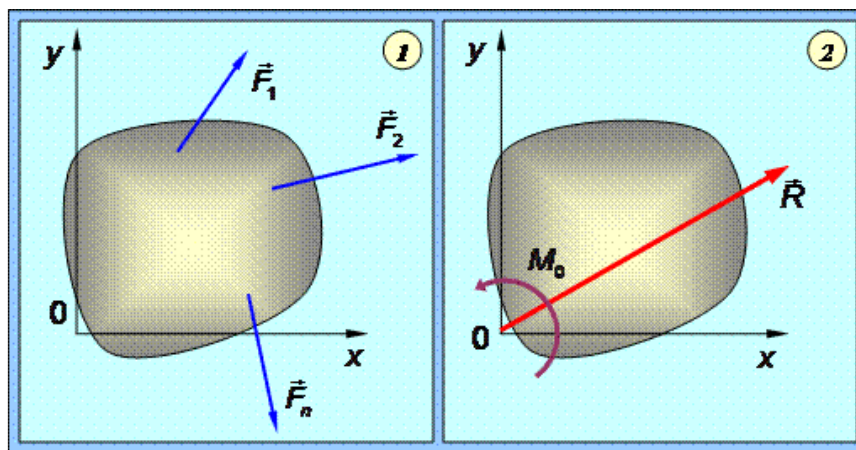


Рисунок 4.4 – Головний вектор та головний момент
плоскої системи сил

Головним вектором системи сил називається вектор $\vec{R}$, що дорівнює векторній сумі цих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i, \quad (4.3)$$

Для плоскої системи сил її головний вектор лежить у площині цих сил.

Головним моментом системи сил відносно центру О називається вектор M_O , рівний сумі векторних моментів цих сил відносно точки О:

$$M_O = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \dots + M_O(\vec{F}_n) = \sum M_O(\vec{F}_i), \quad (4.4)$$

Отже, плоска система сил, яка діє на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центру О замінюється однією силою $\vec{R}$, що дорівнює головному вектору системи сил і прикладеної в центрі приведення О, та однією парою з моментом M_O , рівним головному моменту системи сил відносно центру О, але сила й пара лежать у даному випадку в одній площині – у площині дії сил.

4.2 Пара сил

Аналогічний обертальний ефект (дія) може чинити на тіло **пара сил**.

Пара сил - це система двох паралельних сил, рівних за модулем і спрямованих у протилежні сторони. Їх іноді називають системою двох паралельних, але протилежно спрямованих сил, а частіше - просто парою сил.

Вплив пари сил на тіло показано на рисунку 4.5а. Воно схоже з впливом однієї сили відносно осі (див. рисунок 4.1а), але є суттєві відмінності.

Одиночна сила може чинити обертальну дію на тіло тільки за наявності якоїсь в'язі, наприклад шарніра або осі. Якщо таких в'язей немає, вона викликає поступальний рух тіла.

Пара сил чинить обертальний вплив на вільне тіло, чого не може зробити зосереджена сила. Крім того, пара сил створює

обертальний ефект, абсолютно однаковий для будь-якої точки тіла, а момент сили залежить від точки, відносно якої він визначається.

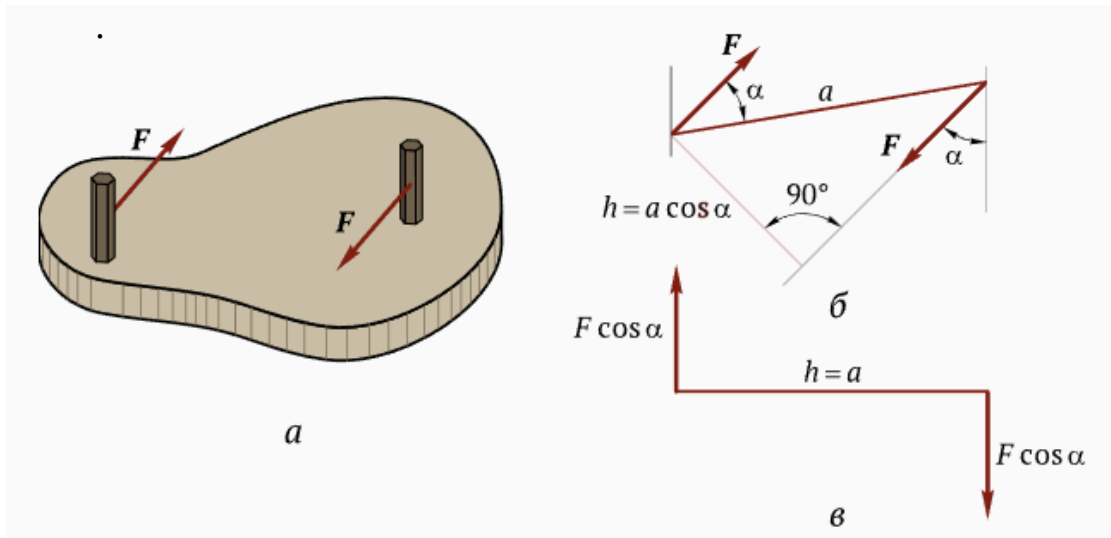


Рисунок 4.5 – Момент пари сил:
а - пара сил, що прагне повернути тіло;
б, в - визначення плеча пари сил

Сила й пара сил є первинними (найпростішими) силовими впливами на тіло. Пари, як і сили, можна складати, віднімати, а також виконувати інші дії над ними, які вивчаються в теорії пар. Ми обмежимося лише наведеними тут відомостями.

Момент пари визначається так само, як і момент сили відносно точки, тобто, як добуток величини (модуля) однієї із сил на найкоротшу відстань між лініями їх дії (рисунок 4.5б, в). Правило знаків при цьому таке ж, як для моменту сили відносно осі (точки).

З визначень моменту сили відносно точки та моменту пари сил випливає, що ці моменти вимірюються в одиницях, які є добутком одиниці сили на одиницю довжини. У системі СІ це **Н·м, кН·м** тощо.

Ще раз звернемо увагу на подібність і різницю між парою сил і моментом сили відносно точки. На рисунку 4.6а показано дію пари сил на вільне тіло. Ця пара прагне повернути тіло за годинниковою стрілкою з моментом пари, що дорівнює $F \cdot h$. Якщо тіло закріпити на якійсь уявній осі, що проходить через точку О, розташовану в середині відстані між силами (рисунок 4.4б), пара сил перетворюється на еквівалентну систему двох сил, кожна з яких прагне повернути тіло відносно цієї точки О. Зрозуміло, що момент двох сил відносно точки О дорівнюватиме моменту пари сил:

$$F \cdot h = F \cdot h/2 + F \cdot h/2, \quad (4.5)$$

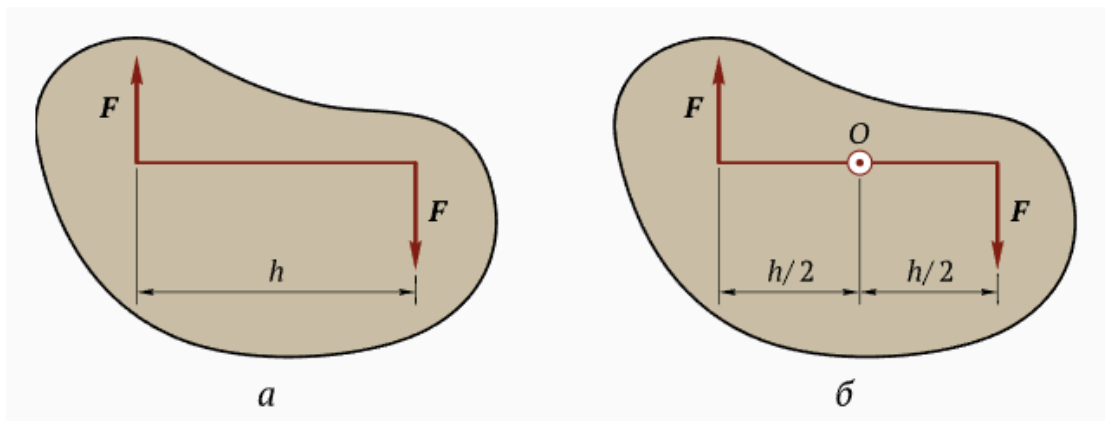


Рисунок 4.6 - Еквівалентність обертальних впливів, що діють на тіло парою сил (а) та двома силами відносної точки О (б)

Коли на тіло діє система сил або пар сил, що викликають його обертання, то для оцінки загального обертового ефекту знаходять їх алгебраїчну суму, яку загально прийнято позначати грецькою буквою Σ (сигма):

$$\Sigma M_O = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n, \quad (4.6)$$

Або

$$\Sigma M_O = F_1 \cdot h_1 + F_2 \cdot h_2 + F_3 \cdot h_3 + \dots + F_n \cdot h_n, \quad (4.7)$$

Момент сили та пари сил можуть зображуватися так, як показано на рисунку 4.7а, б, але найчастіше їх зображують так, як показано на рисунку 4.7в, г.

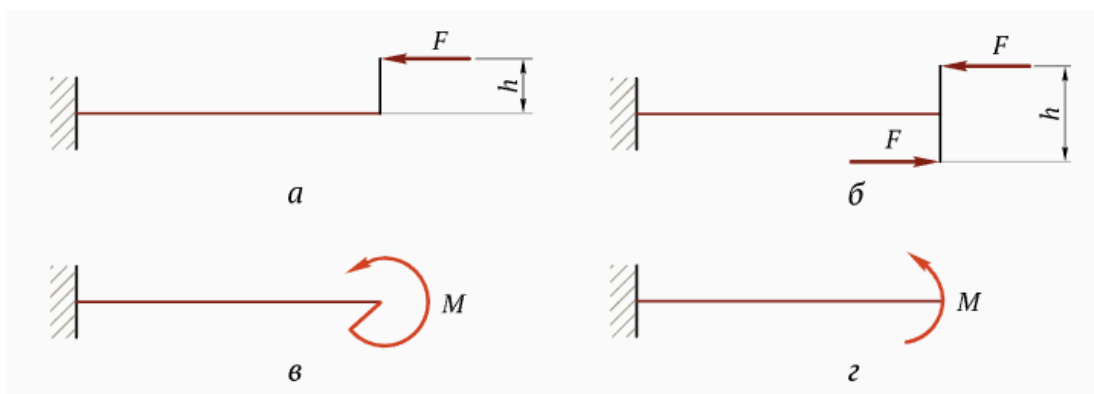


Рисунок 4.7 – Варіанти зображення обертального впливу на балку:
сили (а), пари сил (б), моменту (пари чи сили) (в, г)

Приклад 4.1. Визначити суму моментів сил F_1 , F_2 , F_3 и F_4 відносно точки O (рисунок 4.8), якщо $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 6$ кН, $F_3 = 2$ кН, $F_4 = 1$ кН, $h_1 = 4$ м, $h_2 = 3$ м.

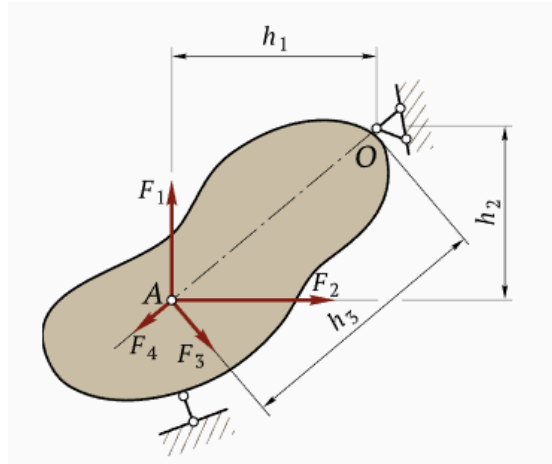


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема до прикладу 4.1

Розв'язання. Знаходимо плечі для сил F_3 та F_4 :

Визначаємо суму моментів сил:

$$h_3 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ м.}$$

$$\sum M_O = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 - F_3 \cdot h_3 + F_4 \cdot h_4;$$

$$\sum M_O = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Відповідь: $\sum M_O = -8$ кН·м.

Приклад 4.2. Визначити суму моментів пар сил (рисунок 4.9), якщо $F_1 = 1$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 3$ кН, $F_4 = 4$ кН, $h_1 = 3,5$ м, $h_2 = 0,5$ м, $h_3 = 1,5$ м, $h_4 = 2,5$ м.

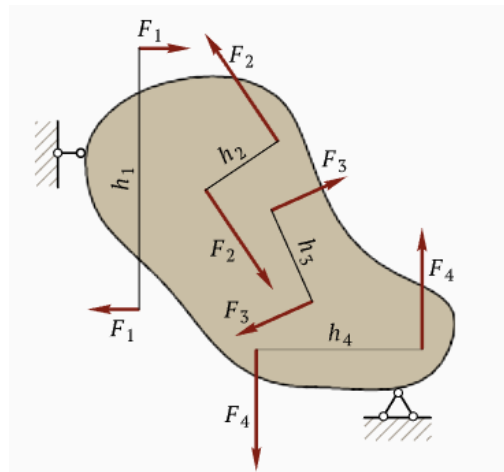


Рисунок 4.9 – Розрахункова схема до прикладу 4.2
Розв’язання. Визначаємо суму моментів пар:

$$\sum M = F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 + F_3 \cdot h_3 - F_4 \cdot h_4;$$
$$\sum M = 1 \cdot 3,5 - 5 \cdot 0,5 - 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 2,5 = -4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відповідь: $\sum M = -4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Властивості пари сил

► Пара сил не має рівнодіючої, оскільки сили розташовані на паралельних прямих.

► Дія пари сил на тіло не змінюється, якщо її перенести на будь-яке інше місце на площині.

► Дві пари мають однакову дію на тіло, якщо їх моменти еквівалентні.

► Проекції пари сил на дві взаємно перпендикулярні площини рівні.

Умови рівноваги пар сил

Якщо на тверде тіло діє декілька пар сил, як заведено розташованих у просторі, то послідовно застосовуючи правило паралелограма до кожних двох моментів пар сил, можна будь-яку кількість пар сил замінити однією еквівалентною парою сил, момент якої дорівнює сумі моментів заданих пар сил.

$$\overline{M} = \sum \overline{M}_i$$

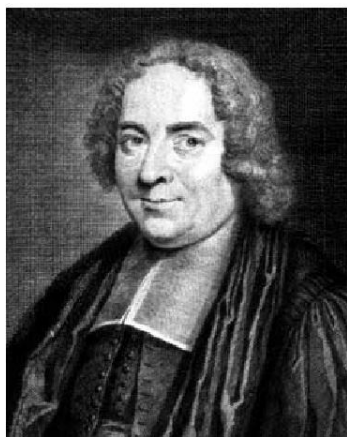
Теорема. Для рівноваги пар сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб момент еквівалентної пари сил дорівнював нулю:

$$\overline{M} = 0.$$

Теорема. Для рівноваги пар сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій моментів пар сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю:

$$M_x = \sum M_{ix} = 0; \quad M_y = \sum M_{iy} = 0; \quad M_z = \sum M_{iz} = 0.$$

Теорема про момент рівнодіючої плоскої системи сил, що сходяться (теорема Варіньйона)



Pierre Varignon (1654 – 1722)- французький механік та математик. Варіньйон був другом Ньютона, Лейбніца та Бернуллі. Основний внесок Варіньйон зробив у статику та механіку; Крім того, праці Варіньйона присвячені аналізу нескінченно малих, геометрії, гідромеханіки. У 1687 році у своїй роботі «Проект нової механіки...» Варіньйон дав точне формулювання закону паралелограма сил, розвинув поняття моменту сил і вивів теорему, що отримала

ім'я Варіньйона. У роботі «Нова механіка чи статика», проект якої було дано в 1687 Варіньйон дав систематичний виклад вчення про складання та розкладання сил, про моменти зусиль і правила оперування ними.

▲ Момент рівнодіючої плоскої системи збіжних сил відносно будь-якої точки, що лежить в площині дії сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів доданків сил відносно цієї точки (рисунок 4.10)

У деяких випадках при визначенні моменту сили виникають труднощі у розрахунку плеча сили.

Теорема Варіньйона значно спрощує вирішення цього питання.

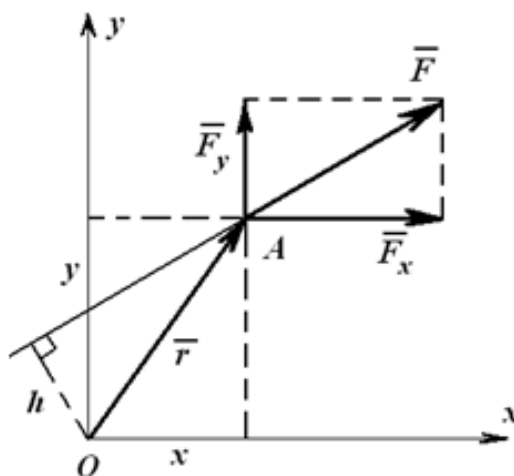


Рисунок 4.10 – Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O

Наприклад, момент сили $\vec{F}$ відносно точки О можна визначити як алгебраїчну суму моментів сил $\vec{F}_x$ і $\vec{F}_y$ (на які можна розкласти силу $\vec{F}$) відносно тієї ж точки О (рисунок 4.10). Тобто:

$$M_O(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot \vec{h} = -\vec{F}_x \cdot y + \vec{F}_y \cdot x = \sum M_O(\vec{F}_i), \quad (4.8)$$

де $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, x та y – проекції на осі координат сили $\vec{F}$ та радіуса – вектора $\vec{r}$.

Теорема про паралельне перенесення сили (метод Пуансо)



Louis Poinsot (1777-1859)

французький математик та механік, академік Паризької Академії наук, пер Франції. Відомий своїми працями в галузі геометрії та механіки.

В галузі геометричної статyki найголовнішими працями Пуансо стали мемуари «Про складання моментів і площ

у механіці» та трактат «Початки статyki». Цей трактат багаторазово перевидавався та більше століття залишався ходовим підручником статyki; у ньому геометрична статика вперше була представлена в такому аспекті, в якому її і тепер викладають у всіх вищих технічних навчальних закладах. У вступі до цього трактату Пуансо чітко доводить доцільність вивчення статyki окремо від динаміки, не розглядаючи ті рухи, які б повідомити матеріальним тілам діючі ними сили.

Однією з найважливіших заслуг Пуансо стало введення їм у статyku нової, надзвичайно важливої та плідної абстракції – пари сил. Розробці теорії пар сил присвячено суттєву частину трактату; в результаті було обґрунтовано та реалізовано можливість викладу статyki на основі принципу складання та розкладання сил, який Пуансо кладе в основу перетворень системи сил і пар, прикладених до твердого тіла.

Нехай на тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці А (рисунок 4.11).

Дія цієї сили не зміниться (згідно з другою аксіомою статyki), якщо в довільній точці В тіла прикласти дві врівноважені сили $\vec{F}'$ та $\vec{F}''$, такі, що $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$, $\vec{F}'' = -\vec{F}$. Отримана система трьох сил і являє собою силу $\vec{F}'$, рівну $\vec{F}$, але прикладену в точці В і пару $(\vec{F}, \vec{F}'')$, момент якої дорівнює $m = m_B(\vec{F})$.

Отже, силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна не змінюючи дії, що надається нею, переносити паралельно їй самої з даної точки в будь-яку іншу точку тіла, додаючи при цьому пару з моментом, рівним моменту сили, що переноситься відносно точки, куди ця сила переноситься. Тоді $\vec{F} \propto [\vec{F}', m]$, где $\vec{F}' = -\vec{F}$, $m = m_B(\vec{F})$.

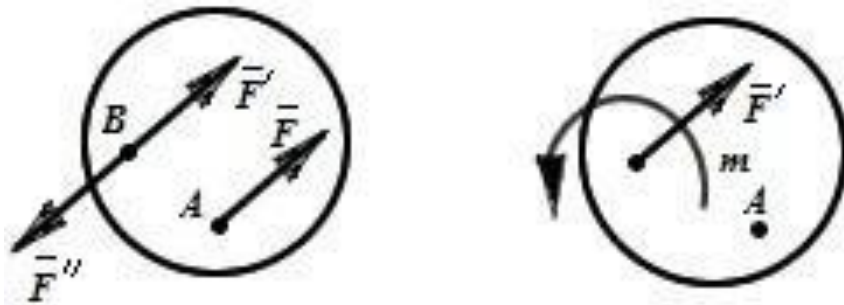


Рисунок 4.11 - Теорема про паралельне перенесення сили

4.3 Плоска система довільно розташованих сил

Система сил, довільно розташованих на площині, являє собою сукупність сил, лінії дії яких можуть бути розташовані будь-яким чином.

Нехай на тверде тіло (рисунок 4.12) діє плоска система довільно розташованих сил $F_1, F_2, \dots, F_n$. Виберемо на площині довільну точку О і, використовуючи теорему про паралельне перенесення сил, перенесемо до неї всі сили системи. В результаті приведення отримаємо систему збіжних сил точки О та систему приведених пар з моментами (рисунок 4.13):

$$M_1 = F_1 \cdot h_1, M_2 = F_2 \cdot h_2, \dots, M_n = F_n \cdot h_n, \quad (4.9)$$

де $h_1, h_2, \dots, h_n$ – плечі пар сил (рисунок 4.12).

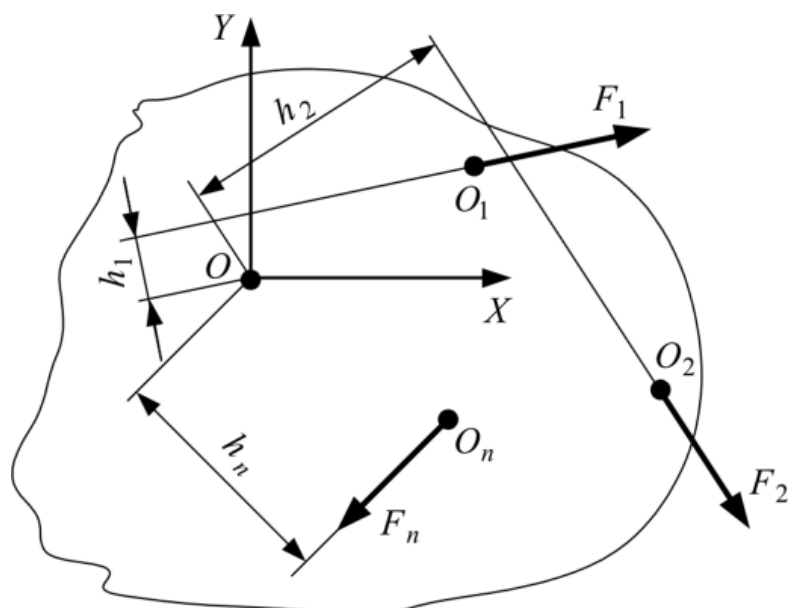


Рисунок 4.12 – Система сил

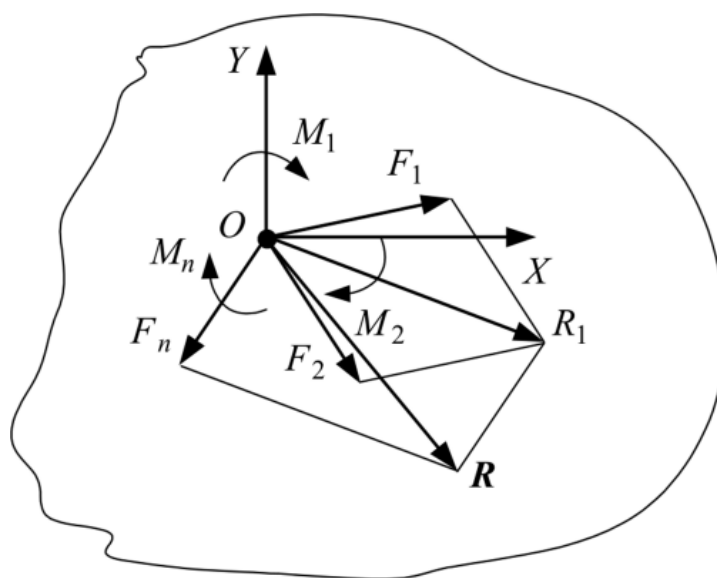


Рисунок 4.13 – Приведення сил до центру

Сили, прикладені в центрі, можна замінити рівнодієюною R , прикладеної в тому ж центрі і визначеною за формулою:

$$R = \sum \vec{F}_i' = \sum F_i \quad (4.10)$$

По теоремі про складання пар усі пари можна замінити однією парою, що лежить у тій самій площині, момент якої:

$$M = \sum M_0(F_i), \quad (4.11)$$

Величина R , що дорівнює геометричній сумі всіх сил системи, називається **головним вектором системи**.

Величина M , що дорівнює сумі моментів всіх сил системи відносно центру O , називається **головним моментом системи** відносно центру O .

Таким чином, будь-яка плоска система сил, що діють на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно взятого центру O замінюється однією силою R , яка зветься головним вектором системи, і однією парою з моментом M – головним моментом системи відносно центру O .

Дві системи, що мають однакові головні вектори та головні моменти, статично еквівалентні. Отже, для завдання плоскої системи довільно розташованих сил достатньо задати її головний вектор і головний момент відносно деякого центру O .

Отже, якщо плоску систему довільно розташованих сил можна звести до головного вектору R і головного моменту системи M , така система сил буде в рівновазі, якщо:

$$R = \sum F_i = 0; \quad M = \sum M_0(F_i) = 0, \quad (4.12)$$

З цих рівностей витікають **аналітичні умови рівноваги**.

Перша (основна) форма умови рівноваги. Так як

$$R = \sum F_i = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = 0,$$

то для рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з координатних осей і сума моментів відносно будь-якого центру, що лежить у площині дії сил, дорівнювали нулю, тобто.

$$\sum F_i(x) = 0; \quad \sum F_i(y) = 0; \quad \sum M_0(F_i) = 0, \quad (4.13)$$

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно якихось двох центрів А і В та сума їх проекцій на вісь O_x , яка не перпендикулярна до прямої АВ, дорівнювали нулю:

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad \sum M_B(F_i) = 0; \quad \sum F_i(x) = 0, \quad (4.14)$$

Третя форма умов рівноваги (рівняння моментів): для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб сума моментів усіх сил відносно будь-яких трьох центрів А, В і С, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad \sum M_B(F_i) = 0; \quad \sum M_C(F_i) = 0, \quad (4.15)$$

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожну з трьох координатних осей та суми їх моментів щодо цих осей дорівнювали нулю:

$$\sum F_i(x) = 0; \quad \sum F_i(y) = 0; \quad \sum F_i(z) = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum M_x(F_i) = 0; \quad \sum M_y(F_i) = 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0, \quad (4.17)$$

При вирішенні завдань статички аналітичним способом доцільно складати рівняння рівноваги так, щоб у кожному з них було якнайменше невідомих (в ідеалі – лише одна невідома величина). У багатьох випадках цього можна досягти раціональним вибором осей координат та центрів моментів.

Контрольні питання

- 4.1. Що називається парою сил?
- 4.2. Що визначає ефект дії пари сил?
- 4.3. Чим можна врівноважити пару сил?
- 4.4. Чи залежить ефект дії пари сил на тіло від його положення у площині?
- 4.5. Чи залежить значення та напрямку моменту сили щодо точки від взаємного розташування цієї точки та лінії дії сили?
- 4.6. Коли момент сили щодо осі дорівнює нулю?

4.7. Чи залежить момент приєднаної пари сил від відстані точки приведення до лінії дії сили?

4.8. Чи залежить значення та напрямок головного вектора від положення центру приведення?

4.9. Що називається алгебраїчним моментом сили щодо центру?

4.10. Чи можна визначити алгебраїчну суму моментів сил щодо деякої точки O , якщо задана тільки рівнодіюча цих сил R і її плече h щодо цієї точки?

4.11. Щоб визначити момент сили, необхідно знати?

4.12. Яка одиниця плеча сили?

4.13. Яка одиниця моменту сили?

4.14. Як зміниться момент сили, якщо плече сили збільшити у 2 рази?

4.15. Як зміниться момент сили, якщо зменшити плече в 2 рази?

4.16. Основна теорема статички.

4.17. Умови рівноваги системи сил, прикладеної до твердого тіла.

4.18. Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил прикладеної до твердого тіла.

4.19. Рівняння рівноваги довільної просторової системи сил прикладеної до твердого тіла.

4.20. Яку дію моменту сили вважають позитивною?

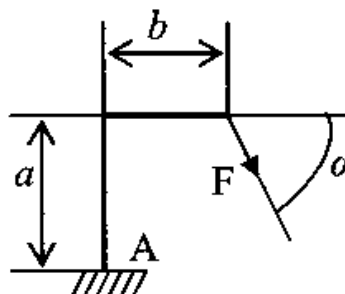
4.21. За яких умов момент сили щодо точки дорівнює нулю?

4.22. Чому дорівнює момент рівнодіючої сили?

4.23. Чому дорівнює момент сили щодо осі? За яких умов момент сили щодо осі дорівнює нулю?

4.24. Сформулюйте властивості моменту пари сил при зміні сил та плеча пари, при паралельному перенесенні пари сил.

4.25. Визначити момент сили F відносно точки A .



ТЕМА 5. РОЗРАХУНОК ФЕРМ

ПЛАН

5.1. Загальні відомості про ферми

5.2. Розрахунок плоскої ферми аналітичним та графічним методом. Метод Ріттера

5.1. Загальні відомості про ферми

Ферма (фр. *ferme*, від лат. *firme* міцно). Ще римляни володіли мистецтвом створювати з дерев'яних, складених трикутниками і укріплених розпівками балок стійкі конструкції.

Отже, **фермою** називається жорстка (кінематична незмінна) конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, з'єднаних на кінцях шарнірами. Місця з'єднання стержнів називаються **вузлами**, до яких прикладаються зовнішні сили. Вагою стержнів і тертям у шарнірах нехтують. У разі потреби врахування їх ваги вага стержнів розподіляють по вузлах. Отже, на кожний стержень ферми діють лише дві сили, прикладені по його кінцях. Тому стержні працюють або на розтяг, або на стиск. Таким чином, на кожен вузол діє система схожих сил. Якщо стержні розташовані в одній площині, така ферма називається плоскою.

У плоскій фермі розрізняють такі елементи: верхній пояс, нижній пояс, стійки, розкоси, вузли, панелі (рисунок 5.1).

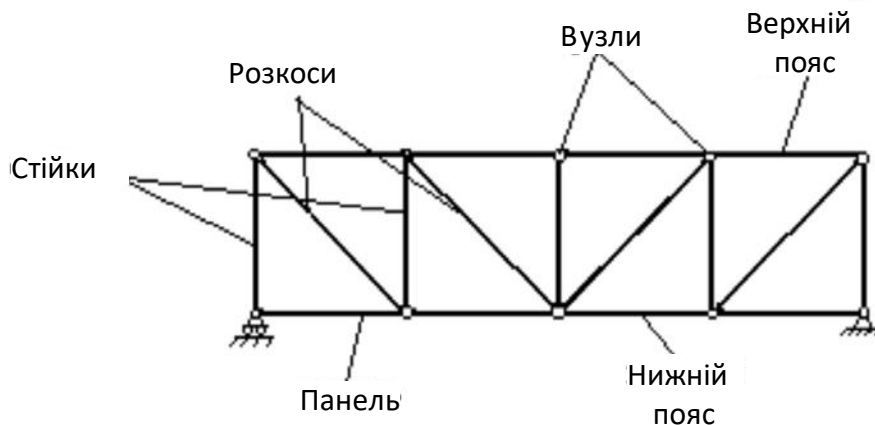


Рисунок 5.1 – Елементи ферми

Стержні, що знаходяться на верхньому контурі ферми, утворюють *верхній пояс*, а на нижньому контурі – *нижній пояс*. Стержні, що з'єднують *вузли* панелі, утворюють *решітку* ферми, при

цьому похилі стержні називаються *розкосами*, а вертикальні стержні – *стійками*. Частина ферми, що знаходиться між вузлами поясів, називається *панеллю*.

