

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
 ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
 ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ  
 СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ  
 МАШИН ТА АГРЕГАТІВ  
 Том I

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s. \end{aligned} \right\}$$

Мелітополь  
 2021

*Авторський колектив:*

О. М. Леженкін, О. О. Вершков,  
А. М. Аюбов, О. О. Дереза, І. О. Леженкін  
Л. Ю. Бондаренко

**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНІ  
ДОСЛІДЖЕННЯ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ  
МАШИН ТА АГРЕГАТІВ**

**ТОМ I**

*За загальною редакцією  
професора О.М. Леженкіна*

Мелітополь  
Видавничо-поліграфічний центр «Люкс»  
2021

УДК 631.3

МЗ4

*Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради  
Таврійського державного агротехнологічного університету  
імені Дмитра Моторного  
(протокол №8 від «24» травня 2021 р.)*

**Рецензенти:**

- В. М. Сало** – доктор технічних наук, професор, декан  
агротехнічного факультету ЦНТУ, м. Кропивницький
- Л. В. Аніскевич** – доктор технічних наук, професор,  
професор НУБіП України, м. Київ
- В. С. Єремєєв** – доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри інформатики і кібернетики МДПУ  
імені Богдана Хмельницького, м. Мелітополь

**Механіко-математичні дослідження сільськогосподарських машин та агрегатів:** Монографія / О. М. Леженкін, О. О. Вершков, А. М. Аюбов, О. О. Дереза, І. О. Леженкін, Л. Ю. Бондаренко; за заг. редакцією проф. О. М. Леженкіна; ТДАТУ. – Мелітополь: ВПЦ «Лух», 2021. – 335 с. DOI:10.31388/9786177975082

**ISBN 978-617-7975-08-2**

В монографії розглянуто аналіз сучасних технологій збирання зернових культур, загальну методику механіко-математичних досліджень сільськогосподарських машин та агрегатів, математичні моделі руху причіпного зернозбирального агрегату, стійкість руху даного агрегату, статистичний аналіз механіко-технологічних властивостей обчисаного вороху, аналітичне визначення параметрів та режимів роботи різального пристрою шнекового типу для зрізання обчисаних стебел, а також теоретичне дослідження стрічкових транспортерів.

Монографія розрахована на широке коло наукових працівників, спеціалістів сільськогосподарської галузі, аспірантів, магістрантів і студентів механіко-технологічних факультетів та сільськогосподарського машинобудування.

**ISBN 978-617-7975-08-2**

© Леженкін О. М., Вершков О. О., Аюбов А. М.,  
Дереза О. О., Леженкін І. О., Бондаренко Л. Ю.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
ЧАСТИНА I. МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ РУХУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН ТА АГРЕГАТИВ.....	10
РОЗДІЛ I. ВСТУП ДО ДИНАМІКИ. ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНИ ДИНАМІКИ .....	10
1.1.1. Основні поняття та визначення динаміки.....	10
1.1.2. Закони динаміки (закони Галілея-Ньютона) .....	10
1.1.3. Системи одиниць вимірювання .....	12
1.1.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки.....	13
1.1.5. Початкові умови .....	14
1.1.6. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки .....	15
1.1.7. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки .....	17
1.1.7.1. Рух точки під дією постійної сили.....	17
1.1.7.2. Рух точки під дією сили, яка залежить від часу .....	22
1.1.7.3. Рух точки під дією сили, що залежить від положення точки .....	25
1.1.7.4. Рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості.....	29
1.1.7.5. Криволінійний рух точки.....	32
РОЗДІЛ II. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ....	36
1.2.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.....	36
1.2.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки .....	40
1.2.3. Робота. Потенціальна енергія.....	43
1.2.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.....	49
Розділ III. ДИНАМІКА НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ .....	53
1.3.1. Формулювання першої і другої задачі динаміки для невіЛЬНОЇ матеріальної точки.....	53
1.3.2. Невільний рух точки по гладенькій поверхні.....	54
1.3.3. Невільний рух точки по шорсткій поверхні .....	57
1.3.4. Рух невіЛЬНОЇ точки по гладенькій кривій лінії.....	61
1.3.5. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки .....	66
Розділ IV. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ .....	70
1.4.1. Вступ .....	70