В інженерній практиці стержні зазвичай жорстко з'єднані у вузлах за допомогою зварних, заклепкових або болтових з'єднань, при цьому в жорстких вузлах виникають згинальні моменти. Однак напруження згину, порівняно з нормальним напруженням, дуже малі, тому ними при розрахунку ферми, як правило, нехтують.

Ферми використовуються (рисунок 5.2) при влаштуванні мостових переходів, перекриттів великопролітних будівель, створенні вантажопідйомних пристроїв (наприклад, будівельних кранів).



Консольний металевий міст Forth Rail Bridge (міст через затоку Ферт-оф-Форт на східному березі Шотландії).



Консольний металевий міст через річку Святого Лаврентія (Quebec Bridge over the St Lawrence River). Найбільшого прольоту консольного мосту 549 м було досягнуто 1917 року в Квебеку через річку Святого Лаврентія.



Вокзал Ватерлоо в Лондоні, Англія, 1993



Восьма Експо-виставка квітів у Ханчжоу, Китай, 2001 р.



Баштові крани Liebherr (Німецька машинобудівна компанія)



*Найбільший гусеничний кран, вироблений китайською компанією
XCMG в 2013 р.*

Рисунок 5.2 – Використання ферм

Велика різноманітність конструктивних рішень ферм ускладнює їхню класифікацію. В даний час ферми класифікують за такими ознаками:

- ▲ за характером зусиль – ферми:
 - балочні (рисунок 5.3а);
 - висячі (рисунок 5.3б),
 - комбіновані (рисунок 5.3в).
- ▲ за обрисом поясів – ферми:
 - з паралельними поясами (рисунок 5.3а);
 - з полігональними поясами (рисунок 5.4б);
 - трикутними поясами (рисунок 5.4в).
- ▲ по конфігурації решітки:
 - розкісні (рисунок 5.3а);
 - з трикутними решітками (рисунок 5.5а);
 - напіврозкосні (рисунок 5.5б);
 - багаторозкосні (рисунок 5.5в);
 - решітчаті (рисунок 5.5г).

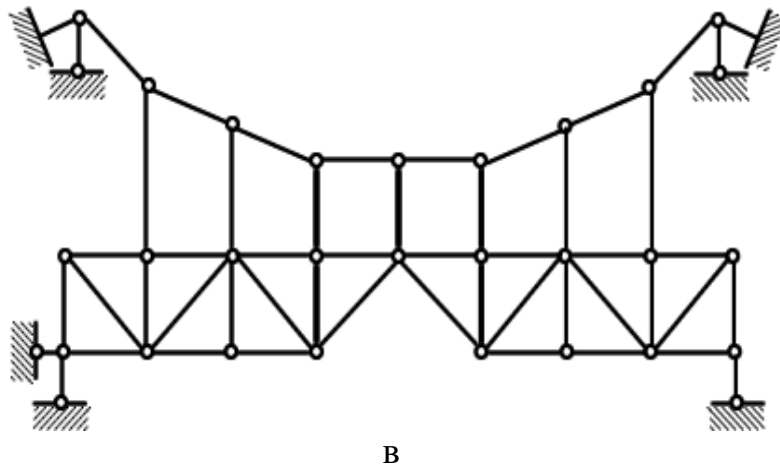
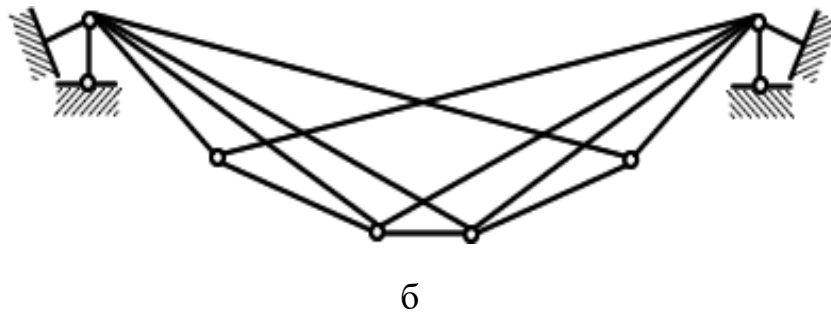
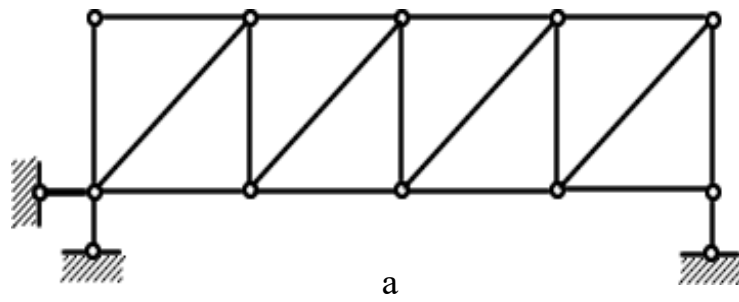
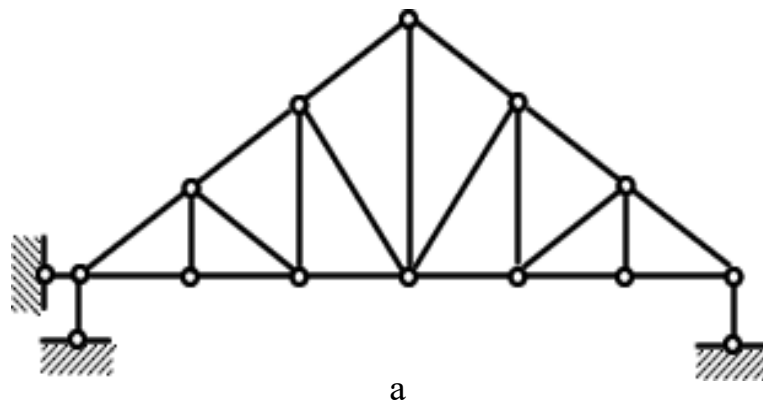
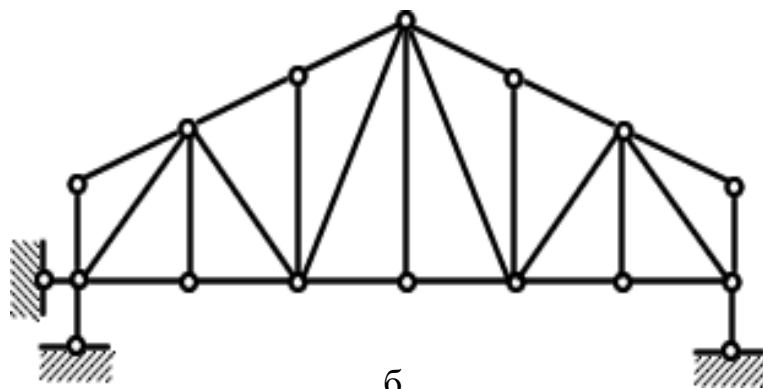
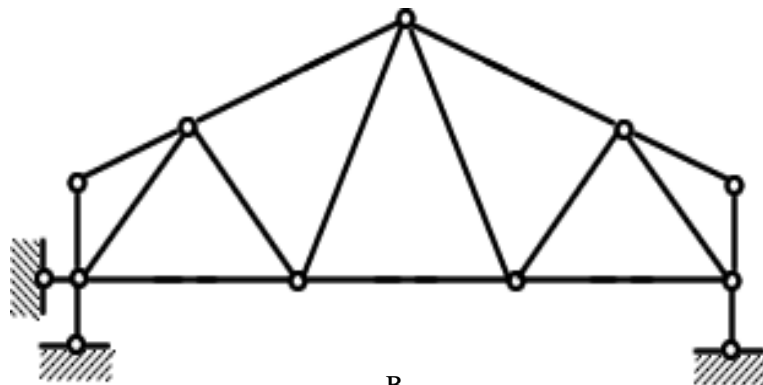


Рисунок 5.3 – Класифікація ферм за характером зусиль



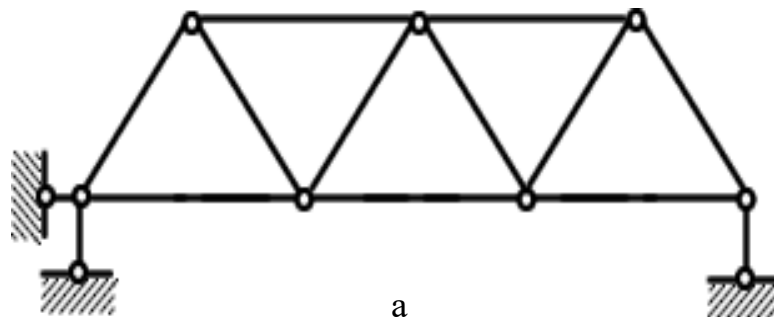


б

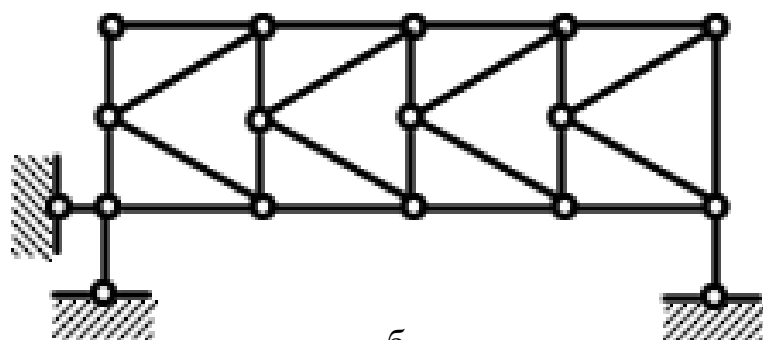


в

Рисунок 5.4 – Класифікація ферм за обрисом поясів



а



б

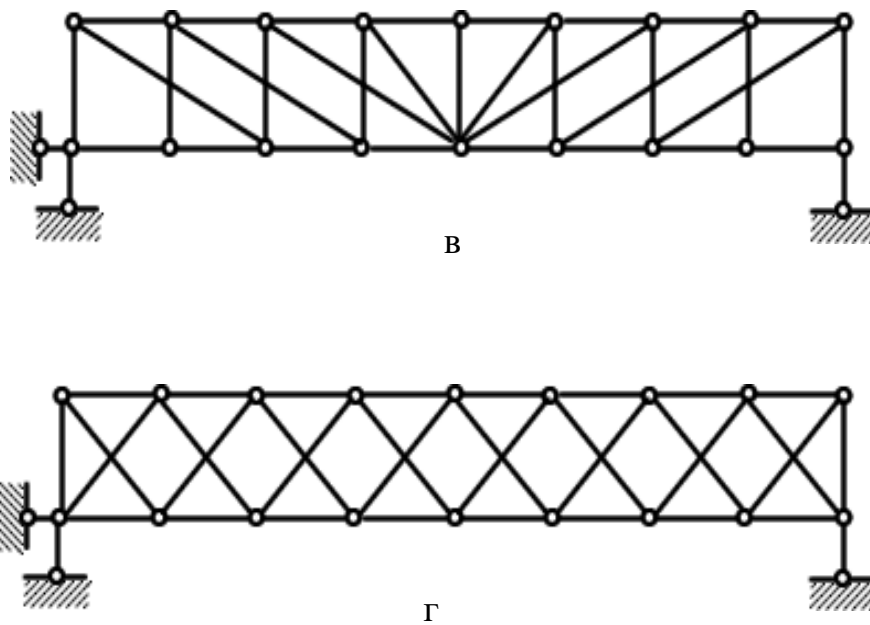


Рисунок 5.5 - Класифікація ферм по конфігурації решітки

Ферми зі складовими решітками називаються *шпренгельними* фермами. Шпренгелями називають додаткові малі фермочки, які можна розглядати як елементи верхнього чи нижнього поясів ферми (рисунок 5.6).

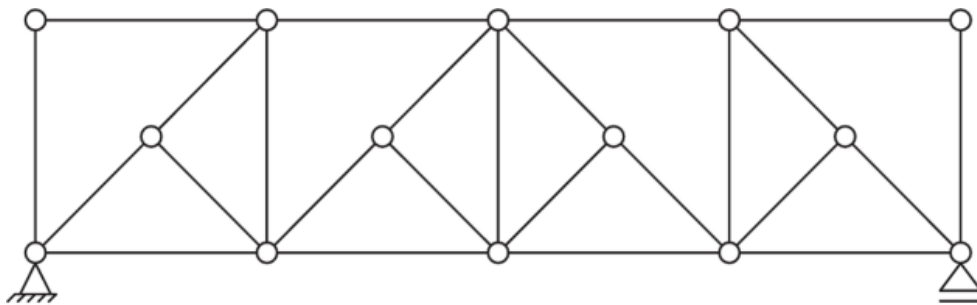


Рисунок 5.6 - Шпренгельна ферма

При влаштуванні мостових переходів ферми виконують не тільки як своє функціональне призначення, а й можуть бути архітектурно - художнім пам'ятником інженерного творчості.. Прикладом нестандартного рішення конфігурації ферми може бути Ейфелева вежа (рисунок 5.7а), «Небесне дерево» (Токіо) (рисунок 5.7б), Крайслер-білдинг, Нью-Йорк (рисунок 5.7в).



а - Ейфелева вежа



б - «Небесне дерево» (Токіо)



в - Крайслер-білдинг, Нью-Йорк

Рисунок 5.7 - Нестандартні рішення конфігурації ферми

Для плоскої статично визначеної ферми повинна виконуватися умова:

$$C = 2 \cdot U - 3, \quad (5.1)$$

де U – число вузлів ферми;

C – число стержнів.

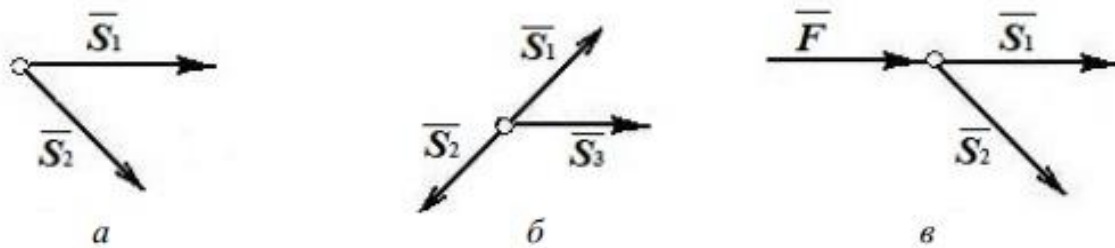
- Якщо $C > 2 \cdot U - 3$, то ферма статично невизначена;
- Якщо $C < 2 \cdot U - 3$, то конструкція є кінематичною системою, що змінюється.

Розрахунок ферми

Приступаючи до розрахунку ферми необхідно встановити, чи немає серед стержнів таких, зусилля яких рівні нулю, тобто є «нульовими».

Визначення «нульових» стержнів проводиться згідно з лемами про «нульові» стержні.

Лема I. Якщо у ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля у цих стержнях дорівнюють нулю (рисунок 5.8а).



$$\vec{S}_1 = \vec{S}_2 = 0$$

$$\vec{S}_1 = -\vec{S}_2; \vec{S}_3 = 0$$

$$\vec{S}_1 = -\vec{F}; \vec{S}_2 = 0$$

Рисунок 5.8 - «Нульові» стержні ферми

Лема II. Якщо в ненавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю, а зусилля в перших двох стержнях рівні між собою (рисунок 5.8б).

Лема III. Якщо у вузлу плоскої ферми сходяться два стержні і до вузла прикладена сила, лінія дії якої збігається з віссю одного зі стержнів, то зусилля в цьому стержні по модулю дорівнює прикладеній силі, а зусилля в іншому стержні дорівнює нулю.

Розрахунок плоских ферм полягає у визначенні реакцій зовнішніх в'язей (опорних вузлів) та зусиль у стержнях.

Порядок розв'язання задач

1. Перевірити, чи виконується умова статичної визначення ферми:

$$C = 2 \cdot Y - 3,$$

де C – число стержнів ферми;

Y – кількість вузлів.

2. Відкинути в'язі, додавши відповідні реакції. Скласти рівняння рівноваги для всієї ферми, у тому числі визначити реакції в'язей. Виконати перевірку правильності розв'язання, склавши рівняння рівноваги моментів сил відносно точки.

3. Відповідно до леми про «нульові» стержні слід видалити стержні, зусилля в яких дорівнюють нулю. Пронумерувати стержні, що залишилися, і перевірити «виправлену» ферму на статичну визначність.

4. Застосувати спосіб вирізання вузлів. Скласти рівняння рівноваги для кожного вузла ферми.

5. Спільно вирішити отриману систему рівнянь відносно невідомих зусиль у стержнях ферми. Якщо в результаті розрахунку значення зусиль в стержні буде негативним, це означає, що даний стержень *стиснутий*.

6. Перевірити результати розрахунку ферми методом перерізів (Ріттера). Для цього ферму в якомусь місці розсікти площиною, дію стержнів замінити їх реакціями та скласти рівняння рівноваги відсіченої частини. Рівняння рівноваги у формі сил чи моментів слід складати так, щоб ці рівняння містили б не більше однієї невідомої сили.

Розрахунок плоскої ферми можна здійснити як *аналітичним*, так і *графічним* способом. До аналітичних методів розрахунку ферми відносяться спосіб вирізування вузлів та спосіб перерізів (Ріттера).

5.2 Розрахунок плоскої ферми аналітичним та графічним методом

Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій та зусиль у її стержнях.

Розрахунок плоскої ферми методом вирізування вузлів

Спосіб вирізування вузлів зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги сил, що сходяться у кожному з вузлів. Для цього як об'єкт дослідження один за одним вибирають усі вузли ферми. Для кожного з них складають розрахункову схему сил та рівняння рівноваги. Спосіб вирізування вузлів зручно користуватися, коли потрібно знайти зусилля у всіх стрижнях ферми.

Приклад. До вузлів плоскої ферми (рисунок 5.9) додані зовнішні сили: $P_1 = 1$ кН; $P_2 = 5$ кН; $P_3 = 2$ кН; $P_4 = 2$ кН; $P_5 = 3$ кН; $P_6 = 3$ кН. Необхідно визначити зусилля у стержнях ферми.

Розв'язання

1. Стержні ферми заздалегідь вважатимемо розтягнутими, тоді позитивним зусиллям відповідають розтягнуті стержні, негативним – стислі. Стрижні ферми пронумеруємо арабськими цифрами (1, 2...9), вузли – римськими цифрами (I, II...VI) (рисунок 5.9). У фермі, що розглядається, число вузлів $У = 15$, число стрижнів $С = 27$.

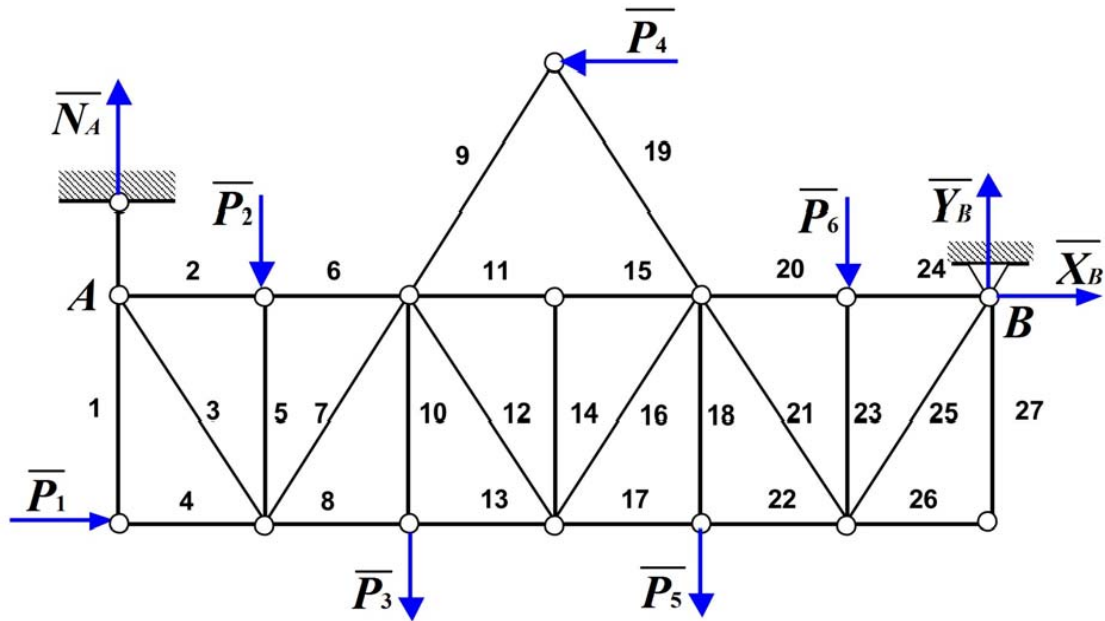


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема

Умова статичної визначення ферми:

$$C = 2 \cdot Y - 3;$$

$$27 = 2 \cdot 15 - 3.$$

Умова статичної визначності виконується. Ферма статично визначена.

2. Відкинемо зовнішні в'язі та складемо рівняння рівноваги для всієї ферми:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_B + P_1 - P_4 = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_A - P_2 - P_3 - P_5 + Y_B = 0, \quad (2)$$

$$Y_B = P_2 + P_3 + P_5 + P_6 - N_A.$$

$$M_B(F_i) = 0;$$

$$P_1 \cdot 2a + P_2 \cdot 5a + P_3 \cdot 4a + P_4 \cdot 2a + P_5 \cdot 2a + P_6 \cdot a - N_A \cdot 6a = 0, \quad (3)$$

З рівняння (1) знаходимо $X_B = P_4 - P_1 = 2 - 1 = 1$ кН.

З рівняння (3) знаходимо $N_A = 8$ кН.

З рівняння (2) знаходимо $Y_B = 5$ кН.

Перевірка. Складемо рівняння рівноваги моментів сил відносно точки А:

$$M_A(F_i) = 0;$$

$$Y_B \cdot 6a + P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a + P_4 \cdot 2a + -P_5 \cdot 4a - P_6 \cdot 5a = 0$$

$$(5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 5) \cdot a = (36 - 36) \cdot a = 0.$$

Висновок. Опорні реакції визначені правильно.

3. Відповідно до леми про «нульові» стержні за ознакою I зусилля в стержнях 26 і 27 дорівнюють нулю, тому ці стержні слід видалити. За ознакою 2 леми стійка 14 – «нульова»; зусилля в стержні 1 дорівнює нулю за ознакою 3. Видаємо зі схеми ферми всі «нульові» стержні, а силу P_1 як ковзний вектор уздовж лінії її дії та прикладемо до вузла III.

4. Пронумеруємо стержні, що залишилися та перевіримо «виправлену» ферму на статичну визначеність (рисунк 5.10).

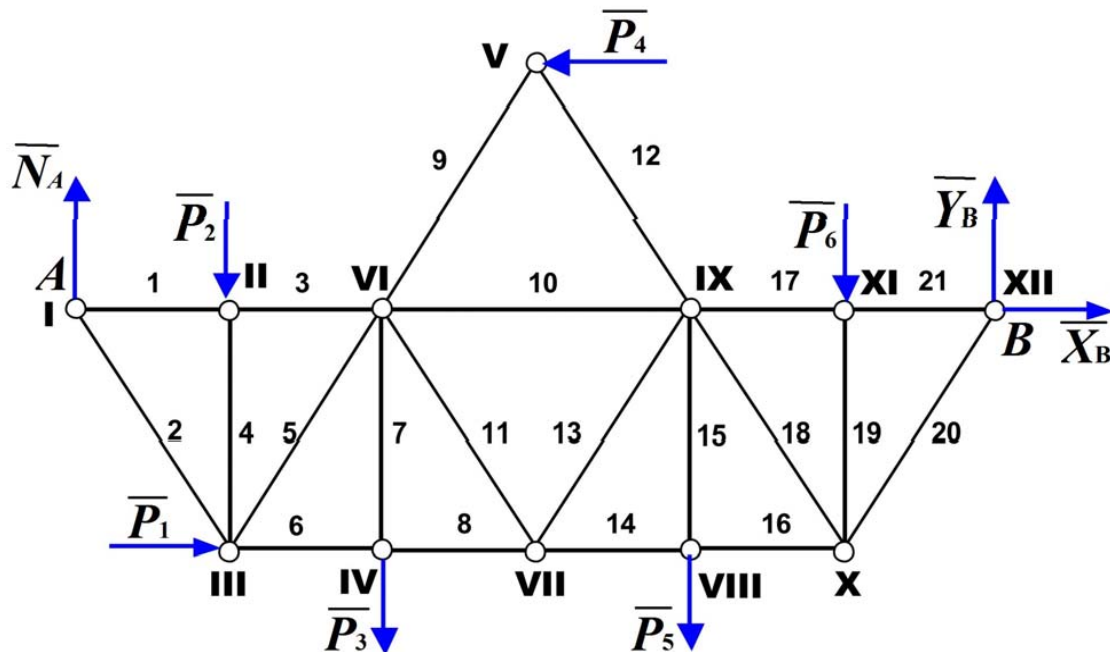


Рисунок 5.10 - Перевірка «виправленої» ферми на статичну визначеність

Арабськими цифрами позначені номери стержнів, римськими цифрами – номери вузлів. Число вузлів дорівнює 12, число стрижнів дорівнює 21. Умову статичної визначності запишемо у вигляді:

$$C = 2 \cdot Y - 3 = 2 \cdot 12 - 3 = 21.$$

Ферма жорстка, статично визначна.

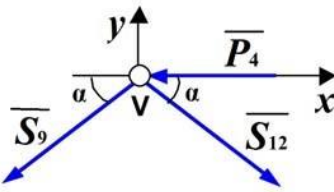
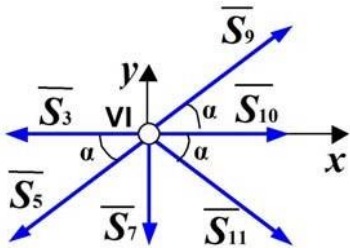
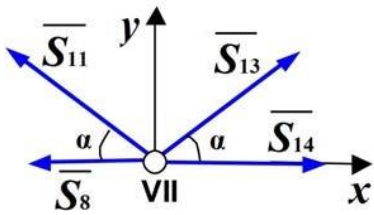
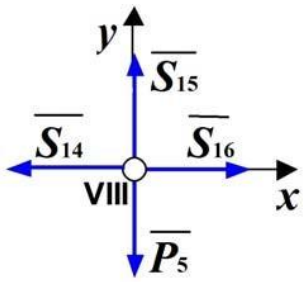
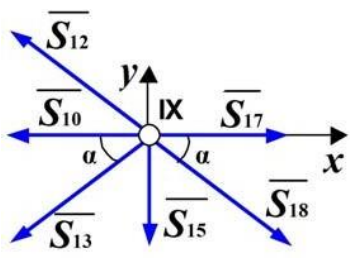
5. Застосуємо спосіб вирізування вузлів. Складемо рівняння рівноваги для кожного вузла ферми.

Результати запишемо у вигляді таблиці 5.1.

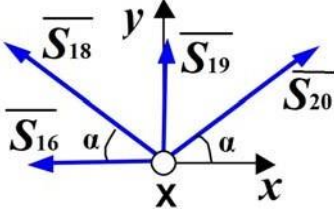
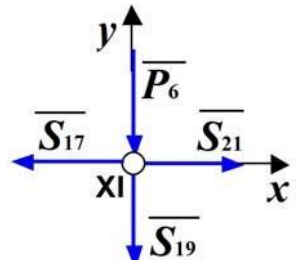
Таблиця 5.1 - Результати розрахунків

Рисунок	Рівняння рівноваги
1	2
	Рівняння рівноваги для першого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; N_A - S_2 \cdot \sin\alpha = 0,$ де: $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447214$ $\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894427$
	Рівняння рівноваги для другого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; S_3 - S_1 = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; -P_2 - S_4 = 0,$
	Рівняння рівноваги для третього вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; P_1 + S_6 + (S_5 - S_2) \cdot \cos\alpha = 0$ $\sum F_{iy} = 0; S_4 + (S_2 - S_5) \cdot \sin\alpha = 0.$
	Рівняння рівноваги для четвертого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; -S_6 + S_8 = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; S_7 + P_3 = 0.$

Продовження таблиці 5.1

1	2
	Рівняння рівноваги для п'ятого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; \quad -P_4 + (S_{12} - S_9) \cdot \cos\alpha = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; \quad (S_{12} + S_9) \cdot \sin\alpha = 0.$
	Рівняння рівноваги для шостого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0;$ $-S_3 + (S_{11} + S_9 - S_5) \cdot \cos\alpha + S_{10} = 0;$ $\sum F_{iy} = 0;$ $(S_9 - S_5 - S_{11}) \cdot \sin\alpha - S_7 = 0.$
	Рівняння рівноваги для сьомого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0;$ $-S_8 + S_{14} + (S_{31} - S_{11}) \cdot \cos\alpha = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; \quad (S_{11} + S_{13}) \cdot \sin\alpha = 0.$
	Рівняння рівноваги для восьмого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; \quad -S_{16} - S_{14} = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; \quad S_{15} - P_5 = 0.$
	Рівняння рівноваги для дев'ятого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0;$ $S_{17} + (S_{18} - S_{13} - S_{12}) \cdot \cos\alpha + S_{10} = 0;$ $\sum F_{iy} = 0;$ $(S_{12} - S_{12} - S_{18}) \cdot \sin\alpha - S_{15} = 0.$

Продовження таблиці 5.1

1	2
	Рівняння рівноваги для десятого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; (S_{20} - S_{18}) \cdot \cos\alpha - S_{16} = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; S_{19} + (S_{18} + S_{20}) \cdot \sin\alpha = 0.$
	Рівняння рівноваги для десятого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; S_{21} - S_{17} = 0$ $\sum F_{iy} = 0; -S_{19} - P_5 = 0$

Спільно вирішимо отриману систему рівнянь відносно невідомих $(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_{21})$.

Результати рішення:

$S_1 = -4$ кН; $S_2 = 8,94$ кН; $S_3 = -4$ кН; $S_4 = -5$ кН; $S_5 = -3,35$ кН;

$S_6 = 4,5$ кН; $S_7 = 2$ кН; $S_8 = 4,5$ кН; $S_9 = -2,24$ кН; $S_{10} = -4$ кН;

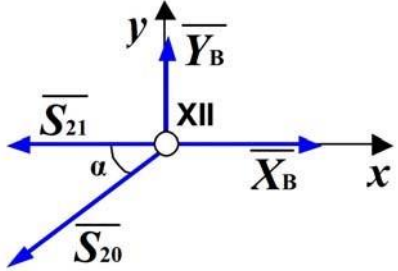
$S_{11} = -1,12$ кН; $S_{12} = 2,24$ кН; $S_{13} = 1,12$ кН; $S_{14} = 3,5$ кН;

$S_{15} = 3$ кН; $S_{16} = 3,5$ кН; $S_{17} = -1,5$ кН; $S_{18} = -2,24$ кН;

$S_{19} = -3$ кН; $S_{20} = 5,59$ кН; $S_{21} = -1,5$ кН.

Якщо в результаті розрахунку значення зусилля в стержні буде негативним, це означає, що даний стержень стиснутий.

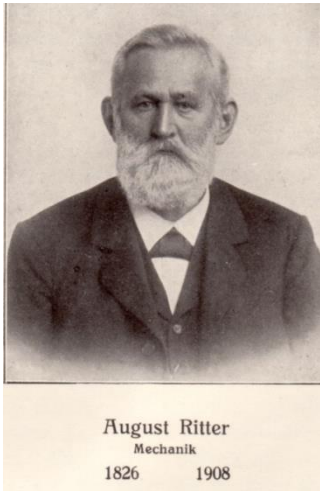
Перевірка правильності розв'язання.

	Рівняння рівноваги для дванадцятого вузла ферми: $\sum F_{ix} = 0; X_B - S_{21} - S_{20} \cdot \cos\alpha = 0;$ $\sum F_{iy} = 0; Y_B - S_{20} \cdot \sin\alpha = 0.$ $1 - (-1,5) - 5,59 \cdot 0,447214 = 0;$ $5 - 5,59 \cdot 0,894427 = 0.$
---	---

Розрахунок зроблений правильно.

Перевірка результатів розрахунку ферми методом перерізів. Метод Ріттера

Розглянемо другий аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми. Це метод Ріттера, чи метод перерізів.



Метод Ріттера (метод перерізів або моментних точок), розроблений в 1862 німецьким механіком Августом Ріттером, застосовується головним чином для розрахунку плоских ферм.

Цей метод має кілька переваг у порівнянні з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. Тут немає необхідності складати велику кількість рівнянь рівноваги вузлів, особливо коли багатостержнева ферма. Крім того, у разі неточності розрахунку якогось стержня, надалі ця помилка накопичується при розрахунках інших стрижнів. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

Метод Ріттера є точним і простим способом визначення зусиль у стержнях за рахунок спеціального розрізу (перетину) ферми. Розріз при цьому має відповідати певним умовам:

- ◆ поділити ферму на дві незв'язані частини;
- ◆ перетинати максимально три допустимі стрижні;
- ◆ у кожній з частин необхідно наявність хоча б одного стержня.

У бік перерізу направляються шукані (невідомі) реакції розрізаних стержнем, що відповідатиме позитивним зусиллям розтягнутих стрижнів. Стиск стержня характеризує зусилля з негативним знаком.

Уявному розрізанню ферми та позначенню зусиль передують складання рівнянь рівноваги для обраної частини ферми:

$$\sum M = 0 \text{ (відносно точки Ріттера)}$$

Рівняння вигідно записувати у вигляді рівності нулю суми моментів всіх сил відносно трьох різних центрів, які є точками, у яких попарно перетинаються розрізані стержні чи його продовження. Ці точки звуться **точками Ріттера**. Її місцезнаходження відзначено перетином ліній дії зусиль у двох інших стрижнях. При цьому точка може бути або на фермі, або безпосередньо на продовженні стержнем (що далеко за межами ферми). Якщо така точка відсутня (при

паралельності стержнів), то рівняння моментів замінює рівняння проекцій на вісь, яка перпендикулярна до паралельних стержнів.

Метод Ріттера не вважається універсальним. Так, трапляються випадки відсутності перерізу Ріттера для конкретного стержня. Головним у цьому методі є існування незалежного способу визначення зусиль в такий спосіб, щоб виключити вплив значення одного на значення іншого.

Отже, для перевірки розрахунку застосуємо спосіб перерізів (Ріттера).

Для цього ферму в якомусь місці розсікти площиною, дію стержнів замінити їх реакціями та скласти рівняння відсіченої частини. Рівняння рівноваги у формі сил чи моментів слід складати так, щоб ці рівняння містили б не більше однієї невідомої сили.

Наприклад, провівши перетин I–I, можна розглянути рівновагу правої та лівої її частин. Доцільно розглянути рівновагу лівої частини, тому що тут менше сил (рисунок 5.11).

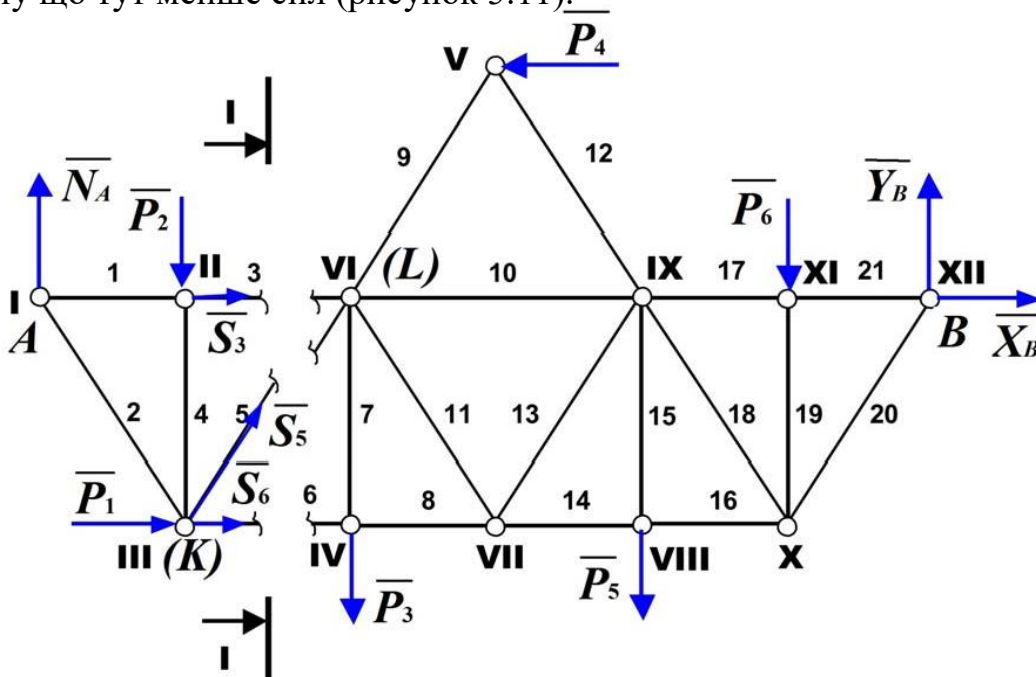


Рисунок 5.11 – Метод Ріттера

Складемо рівняння рівноваги для лівої частини:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_A - P_2 + S_5 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$M_L(F_i) = 0; \quad P_2 \cdot a + P_1 \cdot 2a + S_6 \cdot 2a - N_A \cdot 2a = 0, \quad (2)$$

$$M_K(F_i) = 0; -N_A \cdot a - S_3 \cdot 2a = 0. \quad (3)$$

$$\text{З рівняння (1): } S_5 = \frac{P_2 - N_A}{0,894427} = \frac{5-8}{0,894427} = -3,35 \text{ кН.}$$

$$\text{З рівняння (2): } S_6 = \frac{N_A - P_1 - P_2}{2} = \frac{8-1-5}{2} = 4,5 \text{ кН}$$

$$\text{З рівняння (3): } S_3 = \frac{-N_A}{2} = \frac{-8}{2} = -4,0 \text{ кН.}$$

Перевірка показала, що розрахунок сил у стрижнях 3, 5 і 6 здійснено правильно.

Графічний метод. Побудова діаграми Максвелла-Кремони

Діаграмою Максвелла – Кремони називається застосовуваний графічний метод визначення зусиль статично визначних плоских ферм. Його розробниками були англійський фізик Дж Максвелл та італійський математик Л Кремона.



Максвелл Джеймс Клерк (1831 – 1879), англійський фізик. Вважається, що першим в 1864 метод запропонував Дж. Максвелл, а через 8 років - Л. Кремона.



Луїджі Кремона (1830 - 1903) - італійський математик. Головні напрями досліджень присвячені нарисній геометрії, графостатиці, алгебраїчній геометрії та графічним методам у механіці.

Діаграма Максвелла - Кремони дає наочне уявлення про сили в стержнях ферми, ступеня нерівномірності навантаження та характер їх роботи (розтяг або стиск). Крім того, діаграма Максвелла - Кремони дозволяє виконати загальну перевірку розрахунку ферми: якщо розрахунок виконано правильно, то діаграма буде замкнута, якщо ж в розрахунку були допущені помилки, то діаграма не замкнеться.

Вектори сил на діаграмі прийнято позначати двома малими літерами, відповідними позначенням тих полів, для яких лінія дії сили або стержень є границя.

Початок і кінець кожної сили позначаються тими самими літерами, якими позначено дві суміжні області, розмежовані лінією дії цієї сили. При цьому послідовність букв від початку до кінця сили повинна відповідати прийнятому напрямку обходу. Наприклад, сила $\vec{P}_1$ позначена літерами ia , сила реакції в'язі в точці А $\vec{N}_A$ позначена літерами ac , сила $\vec{P}_2$ позначена cd і т.д.

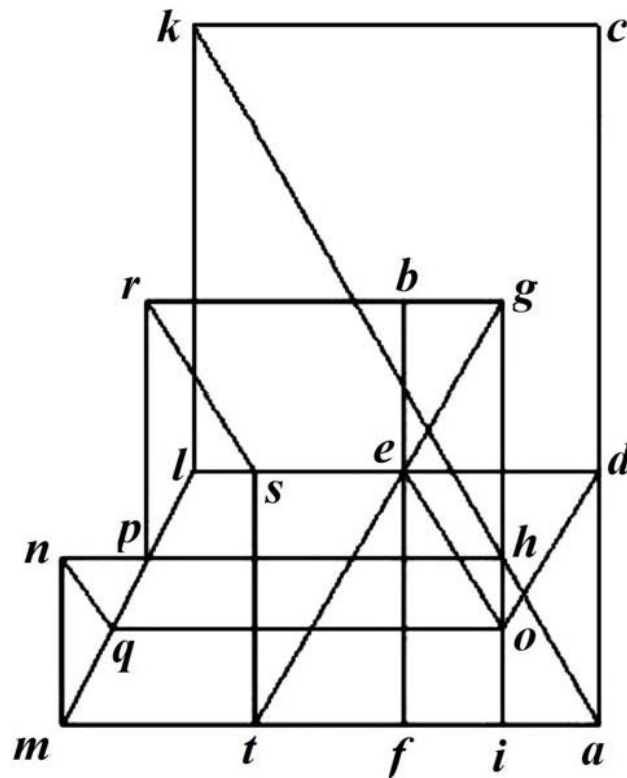


Рисунок 5.13 - Діаграма Максвелла – Кремони

До цього багатокутника зовнішніх сил послідовно прибудовуються силові трикутники для вузлів I – XI, починаючи з вузла, у якому сходиться трохи більше двох стержнів. Наприклад, на вузол I діє одна зовнішня сила $\vec{N}_A$ та реакції стержнів 1 та 2. Провівши через точку A пряму, паралельну стержню 2, а через точку C – пряму, паралельну стержню 1, отримаємо силовий трикутник АСК, в якому СК – реакція стержня 1, а АК – реакція стержня 2. Далі будуються силові трикутники для інших вузлів ферми.

Зазначене правило побудови плану сил дозволяє визначити як величину сили, а й її знак, тобто встановити, чи буде даний стержень розтягнутий чи стиснутий. Обходячи, наприклад, вузол 3 по ходу стрілки годинника, зустрічаємо стержень 5 (lm). Перша літера l , друга – m . Отже, стержень 5 стиснутий, тому що вектор lm спрямований до вузла. Якщо виникає необхідність визначити знак сили в стержні 13 (qr), роблять обхід вузла 7. Перша буква q , друга – r . Вектор згідно діаграми Максвелла спрямований від вузла. Отже, стержень 13 розтягнутий.

Аналогічно визначаються знаки зусиль і в інших стержнях ферми.

У практичних розрахунках ферм на даний час цей метод не застосовується як застарілий. На зміну йому прийшли аналітичні (метод вирізування вузлів, метод Ріттера) та комп'ютерні методи.

Контрольні питання

5.1. Що називають в'яззю? У чому полягає суть принципу звільнення від зв'язків?

5.2. Перерахуйте основні типи опор.

5.3. Як визначається напрямок рівнодіючої системи збіжних сил при побудові силового багатокутника?

5.4. Як формулюються леми про нульові стрижні?

5.5. У якому порядку вирізуються вузли при розрахунку ферми з способу вирізування вузлів?

5.6. Чи можна під час розрахунку ферми за способом вирізування вузлів визначити зусилля лише в одному довільно взятому стрижні?

5.7. Чи залежить головний вектор і головний момент заданої системи сил від вибору центру приведення?

5.8. Які умови та рівняння рівноваги плоскої системи сил на площині?

5.8. У чому полягає суть способу наскрізних перерізів (Спосіб Ріттера)?

5.9. Як визначити положення точок Ріттера?

5.10. Чи можна під час розрахунку ферми за способом наскрізних перерізів визначити зусилля лише в одному довільно взятому стрижні?

5.11. У чому полягають переваги та недоліки визначення зусиль у стержнях ферми за способом вирізування вузлів?

5.12. У чому полягають переваги та недоліки способу Ріттера?

5.13. Як визначається внутрішній зусилля стержня (розтяг чи стиск) при аналітичних способах розрахунку ферми?

5.14. Як визначаються внутрішні зусилля стержня (розтяг або стиск) графічним методом розрахунку?

5.15. Які аналітичні та графічні умови рівноваги системи збіжних сил?

5.16. Чим відрізняються один від одного замкнутий та незамкнений силовий багатокутник?

ТЕМА 6. ТЕРТЯ КОВЗАННЯ ТА ТЕРТЯ КОЧЕННЯ

ПЛАН

6.1 Тертя ковзання. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя ковзання

6.2 Тертя кочення. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя кочення

Сила тертя

Коли ви гладите кота, катаєтесь на велосипеді, мисте підлогу і чухаєте п'яту, ви стикаєтесь з таким поняттям, як **сила тертя**. Що це таке і як впливає на наше життя?

З силою тертя ви стикаєтесь буквально щосекунди. Щоразу, коли ви взаємодієте з будь-якою поверхнею – йдете по асфальту, сидите на стільці, п'єте чай із чашки – на вас діє сила тертя.

Чому звучить скрипка, коли по струнах проводять смичком? Чому на мокрій дорозі автомобілю складніше загальмувати? Ви стоїте на абсолютно гладкій поверхні крижаного озера. Як зрушити з місця? Як зняти тісне кільце з пальця? Відповіді на ці питання можна отримати, докладно вивчивши таку важливу тему, як закон сили тертя.

Тертя - це і є взаємодія у площині дотику двох поверхонь.

Щоб перекласти тертя мовою фізики, вводиться поняття сила тертя.

Сила тертя - це величина, яка характеризує процес тертя за величиною та напрямком.

Вимірюється сила тертя, як і будь-яка сила – у Ньютонах.

Виникає сила тертя з двох причин:

♦ Різні шорсткості, подряпини та інші «недосконалості» поверхонь. Ці дефекти зачіпають один одного при дотику і створюється сила, що гальмує рух.

♦ Коли поверхні, що контактують, практично гладкі (до ідеалу довести неможливо, але прагнути до нього - значить спрямовувати силу тертя до нуля), то відстань між ними стає мінімальною. І тут виникає взаємне тяжіння молекул речовин цих поверхонь. Тяжіння обумовлено взаємодією між електричними зарядами атомів. У зв'язку

з цим часто можна почути формулювання «Сила тертя — сила електромагнітної природи».

Спрямована сила тертя завжди проти швидкості тіла. У цьому плані все просто, але завжди є питання: «**Куди сила тертя прикладена?**»

Ми вже з'ясували, що тертя виникає між двома поверхнями. Отже, сила тертя має бути прикладена саме до поверхні (рисунок 6.1а). Це буде справедливо, але ми вирішуємо завдання, в якому тіло приймається за матеріальну точку (коли розмірами та формою тіла можна знехтувати). І тут прикладаємо силу тертя до центру тіла (рисунок 6.1б)

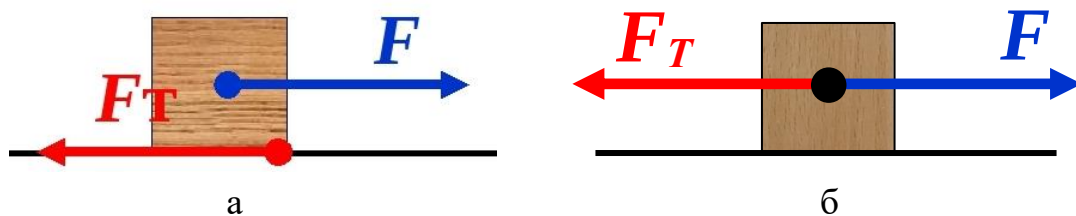


Рисунок 6.1 – Напрямок силі тертя

У завданнях часто пишуть щось на зразок: «Поверхня вважати ідеально гладкою». Це означає, що сила тертя у цій задачі відсутня. Так, у реальному житті це неможливо, але в ім'я красивої математичної моделі тертям часто нехтують. Не хвилюйтесь через цю несправедливість, а просто вирішуйте завдання без тертя, якщо побачили словосполучення «гладка поверхня».

Якщо ви вирішите зрушити з місця вантажівку, навряд чи це вдасться. Не те, щоб ми у вас не віримо - просто це неможливо зробити через те, що маса людини набагато менше маси вантажівки, та ще й сила тертя заважає це зробити. Світ жорстокий, що тут вдієш.

Якщо сила тертя є, але тіло не рухається з місця, ми маємо справу з силою **тертя спокою**.

Сила тертя спокою дорівнює силі тяги. Наприклад, якщо ви намагаєтесь зрушити з місця санки, діючи на них із силою тяги 10 Н, то сила тертя дорівнюватиме 10 Н.

Види сили тертя

Залежно від виду поверхонь, що труться, розрізняють сухе і в'язке тертя. У свою чергу обидва поділяються на інші види сили тертя.

Сухе тертя виникає в області контакту поверхонь твердих тіл без рідкого або газоподібного прошарку. Цей вид тертя може виникати навіть у стані спокою або внаслідок перекочування одного тіла по іншому, тому тут виділяють три види сили тертя (рисунок 6.2):

- тертя спокою;
- тертя кочення;
- тертя ковзання.

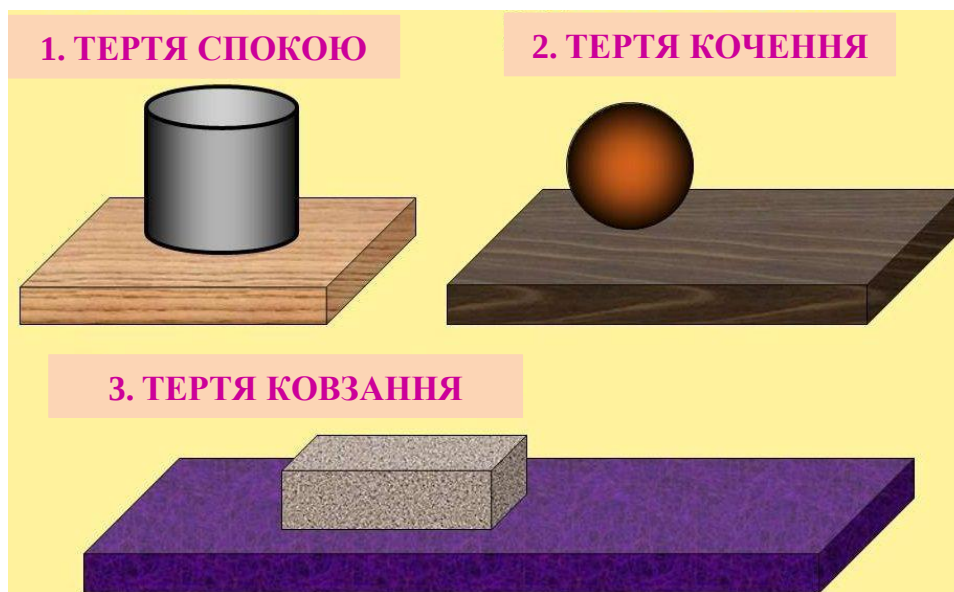


Рисунок 6.2 - Види сили тертя

В'язке тертя виникає під час руху твердого тіла у рідині чи газі. Воно перешкоджає руху човна, який ковзає по річці, або впливає на літак з боку повітря. Цікава особливість в'язкого тертя у тому, що відсутнє тертя спокою. Спробуйте зрушити пальцем дерев'яний брус, що лежить на землі, і проробіть той же експеримент, опустивши брус на воду. Щоб зрушити брус з місця у воді, буде достатньо скільки завгодно малої сили. Проте зі зростанням швидкості сили в'язкого тертя сильно збільшуються.

6.1 Тертя ковзання. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя ковзання

А тепер давайте ковзати на ковзанах по льоду. Ковзанка досить гладка, але, як ми вже з'ясували, сила тертя все одно буде присутнє і обчислюватиметься за формулою (6.2). Сила тертя, яку ми отримаємо

за цією формулою, буде максимально можливою – тобто більше вже нікуди.

▲ Опір ковзанню одного тіла (повзуна) поверхнею іншого тіла називається **тертям ковзання**.

Реакція шорсткої опорної поверхні на тіло $\vec{R}$, що спирається, складається з сили $\vec{N}$ – *нормального тиску* та сили $\vec{F}$ – *тертя ковзання* (рисунок 6.2).

Нормальна складова $\vec{N}$ реакції основи перешкоджає вдавлюванню тіла в основу.

Сила $\vec{F}$ – тертя ковзання перешкоджає ковзанню тіла по опорній поверхні. Вона є мірою опору ковзанню повзуна по опорній поверхні. Реакція шорсткої опорної поверхні на тіло, що спирається, при точковому контакті (рисунок 6.3) прикладена в точці контакту, при поверхневому контакті (рисунок 6.4) - в точці, положення якої невідомо.

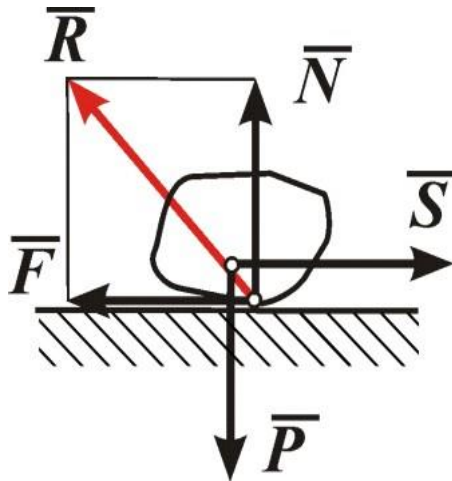


Рисунок 6.3 – Контакт точковий

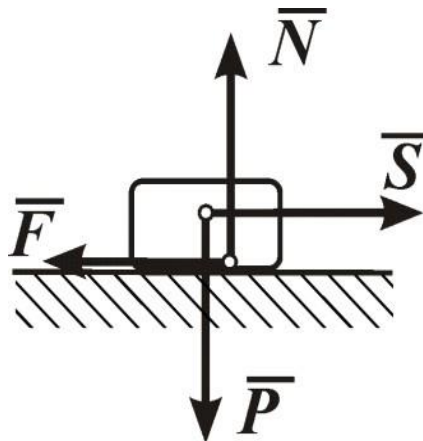


Рисунок 6.4 – Контакт поверхневий

Можна сформулювати такі закони тертя ковзання.

▲ Сила тертя ковзання спрямована протилежно до напрямку зсуву повзуна по опорній поверхні.

▲ Модуль сили тертя ковзання при спокої тіла, що спирається (*тертя спокою*) може мати будь-яке значення між нулем і максимальним (або граничним) значенням у момент, що передуює зсуву (*критична рівновага*).

$$0 \leq F \leq F_{max}, \quad (6.1)$$

▲ Модуль сили F_{max} пропорційний нормальному тиску:

$$F_{max} = f \cdot N, \quad (6.2)$$

де f - коефіцієнт тертя ковзання.

f - визначається матеріалом і станом поверхні тіл, що труться, й не залежить від площі контакту дотичних тіл.

Зокрема:

$f = 0,4 \dots 0,7$ – дерево по дереву;

$f \approx 0,6 \dots 0,81$ – гума по асфальту;

$f = 0,15 \dots 0,25$ - метал по металу.

Кутом тертя називається максимальний кут відхилення сили реакції опорної поверхні на повзун від нормалі до неї (рисунок 6.5), де

$$\vec{R}_{max} \sim (\vec{F}_{max}, \vec{N}), \quad (6.3)$$

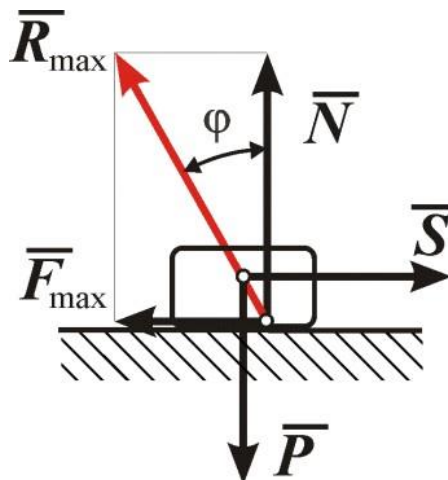


Рисунок 6.5 – Кут тертя

Неважко бачити, що:

Якщо зовнішня сила, що діє на повзун, лежить усередині кута тертя, то тіло залишиться в рівновазі, як би не була велика ця сила.

Справді, розглянемо рівновагу повзуна на шорсткій основі (рисунок 6.6).

Нехай $\vec{Q}$ – зовнішня сила – спрямована під кутом α до вертикалі.

При рівновазі:

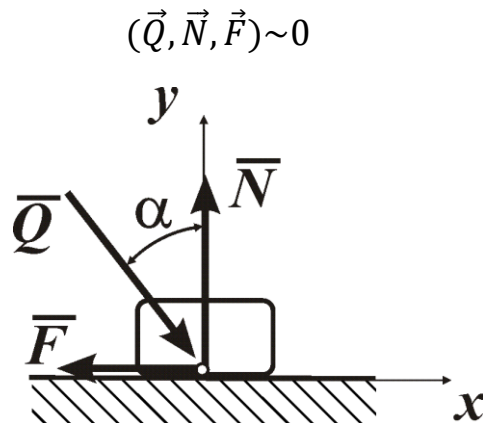


Рисунок 6.6- Рівновага повзуна на шорсткій основі

Умови рівноваги даної плоскої системи збіжних сил запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= Q \cdot \sin \alpha - F = 0 \Rightarrow Q \cdot \sin \alpha = F \\ \sum F_y &= N - Q \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow Q \cdot \cos \alpha = N \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{N} \leq f = \operatorname{tg} \varphi, \quad (6.4)$$

$$\alpha \leq \varphi.$$

Конус, утворювальна якого являється лінією дії сили реакції шорсткої поверхні $\vec{R}_{\max}$ називається **конусом тертя** (рисунок 6.7).

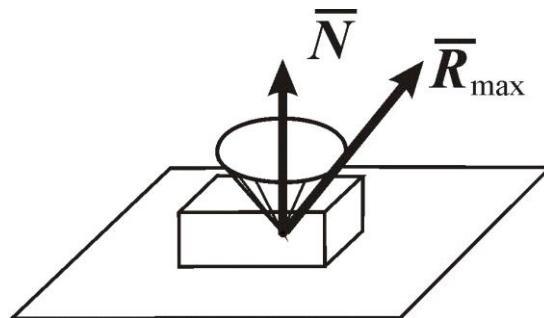


Рисунок 6.7 – Конус тертя

Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя ковзання

Рівняння завдань на рівновагу тіла на шорсткій поверхні складаються з умов рівноваги сил, врівноважених на тілі після звільнення від в'язей, та рівняння тертя ковзання, яке являється рівністю:

$$F_{max} = f \cdot N,$$

якщо розглядається *критична рівновага*.

Або нерівністю

$$F \leq f \cdot N,$$

якщо розглядається *докритична рівновага* тіла.

Оскільки у другому випадку система рівнянь задачі містить одну нерівність, то для шуканої величини S вийде область її значень, обмежена граничними значеннями цієї величини, що відповідають критичним рівновагам тіла на зсув в одну та в іншу сторону.

$$S_{min} < S \leq S_{max}, \quad (6.5)$$

Розглянемо повзун вагою P на шорсткій несамотормозній похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Повзун утримується силою S (рисунок 6.8).

Якщо стан рівноваги передуює зсуву повзуна *вниз*, то $S = S_{min}$ ще утримує повзун на похилій площині.

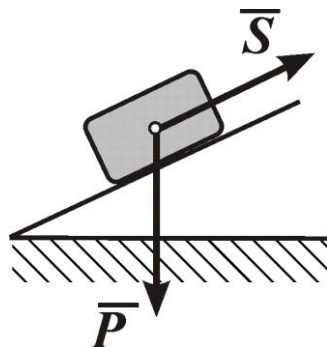


Рисунок 6.8 – Повзун

Якщо ж гранична рівновага передуює зсуву повзуна *вгору*, то $S = S_{max}$.

При всіх $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$ рівновага повзуна буде докритичною.

Складемо рівняння критичної рівноваги повзуна на зсув *вниз* (рисунок 6.9):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= S_{\min} + F_{\max} - P \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N - P \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

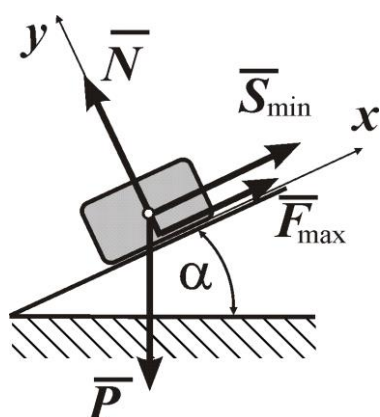


Рисунок 6.9 – Зсув повзуна вниз

Рівняння критичної рівноваги повзуна на зсув *вгору* (рисунок 6.10)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= S_{\max} - F_{\max} - P \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N - P \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Рівняння (6.6) та (6.7) відрізняються знаком проекції сили тертя.

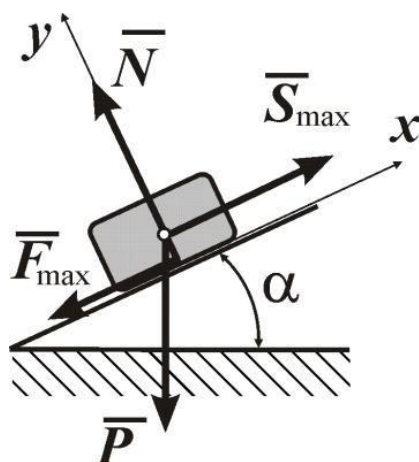


Рисунок 6.10 – Зсув повзуна вгору

Модуль сили тертя в обох випадках критичної рівноваги знайдеться за формулою (6.2):

$$F \leq f \cdot N,$$

Вирішуючи системи рівнянь (6.6) та (6.7) з урахуванням (6.2) отримаємо:

$$S_{min} = P(\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha);$$

$$S_{max} = P(\sin\alpha + f \cdot \cos\alpha).$$

Значення S_{min} та S_{max} відрізняються лише знаками при членах, що містять коефіцієнт тертя.

Тому, при вирішенні завдань, у яких можливі два критичні положення рівноваги, немає необхідності розглядати обидва ці випадки. Достатньо розглянути одне з них і, отримавши відповідь в формі алгебри, записати вираз для другого граничного значення.

6.2 Тертя кочення. Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя кочення

«Катити легше, ніж тягти»

У повсякденному житті ми користуємося перевагами кочення практично щодня:

♦ тяжкі, великогабаритні предмети можна легко перемістити, підклавши під них круглі катки або труби. Наприклад, щоб пересувати асфальтом чавунну болванку масою в 1 тону, потрібно прикласти силу в 200 кгс – на таке здатні тільки могутні силачі. А на візку котити цю болванку зможе навіть дитина, адже для цього потрібна сила не більше 10 кгс;

♦ усі транспортні засоби, що переміщаються поверхнею землі, використовують колеса;

♦ для полегшення підйому важких предметів на висоту з давніх-давен застосовується блок, що має форму колеса;



♦ роликові й кулькові підшипники кочення застосовуються у всіх пристроях, коли потрібно домогтися мінімального тертя в деталях, що обертаються.

Звичайно, винахід колеса - це одне з найвидатніших досягнень людської цивілізації.



Отже, сила тертя кочення - це сила, що виникає при коченні тіла поверхнею без прослизання. Істотним моментом у цьому визначенні є виключення прослизання, тому що при прослизанні тертя зростає в десятки разів!

При рівних силах нормального тиску сила тертя ковзання більша за силу тертя кочення. Це часто використовують, наприклад, ставлячи коліщатка на валізу. Та й взагалі, ставлячи коліщатка куди завгодно.

Таким чином, опір коченню одного тіла (катка) на поверхні іншого тіла (основи) називається **тертям кочення**.

Тертя кочення виникає за наявності деформації шорстких поверхонь тіл у точці контакту.

Справді, якщо поверхні катка і основи абсолютно тверді, їх контакт буде точковим і навіть за наявності навіть скільки завгодно малої сили S , що зрушує (рисунок 6.11).