1.4.2. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки .....	70
1.4.3. Принцип відносності класичної механіки .....	76
1.4.4. Відносний спокій матеріальної точки .....	77
<b>РОЗДІЛ V. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ .....</b>	<b>81</b>
1.5.1. Гармонійні коливання .....	81
1.5.2. Згасаючі коливання матеріальної точки .....	89
1.5.3. Змушені коливання без врахування сил опору середовища .....	99
1.5.4. Змушені коливання з врахуванням сили опору типу в'язкого тертя .	107
<b>ЧАСТИНА II. ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ЗБИРАННЯ ВРОЖАЮ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР МЕТОДОМ ОБЧІСУВАННЯ РОСЛИННА КОРЕНІ .....</b>	<b>114</b>
<b>РОЗДІЛ I. ТЕХНОЛОГІЇ ТА ТЕХНІЧНІ ЗАСОБИ ЗБИРАННЯ ВРОЖАЮ МЕТОДОМ ОБЧІСУВАННЯ РОСЛИН НА КОРЕНІ .....</b>	<b>114</b>
2.1.1. Короткий історичний нарис розвитку збирання сільськогосподарських культур методом обчисування .....	114
2.1.2. Аналіз застосування методів обчисування рослин на корені в комбайнових технологіях збирання .....	124
2.1.3. Загальна технологічна схема стаціонарної технології збирання зернових з застосуванням методу обчисування рослин на корені .....	136
2.1.4. Конструкція та принцип дії причіпного збирального агрегату .....	141
<b>РОЗДІЛ II. ДИНАМІКА ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ ЗА ПРЯМОЛІНІЙНОГО І РІВНОМІРНОГО РУХУ ЦЕНТРА МАС ТРАКТОРА .....</b>	<b>145</b>
2.2.1. Постановка проблеми.....	145
2.2.2. Вихідні дані і припущення .....	145
2.2.3. Розрахункова схема причіпного збирального агрегату при прямолінійному і рівномірному русі центра мас трактора .....	146
2.2.4. Диференціальні рівняння руху збирального агрегату .....	148
<b>РОЗДІЛ III. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ЛАНОК ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ .....</b>	<b>173</b>
2.3.1. Диференціальні рівняння руху трактора при агрегуванні збирального агрегату.....	173
2.3.2. Диференціальні рівняння руху збиральної машини обчисуючого типу .....	180

2.3.3. Диференціальні рівняння руху двоосного причепа-візка для збору обчісаного вороху .....	185
<b>РОЗДІЛ IV. СТІЙКІСТЬ РУХУ ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ .....</b>	<b>194</b>
2.4.1. Умови стійкості руху збирального агрегату при прямолінійному русі центра мас трактора.....	194
2.4.2. Обґрунтування швидкості руху трактора, що забезпечує стійкість його руху при агрегуванні збирального агрегату .....	197
2.4.3. Аналіз стійкості руху збиральної машини.....	203
2.4.4. Стійкість руху причепа-візка .....	205
2.4.5. Швидкість збирального агрегату за умови збереження стійкості його руху .....	209
2.4.6. Визначення конструктивних параметрів збиральної машини, що забезпечують стійкість її руху .....	210
2.4.7. Експериментальні дослідження стійкості руху збирального агрегату .....	212
<b>РОЗДІЛ V. СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБЧІСАНОВОГО ВОРОХУ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР.....</b>	<b>224</b>
2.5.1.Методика розрахунків статистичних характеристик.....	224
2.5.2. Фракційний склад обчісаного вороху зернових.....	226
2.5.2.1. Програма та методика визначення вмісту окремих компонентів у обчісаному воросі зернових .....	226
2.5.2.2. Статистичні характеристики вмісту вільного зерна в обчісаному воросі озимої пшениці.....	229
2.5.2.3. Аналіз вмісту обірваних колосків у обчісаному воросі озимої пшениці.....	230
2.5.2.4. Статистична модель вмісту полови в обчісаному воросі озимої пшениці.....	232
2.5.2.5. Статистичний аналіз вмісту соломи у обчісаному воросі зернових .....	233
2.5.2.6. Загальний аналіз вмісту різних компонентів у обчісаному воросі озимої пшениці .....	235
2.5.3. Біометричні характеристики компонентів обчісаного вороху озимої пшениці.....	237
2.5.3.1. Програма та методика дослідження біометрії.....	237