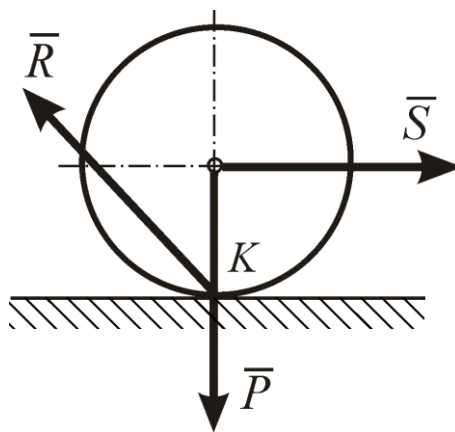


Рисунок 6.11– Тертя кочення

$$\sum M_K F \neq 0 \quad \forall (\text{для всіх}) S, \quad (6.8)$$

Отже, в даному випадку тертя кочення немає.

За наявності деформації на ділянці контакту реакція основи представляє собою систему розподілених сил. Після приведення цих сил до нижньої точки катка вони замінюються однією **результуючою силою** та однією **результуючою парою**.

Результуючу силу зазвичай зображують двома складовими N та F . Пару сил позначимо $M_{\text{тр}}$ (рисунок 6.12).

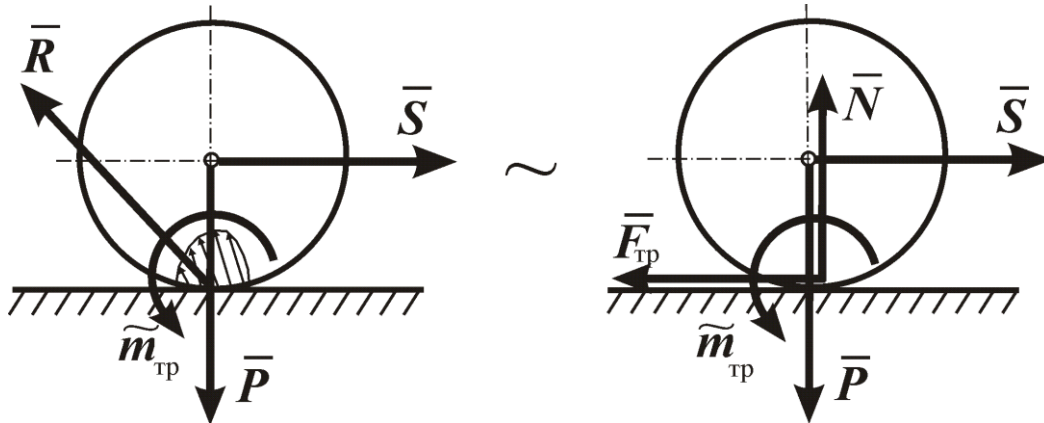


Рисунок 6.12 – Пара сил

Нормальна складова N реакції основи перешкоджає вдавлюванню катка в основу. Сила тертя ковзання F перешкоджає його ковзанню по основі. Коченню катка перешкоджає пара $M_{\text{тр}}$ тертя кочення. Модуль моменту пари сил тертя кочення служить мірою опору кочення катка по опорній поверхні. Момент пари тертя кочення спрямований проти повороту катка із займаного положення, який він робить чи готовий зробити. Модуль моменту $M_{\text{тр}}$ пари тертя кочення при спокої катка (тертя спокою) може мати будь-яке значення між нулем і максимальним (або граничним) значенням

$$0 \leq M_{\text{тр}} \leq M_{\text{max}}, \quad (6.9)$$

Максимальне значення модуля моменту пари тертя кочення пропорційно нормальному тиску

$$M_{\text{тр}} = k \cdot N, \quad (6.10)$$

де k - **коефіцієнт тертя кочення**, який залежить від матеріалу і стану поверхонь, що труться. Він має розмірність довжини та зазвичай вимірюється в сантиметрах.

Зокрема, при коченні сталі по сталі $k \approx 0,03$ см.

Особливості розв'язання задач на рівновагу тіл за наявності тертя кочення

Рівняння завдань на рівновагу тіла на **шорсткій поверхні, що деформується**, складаються з умов рівноваги сил, прикладених до тіла після звільнення від в'язей та рівняння тертя кочення, яке являється рівністю (6.10)

$$M_{\text{ТР}} = k \cdot N,$$

якщо розглядається **критична рівновага** або нерівністю

$$M_{\text{ТР}} \leq k \cdot N,$$

якщо розглядається **докритична рівновага**.

Оскільки у другому випадку система рівнянь задачі містить одну нерівність, то для шуканої величини вийде область, обмежена граничними значеннями цієї величини, що відповідають критичним рівновагам катка при коченні в одну та іншу сторону.

Модуль сили тертя ковзання за відсутності прослизання менше критичного значення і визначається нерівністю

$$F < f \cdot N.$$

Наприклад. Каток, зображений на рисунку 6.13, що покоїться на самогальмівній шорсткій деформованій похилій площині, може перебувати в двох граничних станах рівноваги.

Одна з них (рисунок 6.13а) передуює коченню вниз. Тут $S = S_{\min}$ ще утримує каток на похилій площині.

Друга гранична рівновага (рисунок 6.13б) передуює коченню катка вгору під дією сили $S_{\max}$.

При всіх $S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$ рівновага катка буде докритичною

Складемо рівняння критичної рівноваги ковзанки радіуса r , що передуює його коченню вниз (рисунок 6.10а).

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= S_{\min} + F - P \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N - P \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum M_D F &= P \cdot r \cdot \sin \alpha - M - S_{\min} \cdot r = 0. \end{aligned} \right\}, \quad (6.11)$$

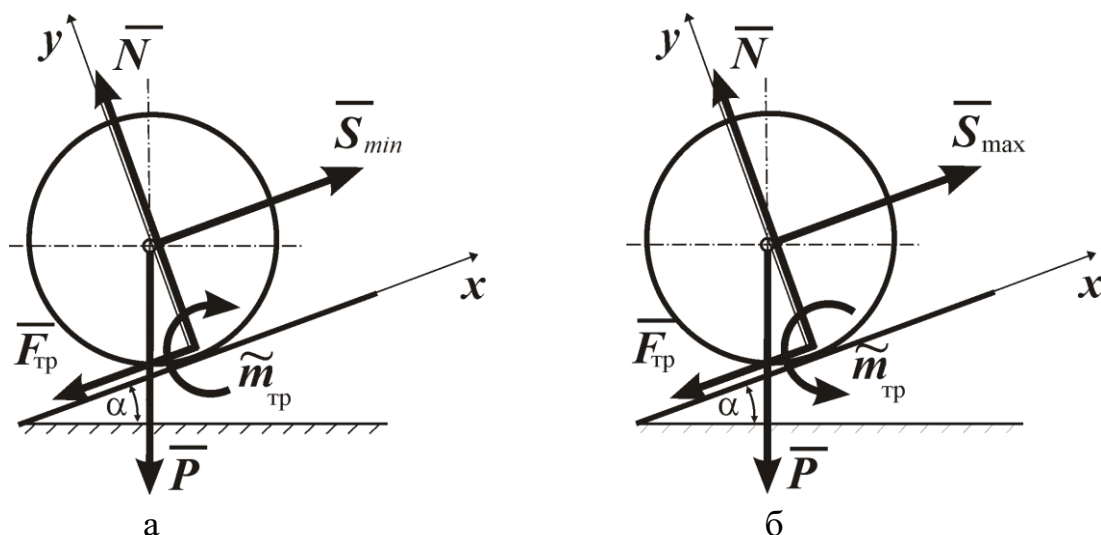


Рисунок 6.13 – Два граничні стани рівноваги катка

Рівняння граничної рівноваги катка, що передусь руху його вгору, будуть наступними:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= S_{min} - F - P \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y &= N - P \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum M_D F &= P \cdot r \cdot \sin \alpha + M - S_{min} \cdot r = 0. \end{aligned} \right\}, \quad (6.12)$$

Як видно, рівняння (6.11) та (6.12) відрізняються лише знаками моментів пари тертя кочення та сили тертя.

Модуль пари тертя кочення знайдеться за формулою (6.10)

$$M_{\text{тр}} = k \cdot N,$$

Модуль сили тертя ковзання за відсутності прослизання менше граничного і його можна знайти з рівнянь рівноваги.

Вирішуючи систему рівнянь (6.11 та 6.12) разом із рівнянням (6.10) отримаємо:

$$S_{min} = P \cdot \left(\sin \alpha - \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha \right),$$

$$S_{max} = P \cdot \left(\sin \alpha + \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha \right),$$

Зазначимо, що значення $S_{\min}$ та $S_{\max}$ відрізняються знаками перед членами, що містять коефіцієнт тертя кочення. Отже, при вирішенні завдань, в яких можливі два граничні положення рівноваги, досить розглянути одне з них і, отримавши відповідь в алгебраїчній формі, знайти з нього друге граничне значення області визначення шуканої величини.

Модуль сили тертя ковзання в обох випадках буде той самий:

$$F = P \cdot \frac{k}{r} \cdot \cos \alpha.$$

Отже, ідеально гладких поверхонь у реальному житті не буває. Це означає, що намагаючись робити поверхню ідеально гладкою - наприклад, натираючи її мільйон годин супер дрібним наждачним папером – ми мінімізуємо тертя, але не позбавляємося його.

Але це не означає, що способів позбутися тертя не існує. Наприклад, цілком реальні поїзди на магнітних подушках. Завдяки магнітному полю, яке створюється між рейкою та вагоном, поїзд начебто парить. Так він ліквідує зіткнення різних поверхонь, через яке і створюється тертя.

Контрольні питання

- 6.1 Коли тіло котиться поверхнею, виникає сила тертя...?
- 6.2 Однією з головних причин виникнення сили тертя кочення - це...?
- 6.3 Якщо радіус колеса зростає втричі, то сила тертя кочення...?
- 6.4 Коефіцієнт тертя кочення має розмірність...?
- 6.5 Який із способів найбільше знижує силу тертя..?
- 6.6 У чому полягає причина виникнення сили тертя?
- 6.7 Як спрямована сила тертя?
- 6.8 Коли виникає сила тертя ковзання?
- 6.9 Як спрямований вектор сили тертя ковзання?
- 6.10 Від чого залежить сила тертя ковзання?
- 6.11 Кутом тертя називається конус, що побудований повною реакцією при обертанні її навколо...
- 6.12 Яким символом позначається коефіцієнт тертя ковзання?
- 6.13 Яким символом позначається коефіцієнт тертя кочення?
- 6.13 Від чого залежить сила тертя ковзання?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА».

ТЕМА 7: ВВЕДЕННЯ В КІНЕМАТИКУ. ШВИДКІСТЬ ТОЧКИ

ПЛАН

- 7.1. Предмет кінематики. Основне завдання кінематики.
- 7.2. Основні поняття кінематики.
- 7.3. Способи завдання руху точки.
- 7.4. Поняття швидкості. Визначення швидкості точки при завданні її руху векторним способом.
- 7.5. Визначення швидкості точки при завданні її руху природним і координатним способом.
- 7.6. Графіки руху швидкості. Годограф швидкості.

7.1. Предмет кінематики. Основне завдання кінематики.

Кінематикою називають розділ механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл без обліку їхньої інертності (маси) і діючих на них сил. Її ділять на кінематику точки й кінематику твердого тіла.

У широкому змісті кінематика вивчає залежності між просторово-тимчасовими характеристиками механічного руху. Під рухом у механіку, ми розуміємо зміну положення тіла в просторі стосовно інших тіл із часом. Для визначення положення тіла, що рухається (точки) у різні моменти часу стосовно іншого тіла, застосовують систему координат, **називану системою відліку**, яку можна зв'язати з будь-яким тілом.

Визначимо, що в теоретичній механіці простір, у якому відбувається рух тіл, розглядається як *тривимірне*, і всі виміри виробляються на основі методів *евклідової геометрії*. За одиницю довжини при вимірі відстаней приймається 1м.

Основним завданням кінематики точки є вивчення закону її руху. Кінематика твердого тіла вирішує два завдання:

1) основне завдання полягає в тім, щоб, знаючи закон руху, визначити всі кінематичні характеристики (траєкторію, швидкість, прискорення) як твердого тіла, так і окремих його точок. Для рішення цього завдання необхідно, щоб був заданий або закон руху даного

тіла, або ж закон руху якого-небудь іншого тіла, кінематично пов'язаного з даним;

2) установлення кінематичних способів завдання руху.

При рішенні завдань кінематики широко застосовуються *математичні методи дослідження*: методи інтегрального й диференціального вираховування, методи абстракції, формальної логіки й інших.

7.2. Основні поняття кінематики.

У теоретичній механіці розрізняють такі поняття як рух, простір, час, траєкторія, шлях, швидкість, прискорення.

Рух тіл у просторі відбувається із часом. Час передбачається однаковим у будь-яких системах відліку й не залежить від руху цих систем відносно один одного. Позначається час буквою « t », одиницею виміру в системі СИ є секунди – «з» і розглядається як що безупинно змінюється скалярна величина, застосовувана в якості незалежної змінної - аргументу. Всі інші змінні величини (відстані, швидкості й так далі) розглядаються як змінюються із часом, тобто як функції часу. При зміні часу в кінематиці прийнято розрізняти наступні поняття: *проміжок часу*, *момент часу*, *початковий момент часу*.

Проміжок часу – час, що протікає між двома фізичними явищами або різниця між двома послідовними *моментами часу*.

Моментом часу називається границя між двома суміжними проміжками часу, обумовлена числом секунд, що пройшли від *початкового моменту* до даного.

Початковим моментом часу $t_0 = 0$ називається момент часу, з якого починається відлік, про вибір якого в кожному випадку вмовляються.

Для визначення положення точки в просторі вибирається деяка система відліку (або система координат). У теоретичній механіці при вивченні рухів на Землі за систему відліку приймається умовно нерухлива система відліку пов'язана із Землею, при цьому відносний рух умовно приймається абсолютним.

Таким чином, **кінематично задати рух** – це значить мати можливість визначити положення тіла (точки) відносно даної системи відліку в будь-який момент часу. Вивчення кінематики почнемо з вивчення руху найпростішого об'єкта – точки. Лінія, що описує точка

при русі, називається **траєкторією**. По виду траєкторії руху точок діляться на *прямолінійні й криволінійні*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки є **прямолінійним**, якщо траєкторія крива - **криволінійним**.

Для рішення завдань кінематики потрібно, щоб досліджуваний рух було якось задане відносно обраної системи відліку, тобто, відома залежність між довільними положеннями точки, що рухається, у просторі й часі – закон руху тіла (точки), що дозволить визначити положення в будь-який момент часу.

Основними *кінематичними характеристиками* руху точки є її **положення, швидкість, прискорення**. Виходячи із цього, основне завдання кінематики полягає в знаходженні способів завдання положення тіла (точки) і методів визначення швидкості й прискорення.

7.3. Способи завдання руху точки.

Для завдання руху точки існує три способи:

- 1) *векторний*
- 2) *природний*
- 3) *координатний*.

1. Векторний спосіб завдання руху точки.

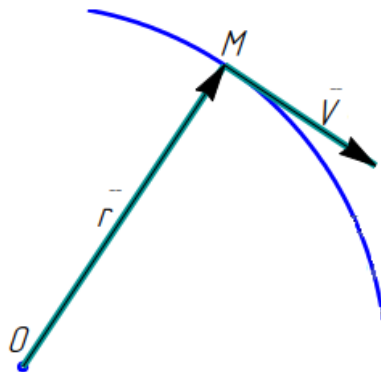


Рисунок 7.1 – Векторний спосіб завдання руху точки.

Положення точки M однозначно визначається за допомогою радіус-вектору $\vec{r}$, проведеного з деякої заданої нерухливої точки O , що є центром якої-небудь системи відліку, у точку M .

При русі точки M радіус-вектор $\vec{r}$ буде із часом змінюватися як по напрямку, так і по модулі, тобто радіус-вектор r є функція часу t : $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Функцію $\vec{r}(t)$ називають **однозначною**, тому о точка в цей момент часу перебуває тільки в одному місці простору. Крім того, ця функція $\vec{r}(t)$ повинна бути **безперервною**.

У більшості завдань механіки ця функція двічі диференційована за часом t . Рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ є **кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі**. Це рівняння виражає закон руху точки, а також рівняння траєкторії точки у векторній формі.

У такий спосіб: **траєкторія точки** є геометричним місцем кінців радіус-вектору $\vec{r}(t)$ точки, що рухається. З іншого боку, лінія утворена кінцями змінного вектору, початок якого зафіксоване, називається **годографом вектору**. Отже: *траєкторія точки є годографом її радіус-вектору $\vec{r}(t)$* .

2. Координатний спосіб завдання руху точки.

Положення точки в просторі можна безпосередньо визначити, знаючи її декартові координати x, y, z . Оскільки при русі точки її координати із часом будуть змінюватися, то щоб знати положення точки в просторі в будь-який момент часу потрібно знати залежності:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (7.1)$$

Функції однозначні, безперервні й мають безперервні похідні і являють собою **параметричні рівняння руху точки в декартових координатах**. Якщо рух тіла відбувається в площині, то в цьому випадку одержимо два рівняння:

$$x = x(t), y = y(t). \quad (7.2)$$

У випадку прямолінійного руху має місце одне рівняння

$$x = x(t). \quad (7.3)$$

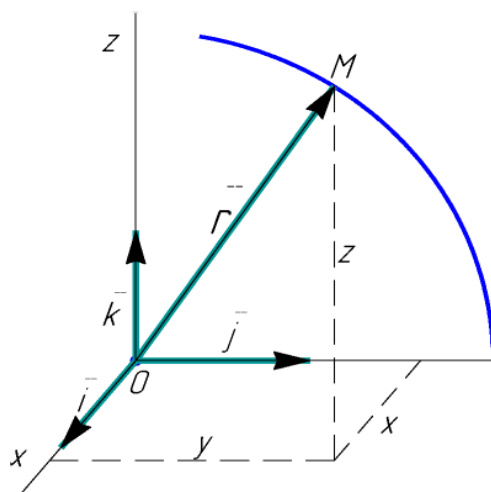


Рисунок 7.2 – Координатний спосіб завдання руху точки.

У цьому випадку координатний спосіб завдання руху точки зводиться до природного

Рівняння (7.1), (7.2), (7.3) є параметричними рівняннями, тобто в ролі параметра руху виступає час t . Виключивши час t із рівнянь руху (7.2) можна знайти залежність між координатами точки $y = f(x)$ – **рівняння траєкторії в координатній формі.**

Зв'язок між координатним і векторним способом можна встановити, якщо ввести одиничні вектори (орти) осей $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тобто вектори чисельно рівні одиниці й спрямовані уздовж осей x, y, z . Проекції вектору $\vec{r}$ на координатні осі будуть рівні:

$$\vec{r} = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}, \quad (7.4)$$

$$\text{або} \quad r_x = x, r_y = y, r_z = z, \quad (7.5)$$

де $x(t), y(t), z(t)$ – координати точки M .

Отже, залежність $\vec{r}(t)$ буде відома, якщо будуть задані координати точки $M(x, y, z)$ як функції часу.

3. Природний спосіб завдання руху точки.

Якщо траєкторія точки відома заздалегідь, то для визначення закону її руху в просторі досить знати положення точки на траєкторії.

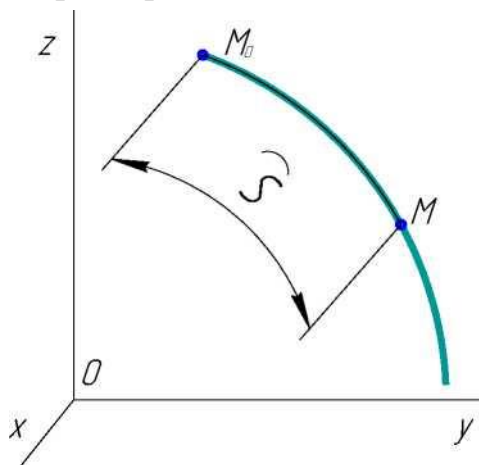


Рисунок 7.3 – Природний спосіб завдання руху точки.

Нехай точка M рухається відносно якої-небудь системи відліку $Oxyz$ уздовж траєкторії $M_0 M$. Точку M_0 приймаємо за початок відліку руху, і, розглядаючи траєкторію $M_0 M$ як криволінійну координатну вісь, установимо на ній позитивний і негативний напрямок, як на звичайній координатній осі. Тоді положення точки M буде визначено

однозначно криволінійною координатою S , рівної відстані від точки M_0 до точки M , обмірюваній уздовж дуги траєкторії й узятому з відповідним знаком.

При русі по траєкторії точка M буде переміщатися в положення M_1 , M_2 й так далі, тоді відстань S із часом буде змінюватися, тобто рух точки M буде описуватися залежністю:

$$S = S(t) \quad (7.6)$$

Функція (7.6) повинна бути однозначної, безперервної й диференційованою. Величина S в рівнянні (7.6) визначає положення точки, що рухається, а не пройдений нею шлях. *Наприклад:* якщо точки рухаючись із точки M_0 прийшла в точку M_1 а потім, переміщаючись у зворотному напрямку, приходить у точку M , то її дугова координата $S = M_0M$, а пройдений цією точкою шлях дорівнює $M_0M + M_1M$, тобто не дорівнює S .

Таким чином, щоб задати рух точки природним способом потрібно знати:

- 1) траєкторію точки;
- 2) початок відліку на траєкторії із вказівкою позитивного й негативного напрямків руху;
- 3) закон руху у вигляді $S = S(t)$.

7.4. Поняття швидкості.

Характеризуючи темп процесу або руху, ми приходимо до поняття *швидкості* - як векторної величини, що є однієї з основних кінематичних характеристик точки, що рухається. *Швидкість* є кількісна міра зміни в часі всякого процесу. У механіку швидкість є мірою зміни в часі положення матеріальної точки, що рухається (тіла), тобто мірою зміни її відстані від початку відліку.

Швидкість – векторна величина, що характеризує швидкість і напрямок рухів точки в даній системі відліку. Розмірність: $[\vec{V}] = 1\text{м/с}$: 1км/год .

7.5. Три способи завдання швидкості точки.

7.5.1. Векторні способи.

При векторному способі завдання руху положення точки, що рухається, у кожний момент часу визначається $\vec{r}$ радіусом-вектором.

Нехай точка, що рухається, у момент t часу перебуває в M положенні, обумовленому $\vec{r}$ радіусом-вектором, а в момент $t_1 = t + \Delta t$

часу - у M_1 положенні, обумовленому $\vec{r}_1$ радіусом-вектором. Тоді переміщення точки за проміжок

$$\text{часу } \Delta t = t_1 - t$$

визначиться вектором $\overline{MM_1}$, що назовемо **вектором переміщення точки** $\Delta\vec{r}$. Цей вектор спрямований по хорді – у криволінійному русі точки й по прямій – у прямолінійному русі. З $\triangle OMM_1$ видно, що

$$\vec{r} + \overline{MM_1} = \vec{r}_1, \text{ звідки}$$

$$\overline{MM_1} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

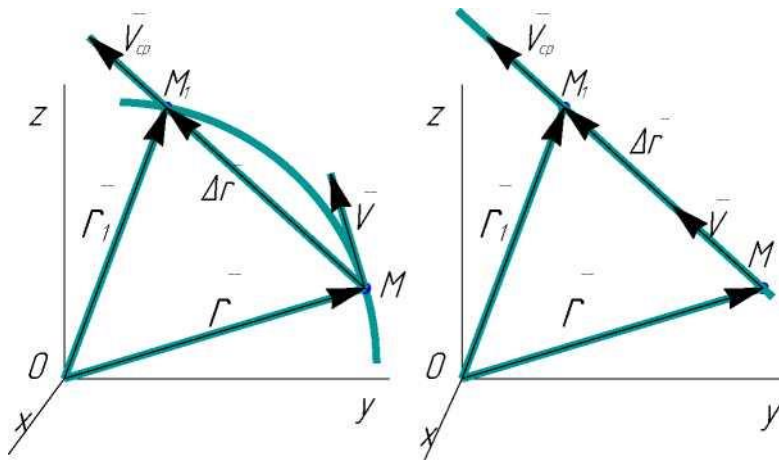


Рисунок 7.4 – Векторний спосіб завдання швидкості точки.

Відношення вектору переміщення точки $\Delta\vec{r}$ до відповідного проміжку часу Δt представляє векторну величину, що називають **середньою по модулі й напрямку швидкістю точки за проміжок часу Δt** :

$$V_{\text{cp}} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (7.7)$$

Спрямовано вектор V_{cp} також, як вектор переміщення точки $\Delta\vec{r}$, тобто при криволінійному русі - уздовж хорди, при прямолінійному – по прямій.

Чим менше буде проміжок часу, тим точніше величина V_{cp} буде характеризувати рух точки. При зменшенні проміжку часу Δt й наближенні до нуля вектор $\Delta\vec{r}$ також прагне до нуля, а вектор $V_{\text{cp}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ до деякої межі, що називається *швидкістю точки в цей момент часу*

(щира швидкість). **Швидкістю точки в цей момент часу t** називається векторна величина V , до якої прагне середня швидкість $V_{\text{ср}}$ при прагненні проміжку часу Δt до 0:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (V_{\text{ср}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Межа відносини $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ – є перша похідна від вектору $\vec{r}$ по аргументу t :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (7.8)$$

У такий спосіб: **вектор швидкості** є *перша похідна* від радіуса-вектору точки за часом. Вектор швидкості точки спрямований по дотичній до траєкторії руху убік руху.

При прямолінійному русі вектор швидкості увесь час спрямований уздовж прямій і змінюється тільки по величині; тоді як при криволінійному русі вектор швидкості точки змінюється як по напрямку, так і по величині.

7.5.2. Координатний спосіб.

Нехай заданий координатний спосіб руху точки M в просторі рівняннями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

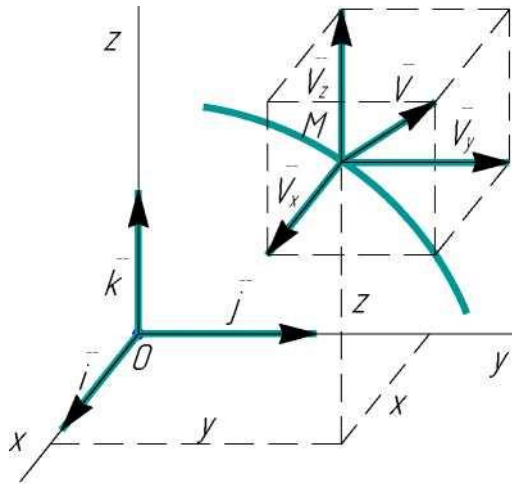


Рисунок 7.5 – Координатний спосіб завдання швидкості точки.

Позначимо орти осей координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Побудуємо паралелепіпед, ребра якого паралельні координатним осям, а вектор $\vec{V}$ – його діагональ. Векторним рівнянням руху точки буде рівняння:

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}.$$

З огляду на, що $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ й орти мають постійний модуль і напрямок, одержимо:

$$\bar{V} = \frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k}.$$

Вектор $\bar{V}$ у цій формулі розкладений по трьох осях.

Отже: похідні за часом від координат точки, що рухається, є Проекціями вектору швидкості на осі декартових координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (7.9)$$

$$\text{або} \quad V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}.$$

Модуль вектору швидкості при цьому визначається по формулі:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (7.10)$$

а напрямок вектору швидкості визначиться напрямними косинусами:

$$\cos(\bar{V} \wedge \bar{i}) = \frac{V_x}{V}, \cos(\bar{V} \wedge \bar{j}) = \frac{V_y}{V}, \cos(\bar{V} \wedge \bar{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (7.11)$$

При $V_x > 0, V_y > 0, V_z > 0$ точка рухається по напрямку координатних осей x, y, z , при $V_x < 0, V_y < 0, V_z < 0$ – протилежно відповідних осей.

7.5.3. Природний спосіб.

Криволінійний рух точки в природній формі може бути задано, якщо відомі: траєкторія точки, початок і напрямок відліку й рівняння руху точки $S = S(t)$.

Нехай у момент часу t точка займає положення M ($S = \widehat{OM}$), а в момент $t = t_1 + \Delta t$ - положення M_1 ($S_1 = \widehat{OM}_1 = \widehat{OM} + \widehat{MM}_1 = S + \Delta S$). Проведемо з довільного центра O_1 в точку M радіус-вектор $\bar{r}$, тоді швидкість точки:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \text{ або } \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \quad (7.12)$$

(увівши в якості проміжної змінної дугову координату S).

$$\text{Тут} \quad \frac{d\bar{r}}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\overline{MM}_1}{\overline{MM}_1} = 1,$$

вектор $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S}$ спрямований як $\Delta \bar{r}$ а при $\Delta t \rightarrow 0$ прагне до напрямку дотичної.

У такий спосіб: вектор $\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = 1$, спрямований по дотичній убик

збільшення дугової координати, значить є ортом τ цього напрямку:

$$\tau = \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Тоді:

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Похідна $\frac{ds}{dt}$ являє собою проекцію швидкості на дотичну – алгебраїчну величину швидкості:

$$V = \frac{ds}{dt}. \quad (7.14)$$

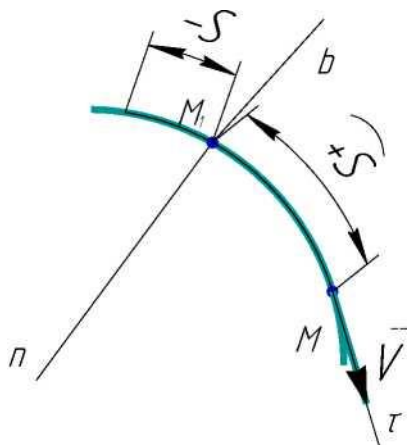


Рисунок 7.6 – Природний спосіб завдання швидкості точки.

У такий спосіб: числове значення швидкості точки в цей момент часу дорівнює першій похідній від відстані (дугової координати) S цієї точки за часом. Швидкість позитивна, коли вона спрямована убік позитивного відліку відстані, і негативна - коли убік негативного відліку відстані.

7.6. Графіки руху й швидкості. Годограф швидкості.

Якщо в обраному масштабі відкласти по осі абсцис час t , а по осі ординат – відстань S , то отриманий графік у цій системі координат буде **графіком руху точки**.

Аналогічно в обраних масштабах можна побудувати залежності $V = V(t)$ **швидкості**, що зображують графік. Інакше графік швидкості можна побудувати графічним диференціюванням графіка руху за допомогою одного з існуючих графічних методів.

Годограф.

При русі точки її швидкість у загальному випадку змінюється в

часі як по модулі, так і по напрямку. Кожному моменту часу відповідає певний вектор швидкості, спрямований по дотичній до траєкторії.

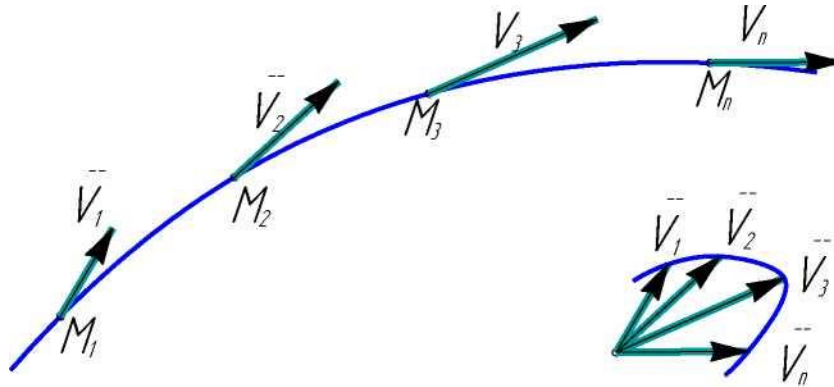


Рисунок 7.7 – Побудова годографа швидкості.

Розглянемо ряд точок на траєкторії: M_1, M_2, M_3, M_n , позначивши значення швидкостей $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$.

Виберемо довільну точку O й перенесемо всі вектори швидкості паралельно самим собі в точку O .

Кінці перенесених векторів утворять безперервну криву, називану **годографом швидкості**.

Кінематика кривошипно-повзунного механізму.

Знайти траєкторію точки M шатуна AB кривошипно-повзунного механізму, якщо $AB=AO=60\text{см}$, $MB=2\sqrt{3}\cdot AB$; $p = 2\cdot\pi\cdot t$ (t - в секундах), а також визначити величину та напрямок швидкості та прискорення точки M в момент часу $t = 0$ (Рис. 7.8).

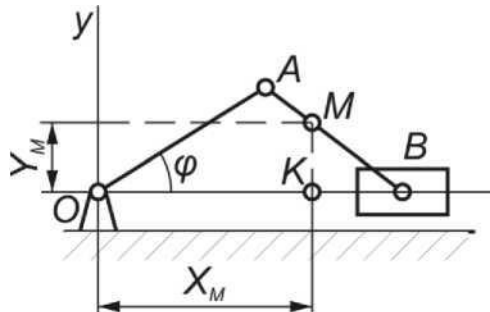


Рисунок 7.8 – Схема кривошипно-повзунного механізму.

Рішення.

Нехай на даний момент часу t механізм займає положення, вказане на кресленні. Так як $\triangle OAB$ рівнобедрений, то кут $\angle OBA$

дорівнює p . Знайдемо рівняння руху точки M . Як видно з рис. 7.8

$$\begin{aligned} X_M &= OK = (OA + 1/3 \cdot AB) \cdot \cos \varphi \\ Y_M &= MK = MB \cdot \sin \varphi = 2/3 \cdot AB \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

Тоді, підставляючи значення OA , AB и p маємо:

$$X_M = 80 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \text{ см}, Y_M = 40 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \text{ см}.$$

Вирішивши рівнянням руху спільно та виключивши час t , отримаємо траєкторію точки M :

$$\frac{X^2}{80^2} + \frac{Y^2}{40^2} = 1. \quad (2)$$

Таким чином, точка M рухається еліпсом з півсями 80 і 40 см. Для визначення швидкості точки знеждемо проекції її на координатні осі: $V_x = \dot{X} = -160 \cdot \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$, $V_y = \dot{Y} = 80 \cdot \pi \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t)$ (3)

Модуль швидкості точки M в довільний момент часу M дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-160\pi)^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot t) + (80\pi)^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot t)} \quad (4)$$

при $t=0$ величина швидкості $V=80$ см/с. Напрямок швидкості знайдемо за формулами:

$$\cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_x}{V} = \frac{0}{80\pi} = 0, \cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_y}{V} = \frac{80\pi}{80\pi} = 1 \quad (5)$$

Звідки видно, що вектор швидкості точки M при $t=0$ спрямований паралельно осі y . Щоб визначити величину прискорення точки M , знайдемо її проекції на координатні осі:

$$a_x = \ddot{X} = -320 \cdot \pi^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t), a_y = \ddot{Y} = -160 \cdot \pi^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t). \quad (6)$$

Формула для визначення величини прискорення мають вигляд:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \\ &= \sqrt{(-320 \cdot \pi^2)^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot t) + (-160 \cdot \pi^2)^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot t)} \end{aligned} \quad (7)$$

При $t=0$, $a=320$ см/с². Напрямок прискорення визначається формулами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = \frac{-160 \cdot \pi^2}{320 \cdot \pi^2} = -1, \cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = \frac{0}{320 \cdot \pi^2} = 0 \quad (8)$$

Як видно, вектор прискорення точки M при $t = 0$ спрямований

паралельно осі x .

Контрольні питання

- 7.1. Що вивчає кінематика?
- 7.2. Дайте визначення наступним поняттям: рух, час, проміжок часу, момент часу, початковий момент часу, траєкторія.
- 7.3. У чому відмінність прямолінійної траєкторії від криволінійної?
- 7.4. Залежність між якими величинами описує закон руху точки (тіла)?
- 7.5. Назвіть основні кінематичні характеристики руху матеріальної точки.
- 7.6. Які існують способи завдання руху точки?
- 7.7. Чим визначається положення точки при векторній способі завдання руху?
- 7.8. Що необхідно знати для визначення положення точки при координатному способі завдання руху?
- 7.9. Як встановити в'язь між координатним і векторним способом завдання руху точки?
- 7.10. Що необхідно знати для визначення положення точки при природному способі завдання руху?
- 7.11. Що характеризує й чим визначається швидкість?
- 7.12. Як зв'язана швидкість точки з радіусом-вектором?
- 7.13. Як спрямований вектор швидкості?
- 7.14. Як зв'язані проекції вектора швидкості на координатні осі з координатами точки, що рухається?
- 7.15. Яка система відліку визначається осями природного тригранника?
- 7.16. Як визначається швидкість при природному способі завдання руху?
- 7.17. Що називають годографом швидкості?

ТЕМА 8: ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ.

ПЛАН

- 8.1. Поняття прискорення точки.
- 8.2. Визначення прискорення точки при трьох способах завдання її руху (векторний, координатний, природний).
- 8.3. Окремі випадки руху точки.
- 8.4. Технічні приклади.

8.1. Поняття прискорення точки.

При нерівномірному криволінійному русі точки змінюються модуль і напрямок її швидкості. **Прискорення** характеризує швидкість зміни модуля й напрямку швидкості точки.

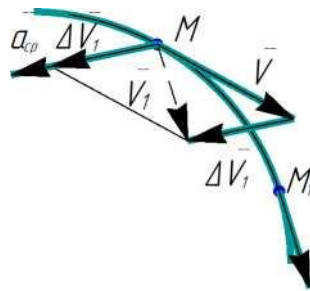


Рисунок 8.1 – Напрямок швидкості та прискорення точки при криволінійному русі

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, перебувала в M положенні й мала V_1 швидкість, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ часу перемістилася в M_1 положення й має V швидкість. Тоді за деякий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки одержала збільшення швидкості $\Delta V = V - V_1$, що визначимо за правилом паралелограма.

Вектор ΔV завжди спрямований убік увігнутості кривої траєкторії й називається **вектором збільшення швидкості**. Відношення вектора збільшення швидкості ΔV до відповідного проміжку часу Δt визначає *вектор середнього прискорення* $\bar{a}_{cp}$ за цей проміжок часу.

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (8.1)$$

Вектор $\bar{a}_{\text{cp}}$ має той же напрямок, що й вектор ΔV . Межа, до якого прагне $\bar{a}_{\text{cp}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, є *вектором прискорення* точки в цей момент часу:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}. \quad (8.2)$$

Прискоренням точки називається векторна величина, що характеризує зміну модуля й напрямку швидкості із часом, рівна першій похідній за часом від функції швидкості цієї точки.

Визначимо, як розташовується вектор $\bar{a}$ стосовно траєкторії:

- при прямолінійному русі вектор $\bar{a}$ спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка;
- якщо траєкторією руху точки є плоска крива, то вектор $\bar{a}$ лежить у площині кривої й спрямований у бік її ввігнутості;
- якщо траєкторія руху точки не є плоскою кривою, то вектор прискорення $\bar{a}$ точки лежить у площині, що проходить через дотичну в точці M й пряму, паралельну дотичній у точці M_1 , тобто в дотичній площині, і спрямований вектор $\bar{a}$ у бік увігнутості кривої.

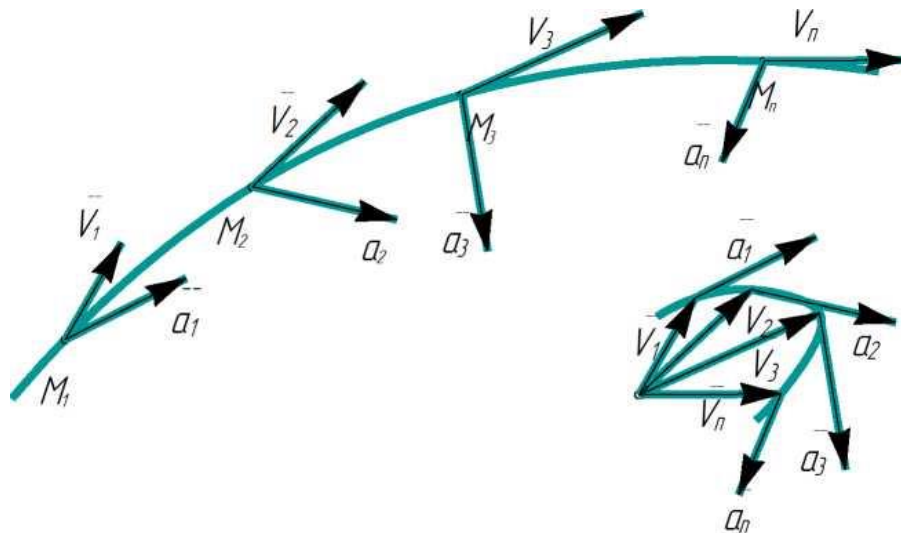


Рисунок 8.2 – Напрямок швидкості та прискорення точки при криволінійному русі

Одиниця виміру прискорення - м/с² (система СИ).

Тому що прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від швидкості, те: *вектор прискорення точки спрямований по дотичній до графіка швидкості.*

8.2. Визначення прискорення точки при трьох способах завдання руху

8.2.1. Векторна форма.

Тому що $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ з обліком, що $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$, прискорення можна визначити як:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{V}}{dt}. \quad (8.3)$$

Вектор прискорення точки в цей момент часу дорівнює першій похідній від вектору швидкості або другій похідній від радіус-вектору за часом.

8.2.2. Координатна форма.

Нехай задані рівняння руху точки в координатній формі: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

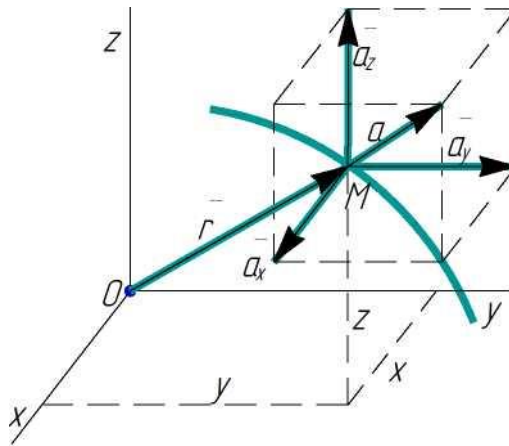


Рисунок 8.3 – Координатна форма прискорення точки при криволінійному русі

Радіус-вектор точки, що рухається, у вигляді

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x(t) + \bar{j} \cdot y(t) + \bar{k} \cdot z(t).$$

Так як $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, а орти $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – постійні, те маємо:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Розкладаємо прискорення $\bar{a}$ на складові по осях координат:

$$\bar{a} = \bar{i} \cdot a_x + \bar{j} \cdot a_y + \bar{k} \cdot a_z. \quad (8.4)$$

Ці складові по величині дорівнюють проєкції вектору $\bar{a}$ на осі координат:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (8.5)$$

Отже: проєкції прискорення точки на нерухливі координатні осі дорівнюють першим похідним від відповідних проєкцій швидкості за часом на ті ж осі або другі похідні від відповідних координат точки, що рухається, за часом.

Модуль і напрямок прискорення визначаються по формулах:

$$a \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (8.6)$$

$$\cos(\bar{a} \wedge \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \cos(\bar{a} \wedge \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \cos(\bar{a} \wedge \bar{k}) = \frac{a_z}{a}. \quad (8.7)$$

8.2.3. Природна форма.

Попередньо приведемо деякі відомості з **диференціальної геометрії** (природні координатні осі, вектор кривизни), оскільки кінематичні характеристики руху точки тісно пов'язані з геометричними властивостями траєкторії.

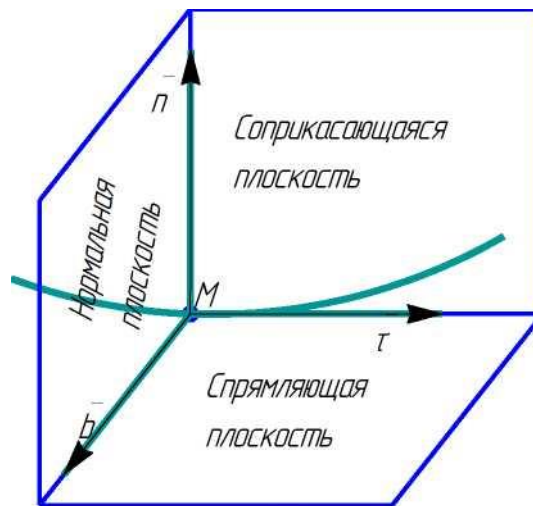


Рисунок 8.4 – Природна форма прискорення точки при криволінійному русі

Проведемо в точці M рухливі осі: $\bar{t}$ – дотична, $\bar{n}$ – головна нормаль, $\bar{b}$ – бінормаль, які пов'язані із точкою, що рухається, і утворять праву прямокутну систему координат. Площини утворені цими осями: дотична, спрямовуюча й нормальна утворюють природний тригранник.

Природними координатними осями називають три взаємно перпендикулярні осі: **дотична**, спрямована убік зростання дугової координати, **головна нормаль**, спрямована убік увігнутості кривої й **бінормаль**, спрямована так, що б утворити праву систему координат.

При русі точки M по кривій разом з нею переміщаються й природні координатні осі, залишаючись при цьому взаємно перпендикулярними, але змінюючи свій напрямок у просторі. Аналогічно орти цих осей будуть також змінювати свій напрямок.

При переміщенні точки M уздовж кривій на величину ΔS орт $\bar{\tau}$ змінився в $\bar{\tau}_1$ на величину $\Delta \bar{\tau}$. Відношення збільшення орта $\Delta \bar{\tau}$ до збільшення дугової координати ΔS є вектор $\bar{K}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta S}$ – характеризує поворот дотичної або орта $\bar{\tau}$ на ділянці ΔS й називається **вектором середньої кривизни на ділянці ΔS** .

Межа $\bar{K}$ до якого прагне вектор середньої кривизни $\bar{K}_{\text{ср}}$ при $\Delta S \rightarrow 0$ називається **вектором кривизни кривій у даній точці**:

$$\bar{K} = \frac{d\bar{\tau}}{dS}.$$

У загальному випадку, кривизна прямої не є постійною й змінюється від точки до точки. Як відомо з диференціальної геометрії величина ρ , зворотна кривизні $\bar{K}$ в даній точці M , називається **радіусом кривизни кривій у цій точці**:

$$\bar{K} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad \rho = \frac{1}{K}, \quad \text{звідки } K = \frac{1}{\rho}. \quad (8.8)$$

Вектор $\bar{K}$ перпендикулярний орту $\bar{\tau}$ й спрямований по головній нормалі до центра кривизни кривій.

Визначення прискорення точки при природному способі завдання руху. Розглянемо, як обчислюється прискорення, якщо задано траєкторію й закон руху точки по цій траєкторії у вигляді $S = S(t)$. У цьому випадку проєкції вектору прискорення визначаються не на осі системи відліку $Oxyz$, а на природні осі $Mtnb$, що мають початок у точці M й рухаються разом з нею.

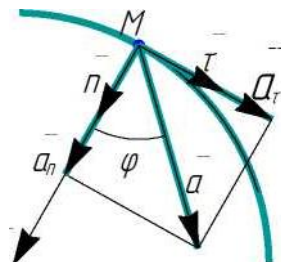


Рисунок 8.5 – Природна форма прискорення точки при криволінійному русі

Установлено, що якщо крива плоска вектор прискорення a лежить у дотичній площині $M\tau n$.

Отже: Проекція вектору a на бінормаль b дорівнює 0 ($a_b = 0$).

Проекції вектору прискорення на дотичну й головну нормаль називаються дотичним (тангенціальним) $\bar{a}_\tau$ і нормальним (відцентровим) $\bar{a}_n$ прискореннями. Визначимо $\bar{a}_\tau$ й $\bar{a}_n$.

Для цього виразимо вектор швидкості точки добутком $\bar{V} = V \cdot \bar{\tau} = \frac{dS}{dt} \cdot \bar{\tau}$ Продиференціюємо за часом а t добуток двох змінних і одержимо:

$$\bar{a} = \frac{d^2 S}{dt^2} \cdot \bar{\tau} + \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Тут перший доданок

$$\frac{d^2 \bar{S}}{dt^2} \cdot \bar{\tau} = \frac{d\bar{V}}{dt} \cdot \bar{\tau} = \bar{a}_\tau$$

– дотичне прискорення, його модуль визначається як:

$$\bar{a}_\tau = \frac{d\bar{V}}{dt}. \quad (8.9)$$

Другий доданок:

$$\frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Перетворимо його:

$$\frac{dS}{dt} = V, \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \frac{dS}{dS} = \frac{d\bar{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}.$$

Тут:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{\bar{n}}{\rho}; \quad \frac{dS}{dt} = V,$$

одержимо: $V \cdot \frac{\bar{n}}{\rho} \cdot V = \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n} = \bar{a}_n$ – нормальне прискорення.

Його модуль визначається як:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (8.10)$$

Дотичне прискорення $\bar{a}_\tau$ являє собою проекцію прискорення на дотичну, існує тільки при нерівномірному русі й характеризує зміну швидкості по величині.

Нормальне прискорення $\bar{a}_n$ спрямоване по головній нормалі, існує лише при криволінійному русі, завжди має позитивне значення й характеризує зміну вектору швидкості по напрямку.

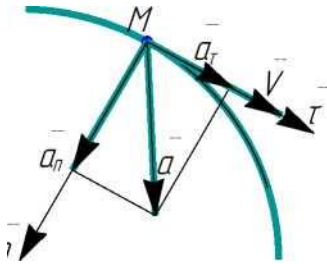


Рис.8.6 – Прискорений рух
($\bar{a}_\tau = \frac{d\bar{v}}{dt} > 0$)

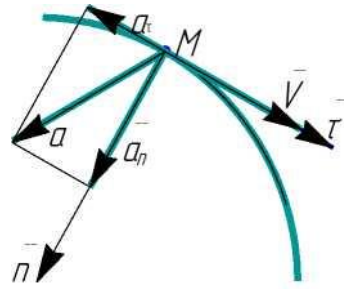


Рис.8.7 – Уповільнений рух
($\bar{a}_\tau = \frac{d\bar{v}}{dt} < 0$)

У такий спосіб: Проекція прискорення точки на дотичну – дотичне, тангенціальне прискорення $\bar{a}_\tau$ дорівнює першій похідній від числового значення швидкості або другій похідній від відстані (криволінійної координати) за часом; а Проекція прискорення на головну нормаль – нормальне прискорення $\bar{a}_n$ дорівнює квадрату модуля швидкості, діленому на радіус кривизни траєкторії в даній точці кривої; Проекція прискорення на бінормаль дорівнює нулю.

В інженерних розрахунках користуються ще однією формулою:

$$a_n = V \cdot \omega, \quad (8.11)$$

де: V – швидкість точки;

ω – швидкість повороту дотичній до траєкторії.

Вектор a_n завжди спрямований убік увігнутості кривій, тому що $a_n \geq 0$, а складова $\bar{a}_\tau$ може бути спрямована як у позитивну сторону, так і в негативну залежно від знаку проекції $\bar{a}_\tau$. Вектор прискорення точки a зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на складових $\bar{a}_\tau$ і a_n як на сторонах.

Тому що $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$, то:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (8.12)$$

Напрямок головної нормалі векторі прискорення a визначається його відхиленням від

$$\tan \varphi = \frac{a_\tau}{a_n} \quad (8.13)$$

8.3. Окремі випадки руху точки.

8.3.1. Прямолінійний рух.

а) нерівномірне. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то радіус кривизни

$\rho = \infty$, тоді $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ й все прискорення точки дорівнює тільки дотичному прискоренню:

$$a = a_\tau \frac{dv}{dt}. \quad (8.14)$$

У цьому випадку змінюється тільки модуль прискорення, тоді як напрямок залишається постійним – по прямої лінії. Таким чином, *дотичне прискорення характеризує зміна швидкості по величині.*

б) рівномірне. Рівномірним називають такий рух точки, при якому числове значення швидкості увесь час залишається постійним $V = \text{const}$, отже: $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$, $a_n = 0$, $a = 0$.

Помітимо, що це єдиний вид руху при якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю.

в) рівнозмінне. $a_n = 0$, $a_\tau = \pm a = \text{const}$

«+ a» – рівноприскорене;

«- a» – рівноуповільнене.

Тому що $a = \frac{dV}{dt}$, то $dV = a \cdot dt$, проінтегруємо:

$$\int_{V_0}^V dV = \pm a \cdot \int_{t_0}^t dt$$

і одержимо:

$$V = V_0 + a \cdot t. \quad (8.15)$$

Тому що

$$V = \frac{dx}{dt} \text{ то } \frac{dx}{dt} = V_0 + a \cdot t$$

проінтегруємо:

$$\int_0^x dx = V_0 \int_0^t dt + a \cdot \int_0^t t \cdot dt$$

$$x = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}. \quad (8.16)$$

8.3.2. Криволінійний рух.

а) рівномірне. $|\vec{V}| = const$, тоді $a_0 = \frac{dV}{dt} = 0$ й все прискорення точки дорівнює нормальному прискоренню:

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (8.17)$$

Вектор прискорення a спрямований увесь час по нормалі до траєкторії точки. Тому що прискорення точки в цьому випадку з'являється тільки в результаті зміни напрямку швидкості, то звідси містимо, що **нормальне прискорення характеризує зміну швидкості по напрямку.**

Знайдемо закон рівномірного криволінійного руху. Тому що $V = \frac{dS}{dt}$, то $dS = V \cdot dt$. Нехай у початковий момент часу $t_0 = 0$ точка перебуває від початку відліку на відстані одержимо: S_0 , тоді інтегруємо рівність у відповідних межах: $\int_{S_0}^S dS = V \cdot \int_0^t dt$, одержимо:

$$S = S_0 + V \cdot t. \quad (8.18)$$

б) рівнозмінне. Рівнозмінним називають такий рух точки, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = const$.

Знайдемо закон цього руху, вважаючи, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $S = S_0$, $V = V_0$: $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, звідки: $dV = a_\tau \cdot dt$. проінтегруємо отримана рівність у заданих межах:

$$\int_{V_0}^V dV = a_\tau \cdot \int_0^t dt,$$

одержимо:

$$V = V_0 + a_\tau \cdot t. \quad (8.19)$$

з огляду на, що $V = \frac{dS}{dt}$ формулу (8.19) можна представити у вигляді:

$$\frac{ds}{dt} = V_0 = a_\tau \cdot t,$$

Звідки

$$dS = V_0 \cdot dt + t \cdot dt,$$

проінтегруємо: $\int_{S_0}^S dS = V_0 \cdot \int_0^t dt + a_\tau \cdot \int_0^t t \cdot dt$

і одержимо:

$$S + S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}. \quad (8.20)$$

Якщо при криволінійному русі точки модуль швидкості зростає, то рух називають прискореним, якщо убуває – уповільненим.

8.3.3. Прямолінійні гармонійні коливання. Нехай точка рухається по прямій, наприклад, по осі Ox , і її відстань від початку відліку змінюється за законом $x = A \cdot \cos k \cdot t$, (8.20) де: A і k – постійні.

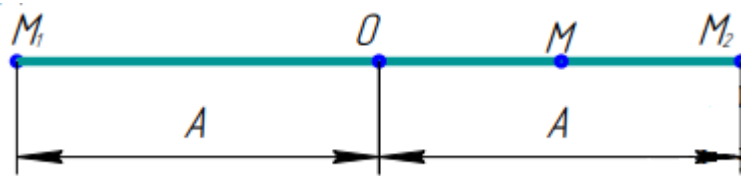


Рисунок 8.8 – Рух точки по прямій

Рух точки є коливальним між положеннями M_1 й M_2 . Ці коливання називаються гармонійними. Величина A називається **амплітудою**, проміжок часу $T = \frac{2\pi}{k}$ в плинні якого точка робить повне коливання називається **періодом коливань**, величина k – називається **круговою частотою**, $k \cdot t = \phi$ – називається **фазою**.

8.4. Технічні приклади.

Якщо дані залежності $x = f(t)$; $V = f(t)$; $a_\tau = f(t)$, та побудова графіків відстані, швидкості й прискорення не представляє утруднень.

Графік рівномірного руху.

Графік рівнозмінного руху.

Графік руху не слід змішувати із траєкторією, що у всіх випадках повинна задаватися додатково.

Графіки нормального й повного прискорень крім закону руху залежать ще від радіуса кривизни ?, тобто від виду траєкторії й при тому самому законі $S = f(t)$ будуть для різних траєкторій різними.

Приклад 8.4.1. Знайти рівняння траєкторії, швидкість, прискорення в момент часу $t = 1$ з, якщо рівняння руху точки має вигляд:

$$x = 4 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot t, y = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t.$$

Рішення.

1. Рівняння траєкторії задане в параметричній формі. Знайдемо рівняння траєкторії в явному виді, виключивши параметр t :

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot t \right) = \frac{x^2}{4^2}, \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot t \right) = \frac{y^2}{3^2},$$

тому що: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, то одержимо:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

– рівняння еліпса з півосями $a = 4$, $b = 3$.

2. Швидкість і прискорення визначимо по їхніх проєкціях на осі координат.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (4 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot t) = 2 \cdot \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot t.$$

$$\text{При } t = 1\text{з: } V_x = 0, V_y = -\frac{3}{2} \cdot \pi.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right)^2} = \frac{3}{2} \cdot \pi.$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt} (2 \cdot \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t) = -\pi^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot t,$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot t\right) = -\frac{3}{2} \cdot \pi^2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t.$$

$$\text{При } t = 1\text{ з: } a_x = -\pi^2, a_y = 0.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\pi^4 + 0} = \pi^2.$$

Приклад 8.4.2. Рух добрих з туковисівного апарату.

Рух частинки добрий, кинутій під кутом α до горизонту планкою барабана туковисівного апарату, описується рівнянням:

$$X = V_p \cdot t \cdot \cos \alpha, Y = V_p \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

де V_p – швидкість кінця планки барабана.

Визначити радіус кривизни траєкторії в момент сходу частинки із планки барабана.

Рішення.

Радіус ρ кривизни траєкторії частинки може бути знайдений з формули $\rho = \frac{V^2}{a_n}$. Оскільки рух заданий координатним способом, то швидкість частки визначається за її Проекціями на координатні осі:

$$V_x = \dot{X} = V_p \cdot \cos \alpha, V_y = \dot{Y} = V_p \cdot \sin \alpha - g \cdot t, \quad (1)$$

$$V = \sqrt{V_p^2 \cdot \cos^2 \alpha + (V_p \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}. \quad (2)$$

Нормальне прискорення частки знайдемо за такою формулою:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad (3)$$

$$\text{де } a = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} = \sqrt{0 + (-g)^2} = g$$

$$a_\tau = - \frac{V_p \cdot \sin \alpha - g \cdot t}{\sqrt{V_p^2 \cdot \cos^2 \alpha + (V_p \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}} \cdot g \quad (4)$$

Значення швидкості та дотичного прискорення частки в момент сходу її з планки барабана (при $t = 0$): $V = V_p$, $a_\tau = -g \cdot \sin \alpha$,
тоді

$$a_n = \sqrt{g^2 - g^2 \cdot \sin^2 \alpha} = g \cdot \cos \alpha. \quad (5)$$

Отже:

$$\rho = \frac{V_p}{g \cdot \cos \alpha}. \quad (6)$$

Контрольні питання

- 8.1. Що називають прискоренням точки?
- 8.2. Який напрямок має вектор прискорення точки?
- 8.3. Чому дорівнює вектор прискорення точки при векторному завданні руху точки?

8.4. Як визначаються складові вектору прискорення при координатному завданні руху точки?

8.5. Як зв'язані прискорення при векторному й координатному способах завдання руху?

8.6. Як спрямована дотична, головна нормаль і бінормальна осі природного тригранника?

8.7. Яка величина називається радіусом кривизни траєкторії?

8.8. На які складові розкладається прискорення при природному способі завдання руху?

8.9. Як спрямовані, як визначаються й що характеризують дотичні й відцентрові прискорення?

8.10. Як визначається повне прискорення, якщо відомі нормальне й тангенціальне?

8.11. Якими кінематичними характеристиками характеризується точка при прямолінійному нерівномірному, рівномірному й рівнозмінному рухах, криволінійному рівномірному й рівнозмінному рухах?

8.12. Які рухи називає прямолінійним рівномірним, прямолінійним нерівномірним, прямолінійним рівнозмінним, криволінійним рівномірним, криволінійним рівнозмінним?

ТЕМА 9: НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА.

ПЛАН

- 9.3. Поступальний рух твердого тіла.
- 9.4. Обертний рух твердого тіла.
- 9.2.1. Визначення обертного руху.
- 9.2.2. Закон обертного руху.
- 9.2.3. Кутові характеристики обертного руху.
- 9.2.4. Лінійні характеристики обертного руху.
- 9.2.5. Окремі випадки обертного руху.

Так само як і в статиці всі тверді тіла будемо розглядати як *абсолютно тверді*. У кінематиці твердого тіла вирішуються два завдання:

1. Завдання руху й визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому.
2. Визначення кінематичних характеристик руху окремих точок тіла.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: поступальне, обертальне, плоскопаралельний, сферичне, складне.

Поступальний і обертний рухи є найпростішими рухами твердого тіла. Розглянемо в першу чергу поступальний рух твердого тіла.

9.1. Поступальний рух твердого тіла.

Поступальним називається такий рух тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно самої собі. При цьому траєкторії точок тіла можуть бути будь-якими кривими лініями.

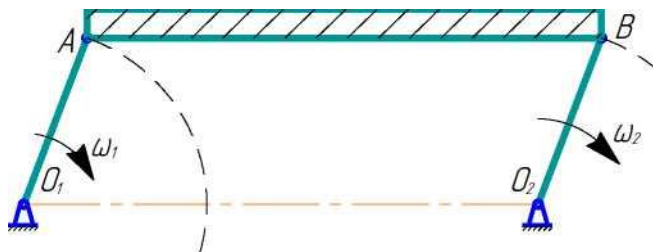


Рисунок 9.1 – Поступальний рух твердого тіла

Наприклад: рух автомобіля на прямій горизонтальній ділянці дороги є поступальним прямолінійним; механізм, що складається із

двох однакових кривошипів OA і OB , з'єднаний спарником AB . При обертанні кривошипів, спарник рухається поступально, тому що будь-яка проведена в ньому пряма залишається паралельною її початковому положенню. Точки спарника при цьому рухаються по окружності.

Властивості поступального руху твердого тіла визначаються наступною **теоремою**: при поступальному русі всі точки тіла описують однакові (при 1 накладенні – співпадаючі) траєкторії й мають у кожний момент часу однакові по модулі й напрямку швидкості й прискорення.

Для доказу розглянемо тверде тіло, що робить поступальний рух відносно системи відліку $Oxyz$. Візьмемо в тілі дві довільні точки A й B , положення яких у момент часу t визначається радіусами-векторами $\vec{r}_A$ й $\vec{r}_B$. Проведемо вектор $\vec{AB}$, що з'єднує ці дві точки. Тоді:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (9.1)$$

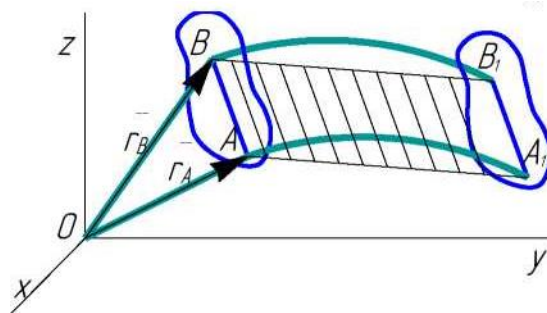


Рисунок 9.2 – Поступальний рух твердого тіла

При цьому довжина $AB = const$. Напрямок AB залишається теж незмінним, тому що тіло рухається поступально. У такий спосіб вектор AB увесь час руху залишається постійним $AB = const$. Внаслідок цього, як видно з рівності (9.1) і безпосередньо із креслення, траєкторія в точки B виходить із траєкторії точки A паралельним зсувом всіх її точок на постійний вектор AB . **Отже**: траєкторії точок A і B будуть однаковими, а при накладенні співпадаючими.