2.5.3.2. Визначення біометричних характеристик зернівок.....	237
2.5.3.3. Встановлення розмірних характеристик компонентів солом'ястої фракції.....	241
2.5.3.4. Аналіз біометрії обірваних колосків озимої пшениці .....	245
2.5.3.5. Загальний статистичний аналіз розмірних характеристик компонентів обчисаного вороху зернових.....	248
<b>РОЗДІЛ VI. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ ПРИСТРОЮ ДЛЯ ЗРІЗУВАННЯ ОБЧИСАНИХ СТЕБЕЛ .....</b>	<b>251</b>
2.6.1. Основні положення та припущення .....	251
2.6.2. Теоретичні основи розрахунку конструктивних і кінематичних параметрів різального пристрою .....	253
2.6.2.1. Обґрунтування критерію оцінки якості роботи пристрою .....	253
2.6.2.2. Вибір частоти обертання шнека.....	257
2.6.2.3. Визначення конструктивних параметрів різального пристрою ..	258
2.6.2.3.1. Розрахунок зовнішнього і внутрішнього діаметрів шнека .....	258
2.6.2.3. Розрахунок кроку витка шнека різального пристрою .....	260
2.6.2.4. Визначення кута розхилу леза протиріжучої пластини різального пристрою .....	261
2.6.2.5. Розрахунок довжини протирізальної пластини.....	263
2.6.2.6. Визначення діапазону допустимих значень показника кінематичного режиму роботи шнекового різального пристрою .....	268
2.6.2.7. Визначення потужності, необхідної для зрізування стебел.....	270
2.6.3. Блок-схема алгоритму розрахунку конструктивних і кінематичних параметрів пристрою для зрізування рослин .....	275
<b>ЧАСТИНА III. ....</b>	<b>277</b>
<b>ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУТКОВОГО ЕЛЕВАТОРА ОВОЧЕЗБИРАЛЬНОЇ МАШИНИ.....</b>	<b>277</b>
3.1. Дослідження динаміки пуску елеватора .....	277
3.2. Дослідження рівнянь руху стрічки елеватора .....	290
3.4. Визначення параметрів демпфіруючого пристрою .....	305
3. 5. Визначення параметрів пруткового елеватора.....	310
3.5.1. Визначення приведених мас і моментів інерції елементів елеватора .....	310

3.5.2. Визначення жорсткостей пружних елементів елеватора .....	312
3.5.3. Визначення кута кочення вантажу .....	314
3.6. Визначення оптимального часу пуску елеватора і коефіцієнту динамічності.....	315
Література.....	318
ДОДАТОК А .....	328



## ВСТУП

Однією з базових складових проєктування сільськогосподарських машин та агрегатів є механіко-математичні дослідження, в основі яких полягає теоретична механіка. Монографія, що пропонується, включає в себе теоретичні дослідження різноманітних сільськогосподарських машин та агрегатів.

Вона складається з окремих томів, пов'язаних між собою єдиною методологією досліджень.

Перший том монографії містить в собі три частини. У першій частині в стислій формі подано теоретичні відомості, які є основою до проведення механіко-математичних досліджень. Головним чином розглянуті питання динаміки математичної точки. При викладанні матеріалу використовувалось багато прикладів. За приклади взяті загально-технічні задачі. Частину задач використано в галузі сільськогосподарської техніки. При написанні першої частини монографії використані існуючі підручники, посібники та збірники задач з теоретичної механіки [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Друга частина монографії присвячена дослідженню технічних засобів збирання врожаю зернових культур методом обчісування. Вона містить шість розділів. В кожному розділі розглянуті окремі задачі загальної проблеми збирання зернових культур методом обчісування рослин на корені.

У першому розділі розглянуті загальні дані про технології та технічні засоби збирання врожаю зернових методом обчісування рослин на корені.

Другий розділ присвячений розгляду питань динаміки причіпного збирального агрегату при умові прямолінійного і рівномірного руху центра мас.

У третьому розділі наведені математичні моделі руху окремих ланок причіпного збирального агрегату (трактора, збиральної

машини з робочими органами обчісуючого типу та візка, призначеного для збору обчісаного вороху).

У четвертому розділі розглянуто питання стійкості руху збирального агрегату. Наведено методику визначення стійкості руху окремих ланок збирального агрегату, а саме трактора, збиральної машини та причепа-візка для збирання обчісаного вороху.

У п'ятому розділі дан статистичний аналіз механіко-технологічних властивостей обчісаного вороху зернових, який є основою для розробки робочого органу для сепарації обчісаного вороху.

Окремим питанням у збиранні зернових методом обчісування рослин на корені є збирання незернової частини врожаю. Теоретичному обґрунтуванню параметрів та режимів роботи різального пристрою для зрізу обчісаних стебел зернових культур присвячений шостий розділ.

Завершує перший том третя частина, у якій розглянуто теоретичні дослідження пруткового елеватора овочезбиральної машини.

# ЧАСТИНА І. МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ РУХУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН ТА АГРЕГАТІВ

## РОЗДІЛ І. ВСТУП ДО ДИНАМІКИ. ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

### 1.1.1. Основні поняття та визначення динаміки

Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчаються закони руху матеріальних тіл під дією сил, прикладених до них.