Для знаходження швидкостей точок A і B Продиференціюємо рівність (9.1) за dt часом:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt}$$

Тут, $\frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0$ як похідна від постійного вектору ($\vec{AB} = const$):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{V}_B, \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{V}_A,$$

тоді одержимо:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \quad (9.2)$$

Візьмемо від обох частин рівності (9.2) похідні за часом і одержимо:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} \text{ або } \vec{a}_B = \vec{a}_A. \quad (9.3)$$

Тому що точки A й B були обрані довільно, те з попередніх результатів треба, що у всіх точок тіла траєкторії, швидкості й прискорення в будь-який момент часу при поступальному русі однакові по модулі й напрямку.

З теореми треба, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом якої-небудь однієї його точки й вивчення поступального руху зводиться до завдання кінематики точки. При цьому загальну для всіх точок тіла швидкість $\vec{V}$ називають **швидкістю поступального руху**, а прискорення $\vec{a}$ – **прискорення поступального руху тіла**.

9.2. Обертний рух твердого тіла.

9.2.1. Визначення обертного руху.

Обертним рухом твердого тіла навколо нерухливої осі називається такий його рух, при якому які-небудь дві точки A й B , що належать йому або незмінно з ним зв'язані, в усі час руху залишаються нерухливими.

Минаючи через точки A й B , пряма AB називається **віссю обертання**. Тому що відстань між точками твердого тіла незмінно, те при обертному русі всі точки, що належать осі, будуть залишатися нерухливими, а всі інші точки будуть описувати окружності, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

2. Закон обертного руху.

Положення тіла при обертанні в будь-який момент часу визначається **кутом повороту** φ . Якщо провести в деякий момент часу через вісь обертання (вісь Oz) нерухливу напівплощину I , а через деякий проміжок часу зв'язану в тіло обертину полуплоскості II , то вийде кут φ - *кут повороту*. Будемо вважати кут φ позитивним, якщо

він відкладений від нерухливої напівплощини проти годинникової стрілки, спостерігаючи з позитивного кінця осі Oz . Вимірюється кут φ у радіанах. Радіаном називається центральний кут, довжина дуги якого дорівнює R . Кут в 360° містить 2π радіанів.

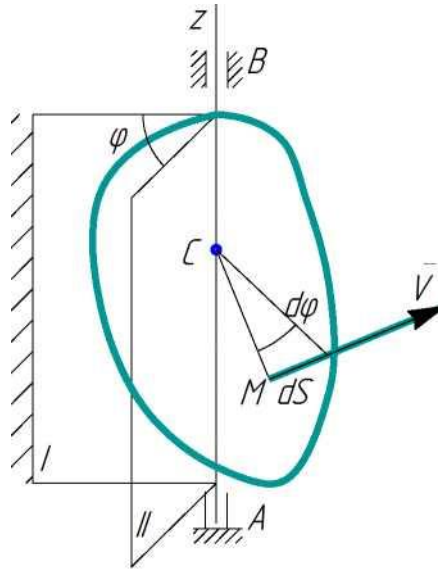


Рисунок 9.3 – Обертний рух твердого тіла

Один радіан дорівнює $\frac{360}{2 \cdot \pi} = 57^\circ 17' 44,8''$; при розрахунках

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N,$$

де: N – число обертів.

При обертанні кут міняється в часу, тому щоб довідатися положення тіла в будь-який момент часу, потрібно знати залежність кута φ від часу t , тобто **кінематичне рівняння обертального руху тіла навколо нерухливої осі**:

$$\varphi = f(t). \quad (9.4)$$

9.2.3. Кутові характеристики обертального руху.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його *кутова швидкість* ω і *кутове прискорення* ε .

Нехай за малий проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло робить поворот на кут $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi$. Тоді відношення $\Delta \varphi$ до Δt називають **середньою кутовою швидкістю**:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (9.5)$$

Шляхом граничного переходу при $\Delta t \rightarrow 0$ одержимо кутову швидкість тіла в цей момент часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.6)$$

Кутова швидкість ω у цей момент часу дорівнює першій похідній за часом t від кута повороту φ .

У техніку часто кутову швидкість задають числом обертів у мінуту:

$$\omega = \frac{2 \cdot p \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Розмірність кутової швидкості: *радіан/с; с⁻¹*.

Знак ω визначає напрямок обертання тіла. Якщо обертання відбувається по годинній стрілці (спостерігаючи з позитивного напрямку осі Oz) з убуттям кута повороту φ , то $\omega < 0$. якщо проти вартвий зі зростанням кута поворотів φ , те $\omega > 0$.

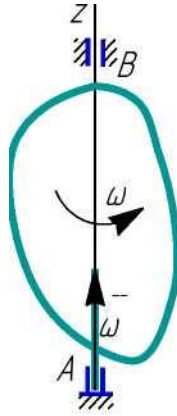


Рисунок 9.4 – Обертальний рух твердого тіла

Тому кутову швидкість тіла зображують у вигляді ковзного вектору $\vec{\omega}$, спрямованого по осі обертання в ту сторону, звідки обертання видно проти годинниковій стрілки.

Такий вектор визначає відразу й модуль кутової швидкості $|\vec{\omega}|$, і вісь обертання, і напрямок обертання навколо цієї осі.

Кутове прискорення тіла характеризує зміна із часом кутової швидкості.

Коли за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість тіла змінилася на величину $\Delta \omega = \omega_1 - \omega$, то чисельне значення середнього кутового прискорення ε_{cp} за цей проміжок часу дорівнює:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (9.8)$$

Шляхом граничного переходу при $\Delta t \rightarrow 0$ одержимо кутове прискорення тіла в цей момент часу:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad \varepsilon \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (9.9)$$

Кутове прискорення ε тіла в цей момент часу дорівнює першій похідній за часом t від кутової швидкості ω або другої похідної від кута повороту φ .

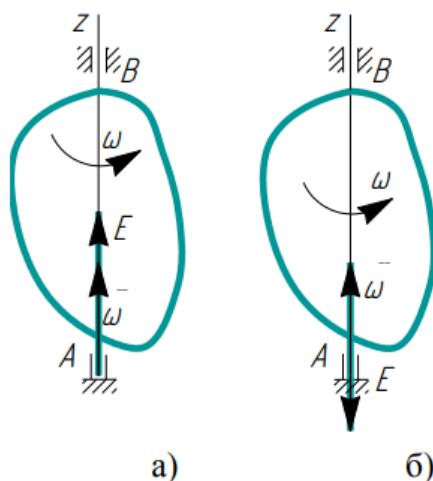


Рисунок 9.5 – Кінематичні характеристики при обертальному русі твердого тіла

Якщо модуль кутового прискорення згодом зростає, то обертання тіла називають прискореним, а якщо убыває – уповільненим.

Так само як і кутову швидкість, кутове прискорення зображують ковзним вектором, спрямованим по осі обертання Oz , причому, якщо напрямку $\vec{\omega}$ й $\vec{\varepsilon}$ збігаються, рух прискорене, якщо $\vec{\omega}$ й $\vec{\varepsilon}$ спрямовані в протилежні сторони – рух уповільнене.

- а) $\varepsilon > 0$ – прискорений рух;
- б) $\varepsilon < 0$ – уповільнений рух.

9.2.4. Лінійні характеристики обертового руху.

Розглянемо яку-небудь точку M твердого тіла, що перебуває на відстані R від осі обертання Oz .

При обертанні тіла траєкторією точки M буде окружність радіуса R , розташована в площині перпендикулярній осі обертання Oz , а її центр лежить на самій осі. Радіус даної окружності називається радіусом обертання точок тіла.

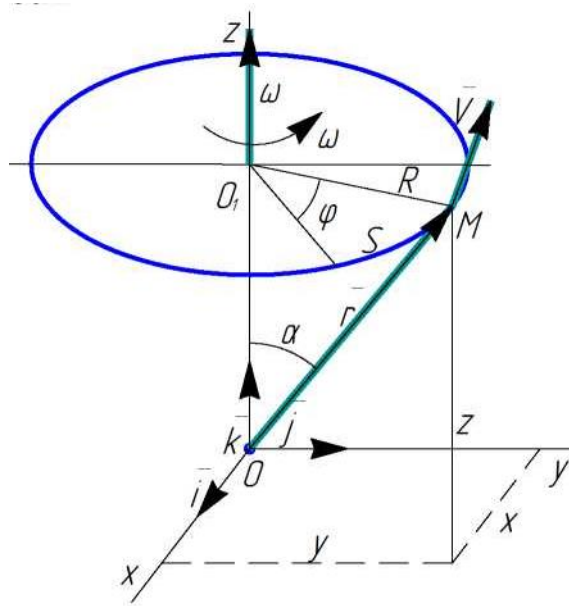


Рисунок 9.6 – Лінійні характеристики обертового руху

При повороті тіла на кут φ для точки з радіусом обертання R закон руху точки по траєкторії має вигляд:

$$S = R \cdot \varphi,$$

де S – дугова координата відповідному куту повороту φ .

Швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо осі, Oz називається лінійною.

Швидкості точок на обіді маховика або обертового диска називаються **окружними**.

а) якщо рух заданий природно й за час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому зробить елементарне переміщення уздовж своєї траєкторії. $dS = R \cdot d\varphi$. Тоді швидкість точки буде дорівнює:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R \cdot \varphi)}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega, \quad (9.11)$$

так як $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Значення лінійної швидкості точки обертового тіла дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання (на радіус обертання).

Спрямовано вектор лінійної швидкості по дотичній до окружності у бік обертання, отже, перпендикулярно радіусу.

б) якщо рух заданий у векторній формі, то положення точки

M визначається радіусом-вектором $\vec{r}$. При цьому $R = r \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r})$, тоді:

$$V = R \cdot \omega = \omega \cdot r \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}). \quad (9.12)$$

Це є векторний добуток векторів m і r по модулі, отже:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} - \text{формула Ейлера.} \quad (9.13)$$

Лінійна швидкість точки дорівнює векторному добутку вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$ й радіуса-вектору $\vec{r}$.

в) якщо рух заданий у координатній формі, то проекції лінійної швидкості точки M на осі координат визначається формулами:

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ V_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ V_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \quad (9.14)$$

З огляду на, що $\omega_x = 0$, і $\omega_z = \omega$, те одержимо:

$$\begin{aligned} V_x &= \omega \cdot y \\ V_y &= -\omega \cdot x. \\ V_z &= 0 \end{aligned} \quad (9.15)$$

а) визначимо прискорення точки M , скориставшись **природним способом** завдання руху. Як нам відомо:

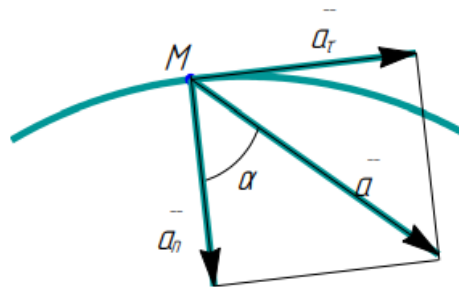


Рисунок 9.7 – Визначення кінематичних характеристик при обертальному русі

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_\tau = \frac{dv}{dt}, a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

тоді, підставивши (9.11) одержимо:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega^2 \cdot R^2}{\rho} = \omega^2 \cdot R, a_\tau = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon: \\ a_n &= \omega^2 \cdot R^2, a_\tau = R \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{\omega^4 \cdot R^2 + R^2 \cdot \varepsilon^2} = r \cdot \sqrt{\omega^4 \cdot \varepsilon^2};$$

$$a = r \cdot \sqrt{\omega^4 \cdot \varepsilon^2}$$

Напрямок повного прискорення визначимо по тангенсі кута a , що утвориться повним і нормальним прискоренням:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (9.18)$$

б) визначимо прискорення точки M у **векторній формі** завдання руху.

Продиференціюємо вектор швидкості точки M : $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\omega}$, тут $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ звідки одержимо:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{V}. \quad (9.19)$$

З огляду на, що модуль $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}) = \varepsilon \cdot r = a_\tau$,

$$\text{і } \vec{\omega} \times \vec{V} = \omega \cdot V \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \omega \cdot V = \omega^2 \cdot R = a_n,$$

одержимо: $\vec{a} = \vec{\tau} \cdot a_\tau + \vec{n} \cdot a_n$.

9.2.5. Окремі випадки обертового руху.

Якщо кутова швидкість тіла в усі час руху залишається постійної ($\omega - \text{const}$), то обертання тіла називається **рівномірним**.

Знайдемо закон рівномірного обертання, вважаючи, що в початковий момент часу, $\varphi = \varphi_0$, $t = 0$: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тоді $d\varphi = \omega \cdot dt$.

Інтегруємо з урахуванням початкових умов: $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \cdot \int_0^1 dt$, і одержимо **закон рівномірного обертання**:

$$\varphi = \varphi_0 = \omega \cdot t \quad (9.20)$$

Якщо кутове прискорення тіла в усі час руху залишається постійним ($\varepsilon - \text{const}$), то обертання називається **рівнозмінним**.

Знайдемо закон рівнозмінного обертання, вважаючи, що в початковий момент часу $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, тоді $d\omega = \varepsilon \cdot dt$.

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t. \quad (9.21)$$

Замінімо $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тоді одержимо: $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$ або

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon \cdot t \cdot dt.$$

Інтегруємо з урахуванням початкових умов:

$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \cdot \int_0^1 dt + \varepsilon \cdot \int_0^1 t \cdot dt$, і одержимо закон рівнозмінного обертання:

$$\varphi = \varphi_0 = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \quad (9.22)$$

Якщо ω й ε мають однакові знаки, то обертання буде рівноприскореним, якщо різні – рівносповільненим.

Кінематика соломотряса.

Клавіша соломотряса AB з'єднана шарнірно в точках A і B з кривошипями OA и O_1B , обертаються навколо осей O і O_1 з постійною частотою обертання $n=240$ об/хв (Рис. 9.8). Визначити швидкість та прискорення будь-якої точки M клавіші, якщо $OA=O_1B=0,2$ м.

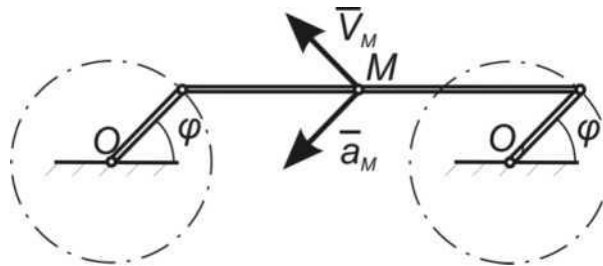


Рисунок 9.8 – Кінематична схема соломотряса

Рішення.

При рівності довжин кривошипів і однакової частоті обертання клавіша AB здійснює поступальний рух, а точка M рухається тотожно з точками A і B .

Швидкість та прискорення точки A знаходимо за формулами:

$$V_A = OA \cdot \omega, \quad a_{An} = OA \cdot \omega^2, \quad a_{At} = OA \cdot \varepsilon. \quad (1)$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{240 \cdot \pi}{30} = 8 \cdot \pi \text{ с}^{-1}, \text{ то } V_A = 0,2 \cdot 8 \cdot \pi = 1,6 \cdot \pi \text{ м/с}.$$

$$a_{Ar} = 0,2 \cdot 0 = 0, \quad a_A = a_{An} = 0,2 \cdot (8 \cdot \pi)^2 = 12,8 \cdot \pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Швидкість та прискорення точки M , рівні швидкості та прискорення точки A , показані на рис. 9.8.

Контрольні питання

- 9.1. Які рухи називають найпростішими?
- 9.2. Який рух називають поступальним?
- 9.3. Як зв'язані кінематичні характеристики точок тіла при поступальному русі?
- 9.4. Кінематичні характеристики якої точки повністю визначають рух усього тіла при поступальному русі?
- 9.5. Який рух називають обертальним?
- 9.6. Яка пряма називається віссю обертання тіла?
- 9.7. Якою величиною визначається положення тіла при обертальному русі?
- 9.8. Що необхідно знати для визначення положення тіла при обертальному русі в довільний проміжок часу?
- 9.9. Які основні кінематичні характеристики тіла при обертальному русі?
- 9.10. Як визначається кутова швидкість при обертальному русі?
- 9.11. Як зв'язана кутова швидкість тіла з лінійною швидкістю будь-якої його точки?
- 9.12. Що характеризує і як визначається кутове прискорення?
- 9.13. Які основні лінійні характеристики обертального руху?
- 9.14. Як визначається лінійна швидкість при завданні обертального руху у векторній формі?
- 9.15. Чому рівні кінематичні характеристики при рівномірному й рівнозмінному обертальному русі?

ТЕМА 10: ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.

ПЛАН

- 10.11. Плоскопаралельний рух твердого тіла й рух плоскої фігури в її площині.
- 10.12. Рівняння руху плоскої фігури і її точок.
- 10.13. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертовий рух навколо полюса.
- 10.14. Основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху.
- 10.15. Визначення швидкостей точок плоскої фігури.
- 10.16. Теорема про проєкції швидкостей 2-х точок плоскої фігури на пряму з'єднуючі ці точки.
- 10.17. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою МЦС.
- 10.18. Окремі випадки визначення МЦС.
- 10.19. Визначення прискорень точок плоскої фігури.
- 10.20. Технічні приклади.

10.1. Плоскопаралельний рух твердого тіла й рух плоскої фігури в її площині

Плоскопаралельним (або **плоским**) називають такий рух твердого тіла, при якому всі його точки переміщуються паралельно деякій нерухливій площини Q .

Плоский рух роблять багато частин механізмів і машин, *наприклад*: колесо на прямолінійній ділянці шляху, шатун у кривошипно-шатунному механізмі, решітний стан зерноочисної машини, мотовило зернозбиральних комбайнів. Часткою случаємо плоскопаралельного руху є обертовий рух твердого тіла навколо нерухливої осі.

При плоскому русі фігура, утворена перетином тіла нерухливою площиною Q , в усі час руху залишається в цій площині.

Перетнемо тверде тіло якою-небудь площиною P паралельною площини Q ($P \parallel Q$). У перетині одержимо фігуру S . Розглянемо рух точок тіла, розташованих на перпендикулярі до площини Q .

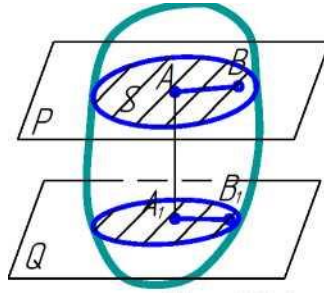


Рисунок 10.1 – Кривошипно-шатунний механізм

Точка A рухається в площині P , що паралельна Q , ($P \parallel Q$), а точка A_1 - у площині Q . При русі відрізок AA_1 залишається перпендикулярним Q - це значить, що всі точки цього перпендикуляра описують тотожні паралельні траєкторії й у кожний момент часу мають однакові швидкості й прискорення.

Це дозволяє зробити висновок, що для вивчення руху всього тіла досить вивчити, як рухається в площині P перетин S цього тіла, або деяка плоска фігура S . Тому надалі ми будемо розглядати рух плоскої фігури S в її площині, тобто в площині P .

Визначим рівняння руху плоскої фігури.

10.2. Рівняння руху плоскої фігури і її точок.

Нехай плоска фігура робить рух у системі координат xOy . Жорстко зв'яжемо з фігурою систему координат $x_1 O_1 y_1$.

Положення фігури в площині xOy буде визначено, якщо буде відомо положення рухливої системи координат $x_1 O_1 y_1$ відносно нерухливої. Це положення цілком можна визначити положенням полюса $O_1 (x_0, y_0)$ й кутом повороту φ рухливої системи відносно нерухливої.

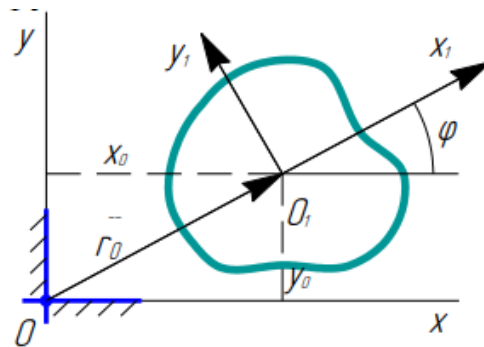


Рисунок 10.2 – Плоска фігура

При русі фігури буде змінюватися положення полюса, яке можна визначити:

- радіусом-вектором $\bar{r}_0$;
- координатами точки $O_1 (x_0, y_0)$.

При русі всієї фігури змінюється положення точки O_1 й кут повороту осей $x_1O_1y_1$ - φ . Щоб знати закон руху, тобто положення фігури в площині xOy в будь-який момент часу, потрібно знати наступні залежності:

- при завданні рівняння руху плоскої фігури у векторній формі:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t), \varphi_0 = \varphi_0(t). \quad (10.1)$$

- при завданні рівняння руху плоскої фігури в координатній формі: $x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t), \varphi_0 = \varphi_0(t)$.

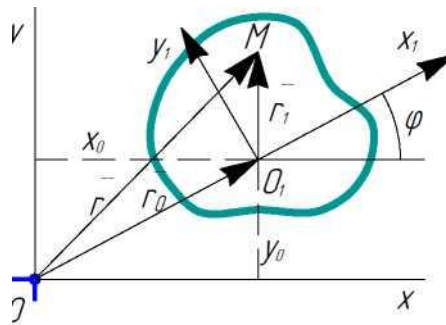


Рисунок 10.3 – Кінематика плоскої фігури

Положення довільної точки M в нерухливій системі координат описується радіусом-вектором за допомогою *рівняння руху точки плоскої фігури в її площині (рівняння рівнобіжного-плоско-паралельного руху твердого тіла)*:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1. \quad (10.2)$$

10.3. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертовий рух навколо полюса.

Повернемося до рівнянь руху (10.2) руху плоскої фігури:

- перші два рівняння $x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t)$ визначають рух, при яких $\varphi = const$, тобто – поступальне, коли всі точки тіла рухаються так само як полюс O_1 .

- третє рівняння $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ визначає обертальний рух фігури навколо нерухомого полюса O_1 при якому $x_{O1} = const, y_{O1} = const$.

Звідси бачим, що в загальному випадку: плоскопаралельний рух

фігури складається з поступального руху, при якому всі точки фігури рухаються як полюс O_1 і обертовий рух навколо цього полюса.

Нехай плоска фігура переміщається з положення I в положення II . Покажемо, що рівнобіжне-плоско-паралельне переміщення можна здійснити сукупністю двох простих переміщень: поступального й повороту. Приймаючи точку A за полюс, перемістимо AB паралельно самої собі й повернемо навколо точки A на кут φ .

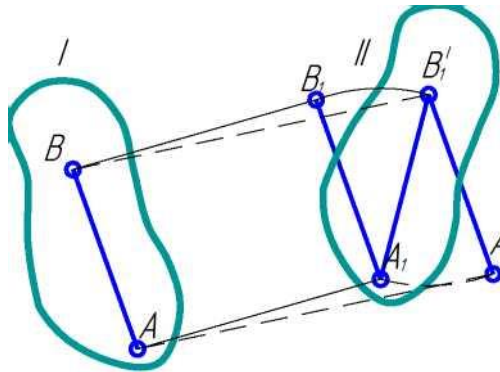


Рисунок 10.4 – Плоскопаралельний рух фігури

Те ж саме можна виконати, приймаючи за полюс точку B .

Відповідно, *плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як рух, що складаються з поступального руху разом з полюсом A і обертального навколо осі, перпендикулярної площини Π й минаючої через полюс A .*

Висновок: кут повороту φ не залежить від вибору полюса, отже, кутова швидкість і кутове прискорення також не залежать від вибору полюса.

10.4. Основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху.

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху є: швидкість V_A і прискорення a поступального руху, рівні швидкості й прискоренню полюса A , а також кутова швидкість ω_A і кутове прискорення ε_A обертального руху навколо полюса. При цьому в якості полюса можна вибрати будь-яку точку фігури.

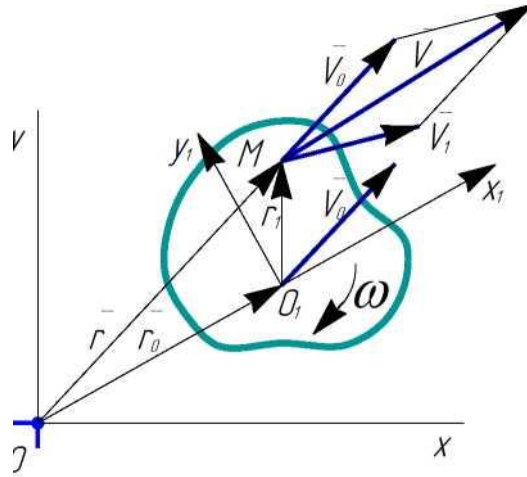


Рисунок 10.5 – Кінематичні характеристики
плоскопаралельного руху

Нехай плоскопаралельний рух тіла визначається рівняннями

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \varphi = \varphi(t).$$

Відомо, що положення довільної точки M визначиться радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$. Диференціюємо ліву й праву частини рівності за часом: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \vec{r}_1)$; $\vec{V} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt}$, $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1$.

Тому що $\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$ – швидкість поступального руху полюса O_1 ;

$\vec{V}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$ – швидкість точки в обертовому русі навколо O_1 , тоді напишемо:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1. \quad (10.3)$$

У такий спосіб: *швидкість точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса й швидкості точки в обертовому русі навколо полюса.*

Визначимо прискорення точок плоскої фігури.

Тому що при плоскому русі $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1$, диференціюємо, одержимо:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1), \vec{a} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_1}{dt},$$

де $\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0$ – прискорення поступального руху;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_1 = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{a}_1^t$ – дотичне прискорення в обертовому русі;

$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_1 = \vec{a}_1^n$ – нормальне прискорення в обертовому

русі.

Тоді:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_1 + \bar{\omega} \times \bar{V}_1. \quad (10.4)$$

Інакше:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1^r + \bar{a}_1^n. \quad (10.5)$$

або

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1. \quad (10.6)$$

Їхні модулі визначаються в такий спосіб:

$$a_0 = \sqrt{a_{0x}^2 + a_{0y}^2}$$

$$a_1 = r_1 \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, a_1^r = \varepsilon \cdot r_1, a_1^n = \omega^2 \cdot r_1.$$

10.4.1. Визначення траєкторії ножів фрез ротаційних машин

Широке застосування на різних операціях у сільському господарстві знаходять фрези, що є дисками з ножами, рівномірно розміщеними по колу. При роботі фрези ножі здійснюють плоскопаралельний рух, що складається з переносного поступального руху агрегату зі швидкістю $\vec{V}_M$ та відносного обертального руху навколо осі фрезерного барабана з кутовою швидкістю ω (рис. 10.6).

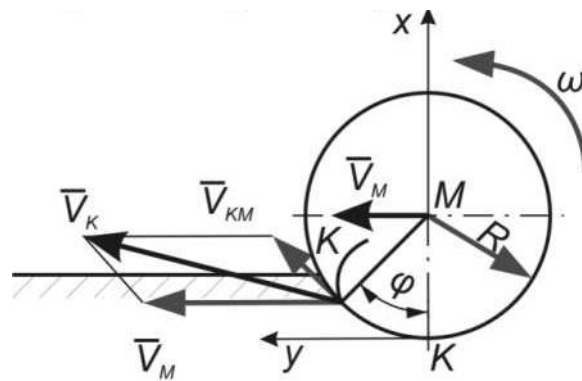


Рисунок 10.6 – Кінематичні характеристики ножів фрез ротаційних машин

Абсолютна швидкість точки K ножа фрези дорівнює геометричній сумі швидкості $\vec{V}_M$ точки M , прийнятої за полюс, та швидкості $\vec{V}_{KM}$ точки K у обертальному русі разом із фрезою навколо полюса:

$$\vec{V}_K = \vec{V}_M + \vec{V}_{KM} \quad (1)$$

де $V_{KM} = \omega R$.

Спроектувавши векторне рівняння (1) на координатні осі x і y , отримаємо:

$$V_Y = \dot{y} = \omega \cdot R \cos \varphi + V_M, V_X = \dot{X} = \omega \cdot R \sin \varphi. \quad (2)$$

Враховуючи, що при рівномірному обертанні фрези $\varphi = \omega t$, переписуємо рівняння (2) у вигляді:

$$dy = (\omega R \cos \omega t + V_M)dt, dx = \omega R \sin \omega t \cdot dt; \quad (3)$$

та проінтегрувавши їх з урахуванням початкових умов (при $t = 0$ $X_0 = Y_0 = 0$), знайдемо у параметричній формі рівняння траєкторії точки K ножа фрези:

$$X = R(1 - \cos \omega t); y = R \sin \omega t + V_M \cdot t \quad (4)$$

Як відомо, ці рівняння описують криву, яку називають триїдою.

10.5. Визначення швидкостей точок плоскої фігури

На попередній лекції ми визначили, що *при плоскому русі швидкість точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса й швидкості точки в обертovому русі навколо полюса.*

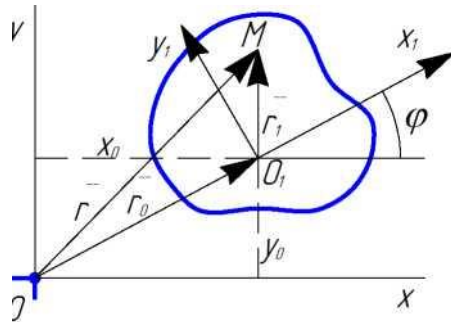


Рисунок 10.7 – Кінематика точок плоскої фігури

У такий спосіб: положення будь-якої точки M фігури визначається стосовно осей $x_1 O_1 y_1$ радіусом-вектором $\vec{r}$, при цьому:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$$

де: $\vec{r}_0$ – радіус-вектор полюса O_1 ;

$\vec{r}_1 = O_1 M$ – вектор, що визначає положення точки M відносно осей $x_1 O_1 y_1$, що переміщуються разом з полюсом O_1 .

Диференціюємо:

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt}, \quad (10.7)$$

де: $\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{V}_0$ – швидкість полюса O_1 ;

$$\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{V}_{MO} - \text{швидкість при обертанні фігури навколо полюса } O_1.$$

Отже: $\bar{V}_M = \bar{V}_O + \bar{V}_{MO}$, при цьому $\bar{V}_{MO} = \omega MO_1$,

де: ω – кутова швидкість фігури.

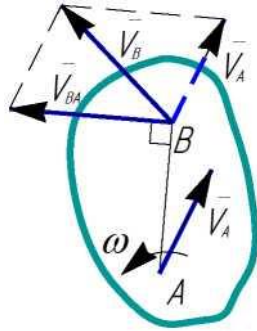


Рисунок 10.8 –

Таким чином, швидкість будь-якої точки M плоскої фігури геометрично дорівнює сумі швидкості якої-небудь точки O_1 , прийнятої за полюс і швидкості, що точка M одержує при обертовому русі фігури навколо цього полюса.

$$\bar{V}_M = \bar{V}_O + \bar{V}_{MO}. \quad (10.8)$$

Модуль і напрямок швидкості V_M перебувають побудовою відповідного паралелограма.

10.6. Теорема про проєкції швидкостей 2-х точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки.

Визначення швидкостей точок плоскої фігури (або тіла) за допомогою формули (10.8) зв'язано зі складними розрахунками. Однак, виходячи із цього основного результату, можна одержати ряд більше простих методів визначення швидкостей точок фігури (або тіла).

Один з таких методів дає теорема про проєкції швидкостей.

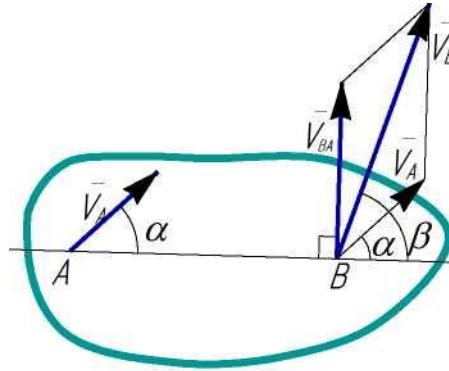


Рисунок 10.9 –

Розглянемо які-небудь дві точки A й B плоску фігуру. Приймаючи точку A за полюс, одержимо $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$. Проектуючи обидві частини рівності на вісь, що проходить через точки A й B , і з огляду на, що $\vec{V}_{BA} \perp BA$, одержимо: $V_B \cdot \cos \beta = V_A \cdot \cos \alpha$

Теорема: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що проходить через ці точки, рівні один одному по величині й однаково спрямовані.*

Доведена теорема дозволяє легко визначати швидкість точки тіла при відомій швидкості іншої точки й напрямку вектору швидкості першої точки.

10.7. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою МЦС.

Інший спосіб визначення швидкостей плоскої фігури заснований на понятті миттєвого центра швидкостей.

Миттєвим центром швидкостей (МЦС) називається точка плоскої фігури, швидкість якої в цей момент часу дорівнює нулю.

Покажемо, що якщо фігура рухається не поступально, те така точка в кожний момент часу існує й притім єдина.

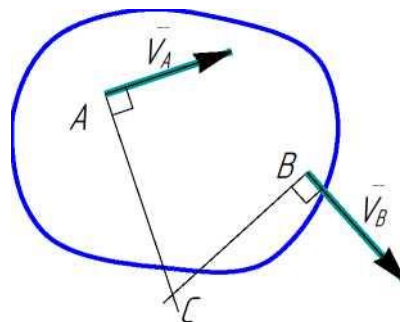


Рисунок 10.10 – Миттєвий центр швидкостей

Нехай у момент часу t точки A й B плоскої фігури мають швидкості V_A і V_B , не паралельні один одному. МЦС даної фігури – точка C , перебуває на перетинанні перпендикулярів, відновлених до векторів швидкостей точок A і B плоскої фігури. Напрямок обертання МЦС визначаємо по напрямку одного з векторів швидкостей (або по напрямку V_A або V_B).

Допустимо, що $V_C \neq 0$. По теоремі про проєкції $\bar{V}_C$ швидкостей вектор повинен бути одночасно перпендикулярний AC і BC , однак це неможливо.

Якщо в момент часу t взяти точку C за полюс, то по формулі (10.8) визначимо швидкість точки A : $\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{V}_{CA} = \bar{V}_{CA}$, тому що по визначенню МЦС $V_C = 0$. Швидкість точки B буде: $\bar{V}_B = \bar{V}_C + \bar{V}_{CB} = \bar{V}_{CB}$, тому що $V_C = 0$. Аналогічний результат виходить для будь-якої іншої точки фігури. Отже:

- швидкості точок плоскої фігури визначаються в цей момент часу так, ніби рух плоскої фігури був обертанням навколо МЦС, при цьому:

$$V_A = \omega \cdot CA, (\bar{V}_A \perp CA) \quad (10.9)$$

$$V_B = \omega \cdot CB, (\bar{V}_B \perp CB)$$

- швидкості точок плоскої фігури пропорційні їхнім відстаням від МЦС.

$$\frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB} \quad (10.10)$$

Висновки:

1. Для визначення МЦС потрібно знати тільки напрямки швидкостей V_A і V_B яких-небудь двох точок A і B плоскої фігури (або траєкторії цих точок); МЦС перебуває в точці перетинання перпендикулярів, відновлених до векторів V_A і V_B швидкостей точок A і B (або до дотичних до траєкторії).

2. Для визначення швидкості будь-якої точки плоскої фігури треба знати модуль і напрямки швидкості якої-небудь однієї точки A фігури й напрямки швидкості іншої її точки B .

Тоді, відновивши із точок A і B перпендикуляри до V_A і V_B визначимо МЦС фігури на перетинанні цих перпендикулярів і по напрямку V_A або V_B визначимо напрямки повороту фігури. Після цього, знаючи V_A , знайдемо по формулі (10.9) швидкість будь-якої точки плоскої фігури. Спрямовано вектор швидкості цієї точки

перпендикулярно прямій, що з'єднує МЦС і точку плоскої фігури, убік повороту фігури.

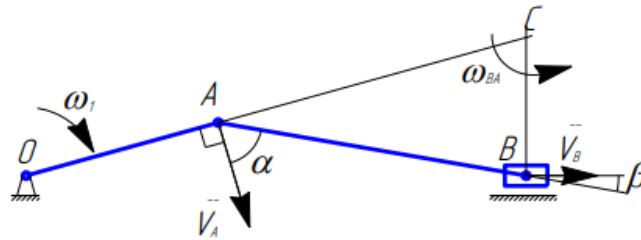


Рисунок 10.11 –

3. Кутова швидкість ω плоскої фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню швидкості будь-якої точки фігури до її відстані до МЦС.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{CA} = \frac{V_B}{CB}$$

$$V_B = \frac{V_A \cdot CB}{CA} = \omega_{BA} \cdot CB$$

або

$$V_B \cdot \cos \beta = V_A \cdot \cos \alpha$$

10.8. Окремі випадки визначення МЦС

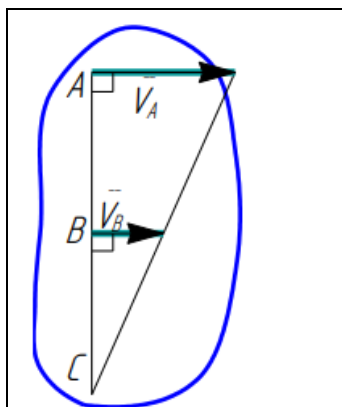


Рисунок 10.12 –
Якщо швидкості
точок паралельні

1. Якщо швидкості точок A і B паралельні й спрямовані в одну сторону, то МЦС перебуває на перетинанні ліній, що проходять через початок і кінці векторів V_A і V_B .

2. Якщо швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні й спрямовані в різні

сторони, то МЦС перебуває в точці перетинання ліній, що проходять через початок і кінці векторів V_A і V_B .

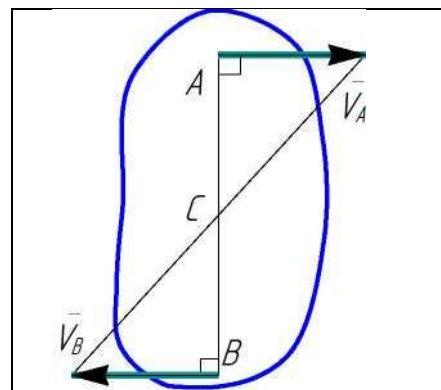


Рисунок 10.13 – Якщо
швидкості точок
паралельні і спрямовані
в різні сторони

3. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні один одному, причому модулі швидкостей точок A і B рівні $V_A = V_B$, то МЦС лежить у нескінченності й швидкості всіх точок тіла паралельні V_A або V_B . При цьому з теореми про проєкції швидкостей треба, що

$$V_B \cdot \cos \beta = V_A \cdot \cos \alpha \text{ або } V_B = V_A \quad (10.11)$$

Аналогічний результат вийде для всіх інших точок.

Отже, у розглянутому випадку, швидкості всіх точок фігури в цей момент часу рівні один одному і по модулі й по напрямку, тобто фігура має миттєвий поступальний розподіл швидкостей. Кутова швидкість ω тіла в цей момент часу дорівнює нулю: $\omega = 0$.

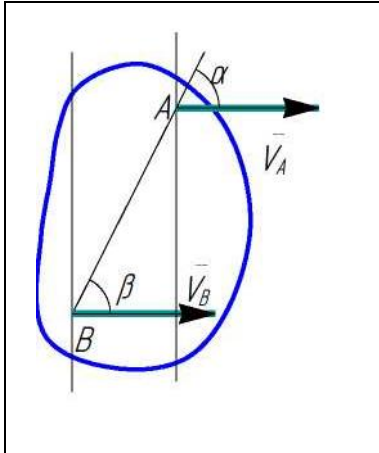


Рисунок 10.14 –
Якщо швидкості
точок паралельні ті
рівні по модулю

одного тіла без ковзання по нерухливій поверхні іншого, то точка дотику C загальна для двох тіл має в цей момент часу швидкість рівну нулю, і, отже, є МЦС

$$V_C = 0.$$

4. Якщо плоскопаралельним рухом є кочення

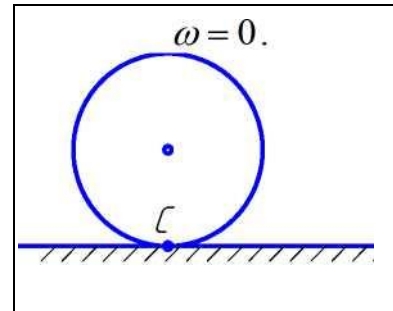


Рисунок 10.15 – При
коченні одного тіла
без ковзання по
нерухливій поверхні

10.9. Визначення прискорень точок плоскої фігури.

Прискорення будь-якої точки M плоскої фігури складається із прискорень, які точка одержує при поступальному й обертовому русі цієї фігури. Положення точки M стосовно осей Ox визначається радіусом-вектором: $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$

где $\vec{r}' = AM$ (A – полюс обертання).

Тоді:

$$a_M = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r'}{dt^2},$$

де $\frac{d^2 r_A}{dt^2} = a_A$ – прискорення полюса A ;

$\frac{d^2 r'}{dt^2}$ – прискорення точки M при обертанні навколо полюса A .

Отже:

$$a_M = a_A + a_{MA} \quad (10.12)$$

Значення a_{MA} , як прискорення точки при обертовому русі, визначиться по формулі:

$$a_{MA} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}, \operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (10.13)$$

де ω й ε - кутова швидкість і кутове прискорення фігури;

μ - кут між вектором a_{MA} і відрізком MA .

У такий спосіб: прискорення будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається із прискорення якої-небудь іншої точки A , прийнятої за полюс, і прискорення яке одержує точка M при обертанні фігури навколо полюса A .

Однак обчислення a_M за допомогою паралелограма ускладнює розрахунок, тому що попередньо треба буде знаходити значення кута μ , потім кута між векторами a_{MA} й a_A .

Тому зручніше вектор a_{MA} замінити геометричною сумою:

$$a_{MA} = a_{MA}^n + a_{MA}^\tau$$

і представити рівність (10.12) у вигляді:

$$a_M = a_A + a_{MA}^n + a_{MA}^\tau \quad (10.14)$$

При цьому вектор $a_{MA}^\tau \perp AM$, спрямований убік обертання, якщо рух прискорене й проти обертання, якщо рух уповільнене. Вектор a_{MA}^n спрямований до полюса обертання, тобто до точки A .

Численно:

$$a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot AM; \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot MA \quad (10.15)$$

Якщо полюс A рухається не прямолінійно, то його прискорення дорівнює:

$$a_A = a_A^n + a_A^\tau$$

$$\text{тоді:} \quad a_M = a_A^n + a_A^\tau + a_{MA}^n + a_{MA}^\tau \quad (10.16)$$

І якщо сама точка M рухається криволінійно і її траєкторія відома, те тоді:

$$a_M = a_M^n + a_M^\tau$$

або

$$a_M^n + a_M^\tau = a_A^n + a_A^\tau + a_{MA}^n + a_{MA}^\tau \quad (10.17)$$

10.10. Технічні приклади

10.10.1. Кінематика кривошипно-повзунного механізму

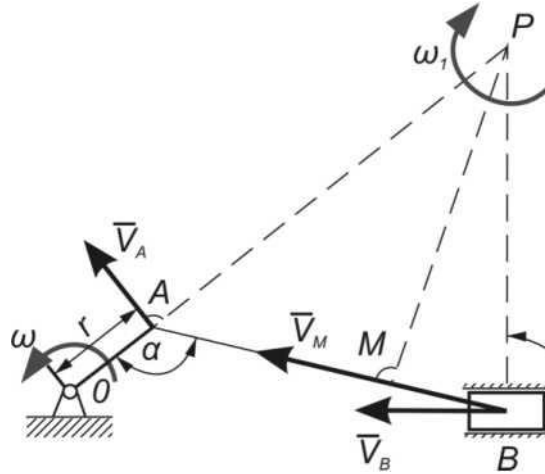


Рисунок 10.16 – Кінематична схема кривошипно-повзунного механізму

Визначити точку M шатуна AB кривошипно-повзунного механізму, швидкість якої спрямована вздовж шатуна, а також знайти величину цієї швидкості (рис. 10.16). Довжина кривошипа $A=r$, кутова швидкість його ω , кут між кривошипом і шатуном дорівнює α .

Рішення.

Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух. Знайдемо положення миттєвого центру швидкостей P шатуна, що знаходиться на перетині перпендикулярів, відновлених з точок A та B до напрямів їх швидкостей. Опускаючи з точки P перпендикуляр на напрям шатуна AB , отримаємо ту точку M , швидкість якої спрямована вздовж шатуна.

Так як при плоскопаралельному русі швидкості точок тіла пропорційні їх відстаням від миттєвого центру швидкостей, то

$$\frac{V_M}{V_A} = \frac{PM}{PA},$$

$$\text{звідки:} \quad V_M = V_A \frac{PM}{PA}. \quad (1)$$

Визначивши $V_A = r\omega$ та враховуючи, що

$$\frac{PM}{PA} = \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha,$$

знаходимо значення швидкості т. M шатуна:

$$V_M = r\omega \sin \alpha. \quad (2)$$

10.10.2. Ріжучий апарат сінокосарки

Кривошип OA механізму ріжучого апарату сінокосарки обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 30 \text{ c}^{-1}$ и за

допомогою шатуна AB надає руху ніж, з'єднаний з повзуном B , що рухається вздовж горизонтальних напрямних (рис. 10.17).

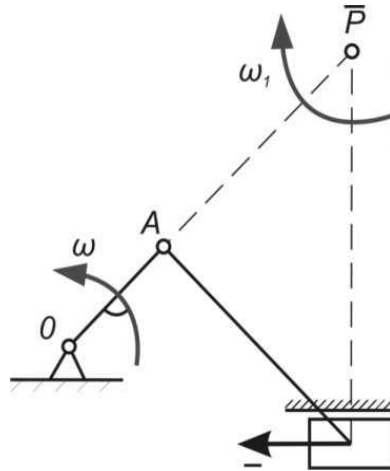


Рисунок 10.17 – Кінематична схема ріжучого апарату сінокосарки

Знайти кутову швидкість ω_1 та кутове прискорення ε_1 , шатуна, а також прискорення $\vec{a}_B$ повзуна B положенні, коли кривошип і шатун взаємно перпендикулярні і утворюють з горизонтальної прямої кути 45° . Довжина кривошипу $OA=5\text{см}$, довжина шатуна $AB=50\text{см}$.

Рішення.

Прийнявши точку A за полюс, оскільки швидкість та прискорення її легко знайти з умови завдання, запишемо вираз для прискорення повзуна B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1)$$

Прискорення точки A знайдемо за формулою:

$$\vec{a}_B = a_A^n = OA \cdot \omega^2 = 5 \cdot 30^2 = 4500 \text{ см/с}^2$$

Для визначення кутової швидкості ω_1 шатуна знайдемо його миттєвий центр швидкостей P (рис.10.17)

Тоді $V_A = OA\omega = PA\omega_1$, звідки:

$$\omega_1 = \omega \frac{OA}{PA}. \quad (2)$$

Бо за умовою $PA=AB$, то:

$$\omega_1 = \omega \frac{OA}{AB} = 30 \frac{5}{50} = 3 \text{ с}^{-1}. \quad (3)$$

Для знаходження α_B та ε_1 застосуємо метод проєкцій. Зобразимо картину векторів прискорень і направимо осі x і y так, як показано на рисинку 10.18.

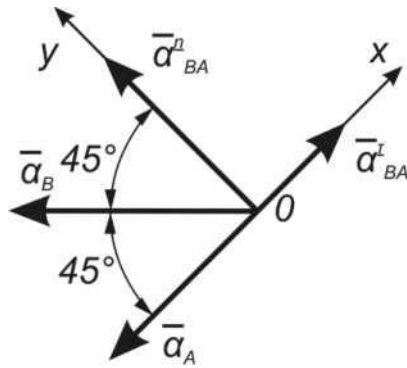


Рисунок 10.18 – Кінематичні характеристики ріжучого апарату сінокосарки

Спроектувавши векторне рівняння (1) на вісь у, отримаємо:

$$\alpha_B \cdot \cos 45^\circ = \alpha_{BA}^n. \quad (4)$$

Тут: $\alpha_{BA}^n = AB \cdot \omega_1^2 = 50 \cdot 3^2 = 450 \text{ cm/c}^2$

Тоді: $\alpha_B = \frac{\alpha_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = 450\sqrt{2} \text{ cm/c}^2.$

Кутове прискорення ε_1 шатуна можна знайти, спроектувавши рівняння (10.2) на вісь x:

$$-\alpha_B \cos 45^\circ = \alpha_{BA}^t - \alpha_A. \quad (5)$$

Звідки $\alpha_{BA}^t = AB \varepsilon_1 = \alpha_A - \alpha_B \cos 45^\circ.$

Таким чином:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_A - \alpha_B \cos 45^\circ}{AB} = \frac{4500 - 450}{50} = 81 \text{ c}^{-2}.$$

Контрольні питання

10.1. Який рух називається плоскопаралельним? Приведіть приклади плоскопаралельного руху.

10.2. Рух якої частини тіла необхідно знати для вивчення руху всього тіла при плоскопаралельному русі?

10.3. Які залежності необхідно знати для завдання плоскопаралельного руху у векторній і координатній формах?

10.4. На які найпростіші рухи можна розкласти плоскопаралельний?

10.5. Як можна визначити положення тіла при плоскопаралельному русі?

10.6. Яких основних кінематичних характеристик плоскопаралельного руху?

10.7. Якими кінематичними характеристиками визначається поступальні рухи полюса при плоскопаралельному русі?

10.8. Якими кінематичними характеристиками визначається

обертовий рух полюса при плоскопаралельному русі?

10.9. Як визначається швидкість точки при плоскопаралельному русі тіла?

10.10. Як визначається прискорення точки при плоскопаралельному русі тіла?

10.11. Що характеризують нормальне й тангенціальне прискорення полюса?

10.12. Як визначається швидкість довільної точки тіла, якщо відомі швидкість полюса й кутова швидкість тіла відносно цього полюса?

10.13. Як спрямована швидкість довільної точки тіла при обертовому русі відносно полюса?

10.14. Як зв'язані проєкції швидкостей двох точок тіла на пряму їх з'єднуючу?

10.15. Яка точка називається миттєвим центром швидкостей?

10.16. Як тіло рухається відносно миттєвого центра швидкостей?

10.17. Як визначається положення миттєвого центра швидкостей?

10.18. Як зв'язана лінійна швидкість будь-якої точки тіла з відстанню до миттєвого центра швидкостей?

10.19. Як зв'язана кутова швидкість плоскої фігури з положенням миттєвого центра швидкостей?

10.20. Де лежить миттєвий центр швидкостей, якщо швидкості двох точок тіла паралельні, різні по модулі, спрямовані в одну сторону?

10.21. Де лежить миттєвий центр швидкостей, якщо швидкості двох точок тіла паралельні й спрямовані в різні сторони?

10.22. Де лежить миттєвий центр швидкостей, якщо швидкості двох точок тіла паралельні, рівні по модулі й спрямовані в одну сторону?

10.23. Де лежить миттєвий центр швидкостей, якщо тіло котиться по поверхні іншого без ковзання?

10.24. Як визначається прискорення будь-якої точки плоскої фігури при плоскопаралельному русі?

10.25. Як спрямований вектор нормального прискорення будь-якої точки відносно полюса при рівносповільненому русі?

ТЕМА 11: СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

ПЛАН

- 11.1. Переносний і відносний рух точки. Абсолютний рух.
- 11.2. Теорема про додавання швидкостей.
- 11.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Кориоліса).
- 11.4. Технічні приклади.

11.1 Переносний і відносний рух точки. Абсолютний рух.

Раніше вивчені рухи розглядалися стосовно однієї системи відліку. Однак у ряді випадків часто виникає необхідність розглядати рух точки одночасно до двох систем відліку, одна з яких вважається основний або умовно нерухливою, а інша певним чином рухається стосовно першого. Рух, чинений при цьому точкою (або тілом) називають **складним**.

Наприклад: рух кулі, що котиться по палубі корабля, що рухається, можна вважати стосовно берега складним рухом, що складається з руху по палубі (рухлива система відліку) і руху разом з палубою корабель стосовно берега (нерухлива система відліку); плин часток води в ріках; рух поїздів; поле снаряда; рух активних ґрунтообробних знарядь; рух мотовила комбайна.

Таким образом, складний рух кулі відносно берега – **абсолютне**, розділяється на два більше простих і більш легко обумовлених: рухи кулі по палубі, його будемо називати **відносним** і рух корабля стосовно берега – **переносним** рухом. Можливість розкласти складний рух точки (або тіла) на більше прості шляхом введення додаткової рухливої системи відліку широко використовується в механіку для визначення кінематичних характеристик руху тіл.

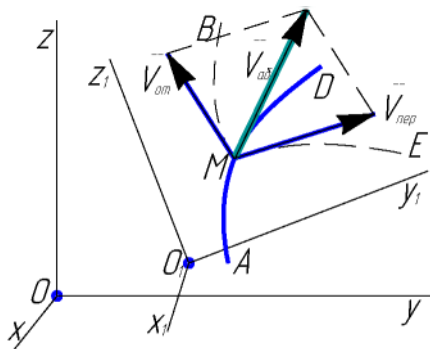


Рисунок 11.1 – Складний рух точки

Розглянемо складний рух точки M : переміщення стосовно рухливої системи відліку $Ox_1 y_1 z_1$, що у свою чергу, рухається відносно нерухливої системи відліку $Oxyz$.

1. Рух, чинений точкою стосовно рухливих осей $Ox_1 y_1 z_1$, по траєкторії MB називається **відносним рухом**, траєкторія MB – називається **відносною траєкторією**, а швидкість точки стосовно осей $Ox_1 y_1 z_1$ називається **відносною швидкістю** $V_{від}$, прискорення – **відносним прискоренням** $a_{від}$.

2. Рух системи відліку $Ox_1 y_1 z_1$ й всіма незмінно пов'язаними з нею точками простору уздовж траєкторії ME стосовно нерухливих осей $Oxyz$, є **переносним рухом**. Швидкість точки в системі $Ox_1 y_1 z_1$, з якої в цей момент часу збігається точка M , що рухається, називають **переносною швидкістю точки M** $V_{пер}$ – а прискорення – **переносним прискоренням** $a_{пер}$.

3. Рух, чинений точкою M стосовно нерухливої системи відліку $Oxyz$, називається **абсолютним або складним рухом**, траєкторія AD цього руху називається **абсолютною траєкторією**, швидкість – **абсолютною швидкістю** $V_{абс}$ й прискорення – **абсолютним прискоренням** $a_{абс}$.

У наведеному вище прикладі рух кулі відносно палуби корабля буде відносним, швидкість – відносною швидкістю кулі. Рух точки палуби корабля, з якої в цей момент часу стикається куля, стосовно берега буде для кулі переносним рухом, швидкість – переносною швидкістю. Рух кулі стосовно берега буде його абсолютним рухом, а швидкість – абсолютною швидкістю.

11.2. Теорема про додавання швидкостей.

Розглянемо складний рух точки M . Нехай точка M робить за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ відносне переміщення OM .

Сама крива OM , рухаючись із рухливими осями $Ox_1 y_1 z_1$, перейде в нове положення. Одночасно та точка кривої OM , з якої в момент часу t збігається точка O , зробить переносне переміщення. Сам переносний рух також є складним: являє собою сукупність поступального руху рухливої системи відліку разом із точкою O_1 й сферичним рухом навколо цього полюса – поворот системи координат $Ox_1 y_1 z_1$ відносно початку O_1 .

В усі час руху положення точки M визначається: у переносному

русі – радіусом-вектором $\bar{r}$, у відносному – $\bar{r}_1$. З малюнка очевидно:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1$$

тоді:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt}, V_{аб} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}_1}{dt},$$

тут $\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{V}_0$ – швидкість переносного поступального руху.

Радіус-вектор $\bar{r}_1$ виразимо залежністю, тоді:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1, \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (x_1 \cdot \bar{i}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1) = \\ &= \left(\frac{dx_1}{dt} \cdot \bar{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \cdot \bar{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \cdot \bar{k}_1 \right) + \left(x_1 \cdot \frac{d\bar{i}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\bar{k}_1}{dt} \right). \end{aligned}$$

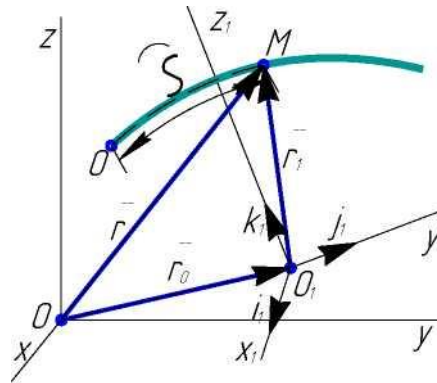


Рисунок 11.2 – Абсолютний рух точки

Тричлен $\frac{dx_1}{dt} \cdot \bar{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} \cdot \bar{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} \cdot \bar{k}_1 = V_{від}$ – вектори відносної швидкості.

Одиничні вектори рухливих осей, $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ змінюються тільки по напрямку. Тоді, розглядаючи орти як радіуси-вектори, лінійна швидкість їхніх кінців в обертovому русі дорівнює: $\bar{V}_{i(j,k)} = \frac{d\bar{i}(j,k)}{dt}$. Але кожний орт обертається навколо полюса O_1 , тоді швидкість його кінця визначиться як: $\bar{V}_{i(j,k)} = \bar{\omega} \cdot \bar{i}(j, \bar{k})$. Тому похідні ортів можна виразити наступним образом:

$$\frac{d\bar{i}_1}{dt} = \bar{\omega} \cdot \bar{i}_1, \frac{d\bar{j}_1}{dt} = \bar{\omega} \cdot \bar{j}_1, \frac{d\bar{k}_1}{dt} = \bar{\omega} \cdot \bar{k}_1$$

і будемо їх розглядати як лінійні швидкості кінців радіусів-векторів $\bar{i}_1$,

$\bar{j}_1, \bar{k}_1$ в обертовому русі навколо полюса O_I :

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \frac{d\bar{l}_1}{dt} + y_1 \cdot \frac{d\bar{j}_1}{dt} + z_1 \cdot \frac{d\bar{k}_1}{dt} &= x_1 \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{l}_1) + y_1 \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{j}_1) + z_1 \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{k}_1) \\ &= \bar{\omega} \cdot (x_1 \cdot \bar{l}_1 + y_1 \cdot \bar{j}_1 + z_1 \cdot \bar{k}_1) = \bar{\omega} \cdot \bar{r}_1. \end{aligned}$$

Векторний добуток $\bar{\omega} \cdot \bar{r}_1$ являє собою обертальну швидкість тої точки рухливого середовища $Ox_1 y_1 z_1$, у якій у цей момент часу перебуває точка M , тобто:

$$\bar{\omega} \cdot \bar{r}_1 = \bar{V}_1.$$

У такий спосіб: $\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{\omega} \cdot \bar{r}_1$ або $\frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_1$

Отже: $\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_0 + \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_1 = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_{\text{пер}}$.

де $\bar{V}_0$ – поступальна швидкість переносного руху;

Де $\bar{V}_1 = \bar{\omega} \cdot \bar{r}_1$ – обертальна швидкість переносного руху;

$\bar{V}_{\text{від}}$ – швидкість відносного руху;

$$\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_{\text{пер}}.$$

Теорема додавання швидкостей: абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі її переносної й відносної швидкостей.

11.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса).

Для визначення абсолютного прискорення туги у випадку непоступального переносного руху скористаємося вираженням абсолютної швидкості точки:

$$\bar{V}_{\text{аб}} = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_{\text{пер}} = \bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{r}_1. \quad (11.1)$$

Абсолютне прискорення $\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{d\bar{V}_{\text{аб}}}{dt}$, тоді диференціюємо рівність (11.1):

$$\frac{d\bar{V}_{\text{аб}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{V}_{\text{від}} + \bar{V}_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{r}_1) = \frac{d\bar{V}_{\text{від}}}{dt} + \frac{d\bar{V}_0}{dt} + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{r}_1 \right) + \left(\bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{r}_1}{dt} \right) \quad (11.2)$$

Похідна визначає зміну кожного з векторів швидкостей при абсолютному русі. Ці зміни складаються в загальному випадку зі змін при відносному й переносному русі.

Розглянемо кожний доданок окремо:

$$1. \quad \frac{d\bar{V}_{\text{від}}}{dt} \cdot \bar{V}_{\text{від}} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}, \text{ тоді:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}) = \\ = (\ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}) + \left(\dot{x} \cdot \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \dot{y} \cdot \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \dot{z} \cdot \frac{d\bar{k}_1}{dt} \right), \end{aligned}$$

з огляду на що:

$$\begin{aligned} (\ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}) &= a_{\text{від } x} \cdot \bar{i} + a_{\text{від } y} \cdot \bar{j} + a_{\text{від } z} \cdot \bar{k} = \bar{a}_{\text{від } x}, \\ \left(\dot{x} \cdot \frac{d\bar{i}_1}{dt} + \dot{y} \cdot \frac{d\bar{j}_1}{dt} + \dot{z} \cdot \frac{d\bar{k}_1}{dt} \right) &= V_{\text{від } x} \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{i} + V_{\text{від } y} \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{j} + V_{\text{від } z} \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{k} = \\ &= \bar{V}_{\text{від}} \cdot \bar{\omega}, \end{aligned}$$

одержимо: $\frac{d\bar{V}_{\text{від}}}{dt} = \bar{a}_{om} + \bar{\omega} \cdot \bar{V}_{\text{від}}$ – геометрична сума відносного прискорення, що характеризує зміну відносної швидкості при відносному русі, і коріолісова прискорення $\bar{a}_{кор}$, що характеризує зміна відносної швидкості при переносному русі;

2 - $\frac{d\bar{V}_0}{dt} = \bar{a}_0$ – вектор прискорення в переносному поступальному русі, що характеризує зміна поступальної швидкості в переносному русі;

3 - $\frac{d\bar{\omega}}{dt} \cdot \bar{r}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{r}_1 = \bar{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ – дотичне прискорення в переносному обертовому русі, що характеризує зміна модуля швидкості при обертанні навколо центра нерухливої системи координат у переносному русі;

4 - $\bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{\omega} \cdot (\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_{\text{від}}) = \bar{\omega} \cdot \bar{V}_1 + \bar{\omega} \cdot \bar{V}_{\text{від}} = \bar{a}_{\text{пер}}^n + \bar{\omega} \cdot \bar{V}_{\text{від}}$ – геометрична сума нормального прискорення в переносному русі, що характеризує зміну напрямку швидкості при обертанні навколо центра нерухливої системи координат у переносному русі, і $1/2$ коріолісова прискорення $\bar{a}_{кор}$, що характеризує зміна переносної швидкості при відносному русі.

Тоді рівність прийме вид:

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{\text{від}} + \bar{a}_0 + \bar{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{пер}}^n + 2 \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{V}_{\text{від}}).$$

Тут $\bar{a}_0 + \bar{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{пер}}^n = \bar{a}_{\text{пер}}$ – переносне прискорення;

$$2 \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{V}_{\text{від}}) = \bar{a}_{кор} \text{ – коріолісова прискорення.}$$

Величина $\bar{a}_{\text{кор}}$ характеризує зміну переносної швидкості при відносному русі й зміна відносної швидкості при переносному русі, називається поворотним або коріолісовим прискоренням точки.

У результаті рівність прийме вид

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{від}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}} \quad (11.3)$$

Формула виражає *теорему Коріоліса: абсолютне прискорення точки Дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, що характеризує зміна відносної швидкості точки у відносному русі. переносного, що характеризує зміна переносної швидкості точки в переносному русі й коріолісова, що характеризує зміну відносної швидкості в переносному русі й переносній швидкості в абсолютному русі.*

По величині коріолісово прискорення визначається по формулі:

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot |\omega| \cdot |\bar{V}_{\text{від}}| \cdot \cos(\bar{\omega} \wedge \bar{V}_{\text{від}}). \quad (11.4)$$

Спрямовано вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ так само як і вектор $\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{від}}$, тобто перпендикулярно площини, що проходить через вектори $\bar{\omega}$ й $\bar{V}_{\text{від}}$ у ту сторону, звідки найкоротше сполучення $\bar{\omega}$ з $\bar{V}_{\text{від}}$ видно, що відбувається проти ходу годинної стрілки.

Інакше: напрямок вектору $\bar{a}_{\text{кор}}$ можна визначити, спроектувавши вектор $\bar{V}_{\text{від}}$ на площину, перпендикулярну $\bar{\omega}$ й повернути цю проекцію на 90° убік переносного обертання.

11.4. Технічні приклади.

Для знаходження $a_{\text{кор}}$ розглянемо формулу:

$$a_{\text{кор}}(dV_{\text{пер}})_{1/dt} + (dV_{\text{від}})_{2/dt}$$

Розглядаючи загальний випадок, будемо вважати складний рух, тобто переміщення рухливих осей $Oxyz$ а з ними й кривій AB , що складається з поступального переміщення разом з деяким полюсом і обертання навколо цього полюса з кутовою швидкістю, що називається переносною кутовою швидкістю. Величина від вибору полюса не залежить.

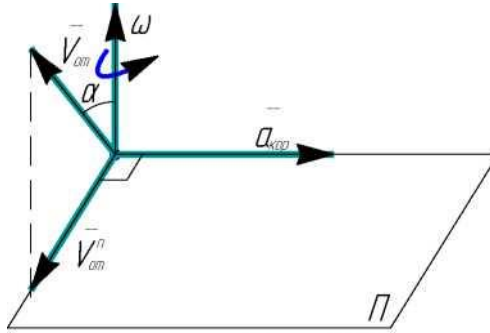


Рисунок 11.3 – Напрямок векторів швидкості та прискорення для знаходження коріолісова прискорення

Почнемо з визначення $(dV_{\text{від}})_2/dt$. При розглянутому переносному руху вектор $V_{\text{від}}$ спрямований по дотичній до кривій AB , переміститься разом із цій кривій поступально, тобто прийде в положення m_1b і одночасно повернеться навколо точки m_1 до положення m_1b_1 . У результаті вектор $V_{\text{від}}$ одержить у переносному руху збільшення

$$(dV_{\text{від}})_2 = bb_1 = V_b dt, \quad (11.5)$$

де V_b - швидкість, з якої переміщається точка b при повороті вектору $m_1b = V_{\text{від}}$ навколо точки m_1 .

Тому що цей поворот відбувається з кутовою швидкістю ω , то

$$V_b = \omega m_1b = \omega V_{\text{від}},$$

У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} (dV_{\text{від}})_2 &= V_b dt = \omega V_{\text{від}} dt, \\ (dV_{\text{від}})_2/dt &= \omega V_{\text{від}} \end{aligned} \quad (11.6)$$

Тепер визначимо $(V_{\text{пер}})_1/dt$.

Швидкість $V_{\text{пер}}$ дорівнює швидкості тої незмінно пов'язаної з рухливими осями $Oxyz$ точки кривій AB , з якої в цей момент часу збігається точка M . Якщо точку M прийняти за полюс і позначити через r радіус-вектор $om = OM$ те по формулі $V_M = V_A + V_{MA}$, маємо

$$V_{\text{пер}} = V_0 + \omega r,$$

де V_0 – швидкість полюса;

$\omega r = V_{MO}$ – швидкість точки M відносно полюса O .

Зробивши за проміжок часу dt відносне переміщення $MM_1 = V_{\text{від}} dt$, точка прийде в положення M , для якої $r' = r + MM_1$

$$V'_{\text{пер}} = V_0 + \omega r' = V_0 + \omega(r + MM_1)$$

Отже, тому що точка робить відносне переміщення $MM_1 = V_{\text{від}} dt$

dt, вектор $V_{\text{пер}}$ одержує збільшення

$$(dV_{\text{пер}})_1 = V'_{\text{пер}} - V_{\text{пер}} = \omega MM_1 = \omega V_{\text{від}} dt$$

звідки

$$(dV_{\text{пер}})_1/dt = \omega V_{\text{від}} \quad (11.7)$$

Підставляючи величини (11.6) і (11.7) у з (11.4) маємо:

$$a_{\text{кор}} = 2(\omega V_{\text{від}}) \quad (11.8)$$

Таким чином, коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості на відносну швидкість точки.

У випадку поступального переносного руху $\omega = 0$, $a_{\text{кор}} = 0$,

Тоді $a_{\text{аб}} = a_{\text{від}} + a_{\text{пер}}$

Модуль коріолісова прискорення визначається по формулі

$$a_{\text{кор}} = 2|\omega||V_{\text{від}}|\sin \alpha \quad (11.9)$$

де α - кут між векторами ω і $V_{\text{від}}$.

Спрямовано вектор $a_{\text{кор}}$ перпендикулярно площини, що проходить через вектор ω і $V_{\text{від}}$ у ту сторону, звідки найкоротше сполучення ω с $V_{\text{від}}$ видно проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення напрямку вектору $a_{\text{кор}}$ потрібно вектор $V_{\text{від}}$ спроектувати на площину перпендикулярну вектору ω , потім повернути отриману проекцію $(V_{\text{від}}^{\text{П}})$ на 90° убік переносного обертання.

Якщо відносна траєкторія - плоска крива й переміщається увесь час у своїй площині, то $\alpha = 90^\circ$ і $a_{\text{кор}} = 2|\omega||V_{\text{від}}|$

У цьому випадку напрямок $a_{\text{кор}}$ можна знайти, повернувши вектор на 90° убік переносного обертання.

Коріолісово прискорення дорівнює нулю в наступних випадках.

- 1) Коли $V_{\text{пер}} = 0$, тобто коли переносний рух є поступальним або якщо переносна кутова швидкість у цей момент часу дорівнює 0.
- 2) Коли $V_{\text{від}} = 0$, тобто коли відносна швидкість у цей момент часу дорівнює нулю.
- 3) Коли $\alpha = 0^\circ$ або $\alpha = 180^\circ$, тобто коли відносний рух відбувається по напрямку, паралельному осі переносного обертання $V_{\text{від}} \parallel \omega$.

Визначення абсолютної швидкості сегмента ріжучого апарату прибиральної машини

Різання рослин в збиральних машинах відбувається завдяки

поворотного поступального руху ножа ріжучого апарату, що отримує привід через кривошипно-повзунний механізм від ходових коліс або валу відбору потужності трактора. На якість зрізу, а отже, на вибір кута α (рисунок 11.4) нахилу леза сегмента ножа впливає величина та напрямок його абсолютної швидкості.

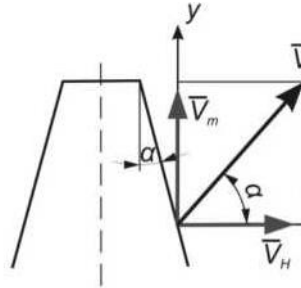


Рисунок 11.4 – Напрямок швидкості сегмента ріжучого апарату прибиральної машини

Сегмент бере участь у складному русі, який складається з відносного руху ножа відповідно до рівняння:

$$x = r(1 - \cos(\omega t)).$$

де r – радіус кривошипу кривошипно-повзунного механізму;

ω – кутова швидкість кривошипа и переносного руху разом з машиною, що визначається рівнянням:

$$y = V_M \cdot t$$

де V_M – швидкість машини.

Відносна швидкість сегмента, що дорівнює швидкості V_r ножа, визначається як похідна від переміщення сегмента за часом:

$$V_r = \dot{x} = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1)$$

а переносна як похідна від переміщення машини:

$$V_e = y \cdot = V_M, \quad (2)$$

Тоді абсолютна швидкість дорівнюватиме

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\text{Або} \quad V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{(r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 + V_M^2} \quad (3)$$

Напрямок абсолютної швидкості визначається кутом α , який вираз:

$$\cos \alpha = \frac{r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{\sqrt{(r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 + V_M^2}} \quad (4)$$

Контрольні питання

- 11.1 Який рух називається складним?
- 11.1. На які більше прості рухи розділяється складний рух?
- 11.2. Який рух називається відносним?
- 11.3. Який рух називається складним?
- 11.4. Як визначається положення точки при складному русі?
- 11.5. З яких складових складається абсолютна швидкість при складному русі?
- 11.6. Що характеризує відносна швидкість при складному русі?
- 11.7. Що характеризує переносна швидкість при складному русі?
- 11.8. З яких складових складається абсолютне прискорення?
- 11.9. Що характеризує відносне прискорення?
- 11.10. З яких складових складається переносне прискорення?
- 11.11. Що характеризує коріолісово прискорення?
- 11.12. Як визначається модуль коріолісова прискорення?
- 11.13. Як визначається напрямок вектору коріолісова прискорення?
- 11.14. Чи залежить коріолісово прискорення від траєкторії переносного руху?

ТЕМА 12: СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

ПЛАН

- 12.1. Постановка завдання.
- 12.2. Додавання поступальних рухів.
- 12.3. Додавання обертань.
- 12.4. Додавання обертального й поступального рухів.

12.1. Постановка завдання.

Окремі ланки механізмів і різних передач у сільськогосподарських машинах, тракторах і автомобілях часто роблять елементарні рухи (поступальні й обертальні) відносно рами (корпусу) машини. При переміщенні самої машини, що рухаються в ній частини одержують, додатковий рух разом із самою машиною - переносні рухи. Завдання про додавання таких рухів виникає тоді, коли необхідно знати рух частин машини відносно інших нерухоливих частин, тіл, наприклад, відносно поверхні землі.

Кінематичний стан твердого тіла в кожний даний момент часу характеризується лінійною швидкістю якої-небудь точки цього тіла (основної точки) і миттєвою кутовою швидкістю обертання тіла навколо осі, що проходить через цю точку.

Завданням цих двох величин для даного моменту часу цілком визначаються швидкості всіх точок тіла.

Дійсно, якщо рух тіла відносно рухливої системи координат (відносний рух) задано відносною швидкістю $V_{від}$ для всіх його точок у цей момент часу й переносний рух швидкістю $V_{пер}$ в той же момент часу для всіх його точок, то абсолютний рух у розглянутий момент часу буде характеризуватися миттєвими швидкостями його точок:

$$V_{аб} = V_{від} + V_{пер}$$

Завдання про визначення складного руху тіла, таким чином, зводиться до рішення питання про миттєвий розподіл швидкостей точок цього тіла.

Якщо результуючий рух тіла є обертанням біля миттєвої осі, то для одержання картини розподілу швидкостей у ньому досить визначити миттєву кутову швидкість α цього руху; для поступального – миттєву швидкість V довільної точки; а в більше складному випадку – обидві ці швидкості.

При додаванні рухів твердого тіла можуть зустрітися три випадки: додавання поступальних рухів, додавання обертань і додавання поступального й обертового рухів.

Додавання поступальних рухів.

Розглянемо випадок, коли відносний рух тіла є поступальним зі швидкістю V_1 , і переносний рух – також поступальне зі швидкістю V_2 (наприклад: ніж у ріжучому апараті комбайна або поршень двигуна при прямолінійному русі машини).

Тоді всі точки тіла мають у відносному поступальному русі швидкістю V_1 й у переносному поступальному русі швидкість V_2 . По теоремі про додавання швидкостей всі точки тіла в абсолютному русі мають ту саму швидкість $V = V_1 + V_2$, тобто абсолютний рух тіла також буде поступальним. Отже: при додаванні двох поступальних рухів зі швидкостями V_1 й V_2 результуючий рух тіла також буде поступальним зі швидкістю $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

12.2. Додавання обертань.

Додавання обертань тіла біля паралельних осей досить часто зустрічаються в техніці, наприклад, шестірні в планетарних механізмах.

Розглянемо випадок, коли відносний рух тіла – обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$ навколо осі aa' , а переносне – обертання кривошипа ba навколо осі bb' , паралельної aa' з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$. Тоді рух тіла буде плоскопаралельним стосовно площини перпендикулярній осям. Можливі три частки випадку.

12.3.1. Додавання обертань навколо двох паралельних осей, коли обертання спрямовані в одну сторону.

Тут:

$$V_A = \omega_2 \cdot AB$$

$$V_B = \omega_1 \cdot AB$$

Точка C є миттєвим центром швидкостей. Визначимо кутову швидкість ω абсолютного обертання тіла навколо осі cc' :

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} \text{ тоді із властивості пропорції: } \omega = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

Підставляючи в цю рівність $V_A = \omega_2 \cdot AB$ і $V_B = \omega_1 \cdot AB$ одержимо

$$\omega = \frac{\omega_2 \cdot AB + \omega_1 \cdot AB}{AB}$$

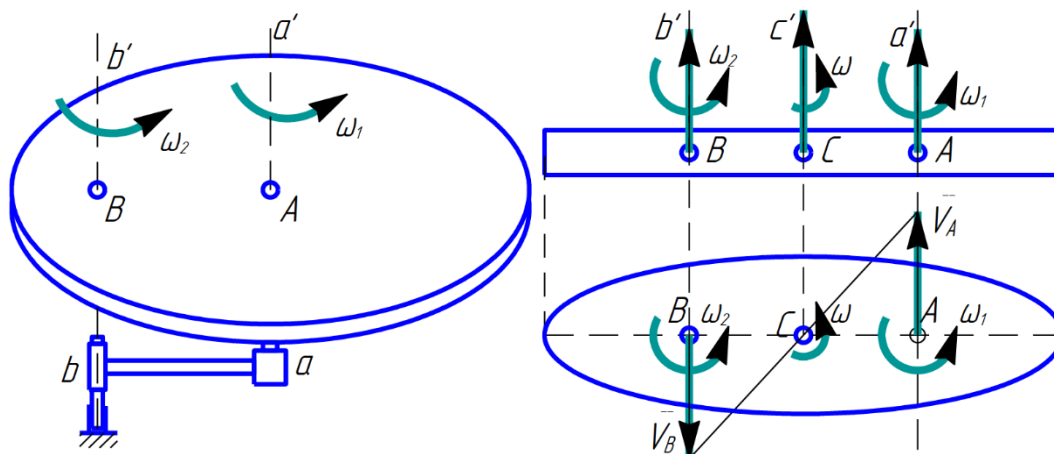


Рисунок 12.1 – Додавання обертань навколо двох паралельних осей, коли обертання спрямовані в одну сторону

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \text{ або } \frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{AB} = \frac{\omega_2}{AB}.$$

У такий спосіб: якщо тіло бере участь одночасно у двох спрямовані в одну сторону обертання навколо паралельних осей, то його результуючий рух буде миттєвим обертанням з абсолютною кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 + \omega_2$ навколо миттєвої осі, паралельним даним. Із часом миттєва вісь обертання міняє своє положення, описуючи циліндричну поверхню.

12.3.2. Додавання обертань навколо двох паралельних осей, коли обертання спрямовані в різні сторони.

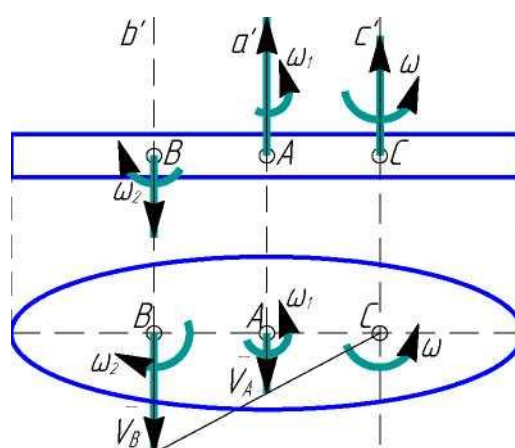


Рисунок 12.2 – Додавання обертань навколо двох паралельних осей, коли обертання спрямовані в різні сторони

Допустимо, що $\omega_1 > \omega_2$.

Тут: $V_A = \omega_2 \cdot AB$ $V_B = \omega_1 \cdot AB$.

Тоді МЦС – точка С:

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} \text{ або } \omega = \frac{V_B - V_A}{AB}$$

Підставляючи значення V_A й V_B одержимо:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \text{ або } \frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{AB} = \frac{\omega_2}{AB}$$

У такий спосіб: якщо обертання спрямовані в протилежні сторони й $\omega_1 > \omega_2$, наприклад, шестірні в планетарному механізмі при внутрішнім зачепленні, то результуючий рух є миттєвим обертанням з абсолютною кутовою швидкістю $\omega = \omega_1 - \omega_2$.

12.3.3. Пари обертань.

Розглянемо окремий випадок, коли обертання навколо паралельних осей спрямовані в різні сторони, але по модулі $\omega_1 = \omega_2$. Така сукупність обертань називається парою обертань, а вектори ω_1 й ω_2 утворюють пари кутових швидкостей.

Прикладом такого руху є рух велосипедної педалі відносно рами велосипеда. Відносним рухом є обертання педалі навколо осі А, укріпленої на кривошипі ВА. Переносним рухом є обертання кривошипа ВА навколо осі В. Кутові швидкості ω_1 й ω_2 ці обертання спрямовані в різні сторони, а по модулі рівні один одному, тому що в будь-який момент часу, кут повороту φ_1 педалі відносно кривошипа ВА дорівнює куту повороту φ_2 кривошипа. Швидкість поступального руху педалі $V_A = \omega_2 \cdot AB$ й $V_B = \omega_1 \cdot AB$ значить $|\omega_1| = |\omega_2|$ і $V_A = V_B$.

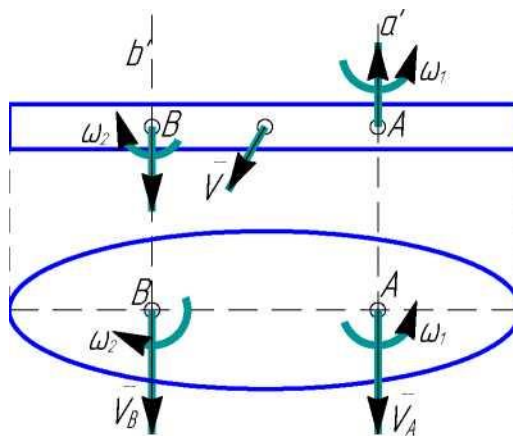


Рисунок 12.3 – Обертання навколо паралельних осей спрямовані

в різні сторони, але рівні по модулі

МЦС перебуває в нескінченності й всі точки тіла в цей момент часу мають однакові швидкості $V = \omega \cdot AB$.

Отже, що результативний рух буде поступальним зі швидкістю $V = \omega \cdot AB$ й спрямованої перпендикулярно площини, що проходить через вектори ω_1 й ω_2 .

У такий спосіб: пари обертань еквівалентна поступальному руху зі швидкістю $\bar{V}$, рівної моменту пари кутових швидкостей цих обертань.

Отримані в цьому розділі результати можуть бути використані для кінематичного розрахунку зубчастих передач.

12.3.4. Додавання обертань навколо непаралельних осей.

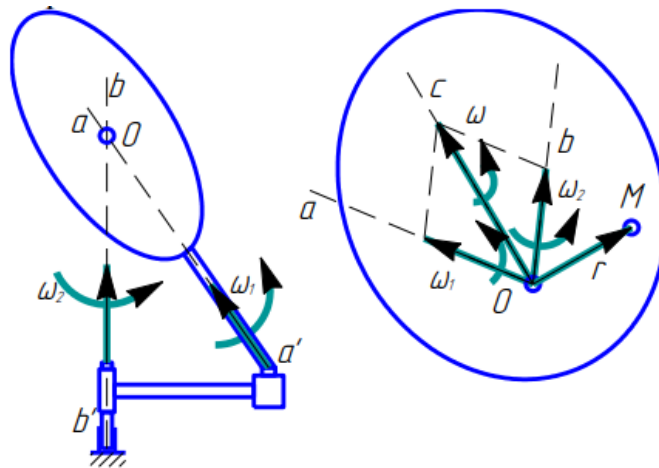


Рисунок 12.4 – Додавання обертань навколо непаралельних осей

Нехай для даного моменту часу відносний рух тіла являє собою обертання з кутовою швидкістю ω_1 біля осі aa' , укріпленої на кривошипі, а переносне – обертання кривошипа біля нерухливої осі bb' з кутовою швидкістю ω_2 , що перетинається з віссю aa' в точці O .

Цей випадок руху тіла досить розповсюджений у технічній практиці (рух гіроскопа, рух автомобільних коліс на поворотах, передачі обертання між пересічними осями за допомогою універсального шарніра, диференціальні передачі).

Результуючим рухом тіла в цьому випадку буде обертовий рух навколо миттєвої осі:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Миттєва вісь Oc спрямована уздовж вектору $\bar{\omega}$, тобто по діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$. Із часом вісь Oc міняє своє положення, описуючи конічну поверхню, вершина якої перебуває в точці O .

12.4. Додавання обертального й поступального рухів.

Розглянемо складний рух твердого тіла, що складає з поступального й обертового рухів. Тут також можливі три частки випадку.

12.4.1. Швидкість поступального руху перпендикулярна осі обертання ($\bar{V} \perp \bar{\omega}$).

Складний рух складається з обертового руху навколо осі Aa з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ й поступальним рухом зі швидкістю $\bar{V} \perp \bar{\omega}$.

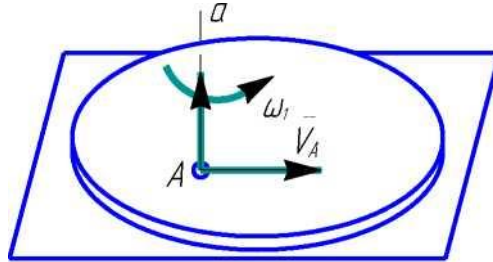


Рисунок 12.5 – Швидкість поступального руху перпендикулярна осі обертання

Додавання обертового руху тіла з поступальним у випадку, коли $\bar{V} \perp \bar{\omega}$, очевидно являє собою плоско-паралельний рух тіла.

Таким, наприклад, буде рух мотовила комбайна, рух колеса по прямолінійному шляху й так далі.

12.4.2. Швидкість поступального руху паралельна осі обертання ($\bar{V} \parallel \bar{\omega}$). Гвинтовий рух.

Якщо тверде тіло обертається навколо деякої осі Aa з кутовою швидкістю ω (відносний рух) і в той же час переміщається уздовж цієї осі поступально зі швидкістю V (переносний рух), то результуючий рух тіла буде гвинтовим, а траєкторіями точок будуть гвинтові лінії.

h - крок гвинта - відстань, прохідна за час одного оберту будь-якою точкою, що лежить на осі гвинта.

Якщо $\bar{\omega}$ й $\bar{V}$ – постійні, то крок $h = \frac{2 \cdot \pi \cdot V}{\omega}$ постійний.

Відношення $\rho = \frac{V}{\omega}$ гвинтового руху. Параметр ρ величина постійна, як це має місце, наприклад, при русі гвинта в нерухливій гайці. Тоді при повороті тіла на кут $\varphi = 2 \cdot \pi$ всі його точки перемістяться уздовж осі обертання на величину h :

$$h = 2 \cdot \pi \cdot \rho.$$

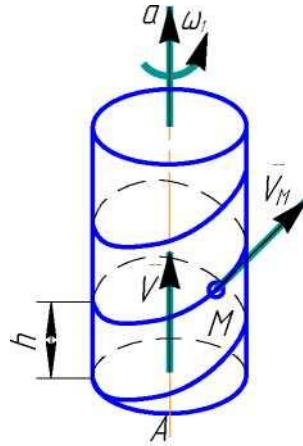


Рисунок 12.6 – Гвинтовий рух

Швидкість V_M точки M , що перебуває від осі гвинта на відстані r , складається з поступальної швидкості V й перпендикулярної їй швидкості, одержуваної в обертовому русі, що чисельно дорівнює ωr , тоді:

$$V_M = \sqrt{V^2 + (\omega \cdot r)^2}.$$

12.4.3. Швидкість поступального руху утворить довільний кут з віссю обертання.

Це буде випадок руху вільного твердого тіла.

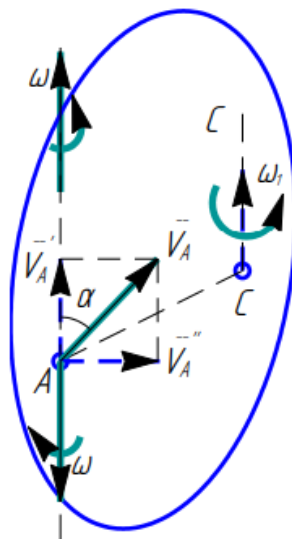


Рисунок 12.7 – Швидкість поступального руху утворить довільний кут з віссю обертання

Розкладемо вектор V_A на складові: V'_M , спрямовану уздовж $\bar{\omega}$, і V''_A , перпендикулярну $\bar{\omega}$.

При цьому: $V'_A = V_A \cdot \cos \alpha$ і $V''_A = V_A \cdot \sin \alpha$. Швидкість V''_A можна замінити парою кутових швидкостей $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ і $\bar{\omega}'' = \bar{\omega}$, після чого вектори $\bar{\omega}''$ й $\bar{\omega}$ можна відкинути тому що $V''_A = \omega \cdot AC$, звідки:

$$AC = \frac{V''_A}{\omega} = \frac{V_A \cdot \sin \alpha}{\omega}.$$

Тоді в тіла залишається обертання з кутовою швидкістю $\bar{\omega}'$ навколо миттєвої гвинтової осі CC й поступальний рух зі швидкістю V'_A .

Отже: розподіл швидкостей точок тіла в цей момент часу буде таким же, як при гвинтовому русі навколо осі CC з кутовою швидкістю $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ й поступальною швидкістю $V'_A = V_A \cdot \cos \alpha$.

У такий спосіб: при додаванні поступального й обертального рухів, у випадку, коли швидкість утворить довільний кут з віссю обертання, виходить сукупність миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$ й поступальній швидкості $V'_A \neq V_A$ й миттєвій осі обертання CC .

При цьому крок цього гвинтового руху дорівнює

$$h = \frac{V'_A}{\omega} = \frac{V_A \cdot \cos \alpha}{\omega}.$$

Рух тіла можна розглядати як складається із серії миттєвих гвинтових рухів навколо гвинтових осей, що безупинно змінюються.

12.4. Технічні приклади. Планетарний механізм.

В планетарному механізмі (рисунок 12.8) шестерня 1 радіусу r_1 нерухома, а водило OB обертається з кутовою швидкістю ω_0 . Знайти кутову швидкість шестірні 3 радіусу r_3 .

У цьому прикладі має місце додавання обертань навколо паралельних осей.

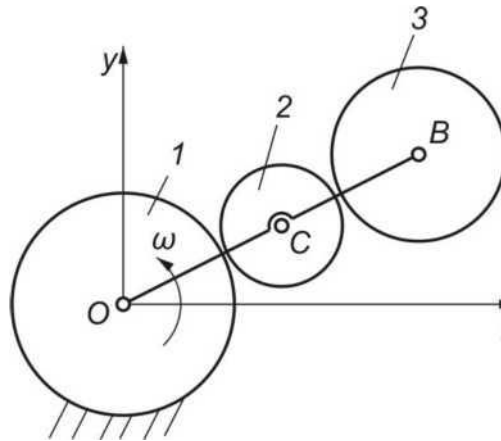


Рисунок 12.8 – Планетарний механізм

Такі завдання зручно вирішувати, застосовуючи метод Віллеса, коли додаткове обертання дається всьому механізму те щоб ланка механізму, яке викликає переносні обертання інших його ланок, зупинялося б у абсолютному русі. Тобто цей метод є модифікацією прийому чи методу зупинки.

Абсолютні швидкості шестерень щодо нерухомої системи координат Oxy , пов'язаної з корпусом механізму, позначаємо через ω_1 ($\omega_1 = 0$), ω_2 , ω_3 . Даємо всій площині xOy або корпусу механізму додаткове обертання з кутовою швидкістю $-\omega_0$ у бік протилежну обертання водила. В отриманому новому складному русі, згідно з формулою (21), маємо:

$$\omega'_1 = 0 - \omega_0 \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_0 \quad \omega'_3 = \omega_3 - \omega_0 \quad \omega'_0 = \omega_0 - \omega_0$$

Виявилось, що у новому русі водило нерухомо, а шестерні просто обертаються навколо нерухомих осей, що проходять через точки O , C , B , з кутовими швидкостями ω'_1 , ω'_2 , ω'_3 . Так як швидкості в точках торкання або зачеплення шестерень однакові, рисунок 12.8, шестерні 1 і 2 обертаються в різні боки, а шестерні 1 і 3 обертаються в один бік. За величиною швидкості точок дотику рівні: $V_{12} = \omega'_1 r_1 = \omega'_2 r_2$; $V_{23} = \omega'_2 r_2 = \omega'_3 r_3$; де V_{12} – швидкість точки дотику шестерень 1 і 2, а V_{23} – швидкість точки дотику шестерень 2 і 3. Отже, $\omega'_1 r_1 = \omega'_2 r_2 = \omega'_3 r_3$, звідки маємо

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = -\frac{r_2}{r_1} \quad \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = -\frac{r_3}{r_1} \quad \frac{\omega'_2}{\omega'_3} = -\frac{r_3}{r_2} \quad (1)$$

В останніх виразах знак «-»показує, що колеса обертаються у різні боки. Підставляючи в отримані пропорції значення ω'_1 , ω'_2 , ω'_3 , отримуємо такі формули Віллеса для нашого механізму:

$$\frac{-\omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_2} \quad \frac{-\omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = \frac{r_3}{r_2} \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_3}{r_2} \quad (2)$$

З другої формули Вілліса випливає, що $\omega_3 = (1 - r_1 / r_3) \omega_0$.

Контрольні питання

12.1. Яку швидкість необхідно знати для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що робить обертовий рух?

12.2. Яку швидкість необхідно знати для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що робить поступальний рух?

12.3. Який рух робить тіло, якщо переносний і відносний рухи поступальні?

12.4. Який рух робить тіло, якщо переносний і відносний рухи обертальні?

12.5. Як визначається миттєва абсолютна швидкість тіла, якщо його переносний і відносний рухи – обертальні, спрямовані в ту саму сторону?

12.6. Як визначається миттєва абсолютна швидкість тіла, якщо його переносний і відносний рухи – обертальні, спрямовані в різні сторони?

12.7. Що таке пари обертань?

12.8. Який рух робить тіло, якщо переносний і відносний рух утворюють пари обертань?

12.9. Як визначається лінійна швидкість точок тіла, якщо переносний і відносний рух утворюють пари обертань?

12.10. Який рух робить тіло, якщо швидкість його поступального руху перпендикулярна його осі обертання?

12.11. Яку траєкторію описує точка тіла, якщо швидкість його поступального руху паралельна осі обертання?

12.12. Що називається кроком гвинта?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. – Ч.1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін. / За ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Булгаков В.М. Інженерна механіка. (Частина 1. Теоретична механіка) / В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, Д.Г. Войтюк ; за заг. редакцією В.М. Булгакова. Підручник – Вінниця: Нова Книга, 2006. – 504 с.
5. Булгаков В.М. Теоретична механіка. Посібник для практичних занять / В.М. Булгаков, В.В. Бурлака, В.С. Лукач, Ю.М. Дроннік, С.І. Кучеренко, Д.І. Мазоренко, Л.М. Тіщенко; за заг. редакцією С.І. Кучеренка – Ніжин: “Мілані” ПП Лисенко М.М., 2009. – 639 с.
6. Пастушенко С. І. Практикум з теоретичної механіки / С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко. - Ч. 1. Статика, кінематика. - Вінниця, 2006. - С. 325-349.

Навчальне видання

Михайленко Олена Юріївна
Антонова Галина Володимирівна
Тетервак Ілля Романович

ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА (ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА)
СТАТИКА

Конспект лекцій

Надруковано з оригіналів макетів замовника
Підписано до друку формат 60х84 1/16
Папір офсетний. Наприклад 100 примірників
Замовлення №

Виготовлювач ПП Верескун В.М.
Видавничо – поліграфічний центр «Люкс»
м. Мелітополь, вул. М. Грушевського, 10 тел (0619)44-45-11
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
До державного реєстру видавців, виробників і розповсюджувачів
видавничої продукції від 11.06.2002 р. серія ДК № 1125