Розглянемо основні визначення динаміки.

Сила – це векторна величина, яка характеризує міру механічної взаємодії матеріальних тіл.

Система сил – це сукупність декількох тіл, які діють на тіло або на матеріальну систему одночасно.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково.

**Система сил** може бути, в деяких випадках, еквівалентна нулю.

**Інертність** – це властивість матеріальних тіл швидше або повільніше змінювати швидкість свого руху під дією прикладених сил.

**Масою** матеріальної точки називається скалярна величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.

Матеріальною точкою називається матеріальне тіло, яке має масу, розмірами якого при вивченні його руху можна знехтувати.

### 1.1.2. Закони динаміки (закони Галілея-Ньютона)

Основою динаміки є закони, які для матеріальної точки сформульовані І. Ньютоном у “Математичних началах натуральної філософії” (1687 р.). **Перший закон (закон інерції), відкритий Галілеєм.**

Ізольована від зовнішніх впливів матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, доти прикладені сили не змусять її змінити свій стан.

Рух, який здійснює точка при відсутності сил, називається інерційним рухом.

Із даного закону витікає твердження, що при  $F = 0$  точка знаходиться у стані спокою, або рухається із постійною за модулем та напрямом швидкістю ( $\bar{V} = const$ ), прискорення при цьому дорівнює нулю ( $\bar{a} = 0$ ), якщо рух точки не є рівномірним та прямолінійним, то на точку діє сила.

Система відліку, по відношенню до якої виконується закон інерції, називається інерціальною системою відліку.

**Другий закон (основний закон динаміки).** Модуль сили, діючої на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення, а вектор сили співпадає з вектором прискорення.

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (1.1.1.)$$

**Третій закон Ньютона, принцип рівності дії і протидії.**

Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, рівними за модулем, а їх вектори спрямовані вздовж прямої, з'єднуючої ці точки в протилежні боки.

**Четвертий закон, закон незалежності дії сил.**

Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

Нехай на точку, маса якої дорівнює  $m$ , діють сили  $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots, \bar{F}_n$ . Позначмо прискорення точки буквою  $\bar{a}$ , а прискорення, які мала би ця точка, якби кожна із діючих сил діяла на неї окремо,  $-\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$ .

Крім того, на підставі другого закону Ньютона маємо:

$$\bar{F}_1 = m\bar{a}_1, \bar{F}_2 = m\bar{a}_2 \dots, \bar{F}_n = m\bar{a}_n .$$

Рівнодіюча  $\bar{R}$  дорівнює сумі сил :

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \dots + \bar{F}_n = m\bar{a}_1 + m\bar{a}_2 \dots + m\bar{a}_n = \\ &= m(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 \dots + \bar{a}_n) = m\bar{a} \\ m\bar{a} &= \bar{R} \text{ або } m\bar{a} = \sum F_k.\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

### 1.1.3. Системи одиниць вимірювання

Для вимірювання усіх механічних величин достатньою ввести три основні одиниці вимірювання. Двома з них прийнято вважати одиниці довжини та часу. Третьою одиницею можна вибрати одиницю вимірювання маси або сили. В залежності від цього вибору виникають дві принципово відмінних системи вимірювання.

#### Перший тип систем одиниць вимірювання.

В цих системах основними є одиниця довжини, одиниця часу та одиниця маси, а сила є похідною одиницею.

До таких систем відноситься міжнародна система одиниць вимірювань фізичних величин (СІ), у якій основними одиницями вимірювання механічних величин є метр [м], кілограм маси [кг] та секунда [сек]. Одиницею вимірювання сили є похідна одиниця – 1 Ньютон [Н].

1 Ньютон – це така сила, яка надає масі 1 кг прискорення 1 м/с<sup>2</sup>.

$$[1 \text{ Н}] = [1 \text{ кг}] \times [1 \text{ м/с}^2].$$

#### Другий тип систем одиниць вимірювання.

В цих системах основними одиницями вимірювання приймаються одиниці вимірювання довжини, часу та сили, а маса є похідною одиницею.

До таких одиниць відноситься система МКГСС, у якій основними одиницями є метр [м], кілограм сили [кГ] та секунда [с].

Одиницею вимірювання маси в цій системі буде  $[\frac{\text{кГ} \times \text{сек}^2}{\text{м}}]$ , тобто це маса, якій сила в 1 кГ надає прискорення [1 м/сек<sup>2</sup>]. Співвідношення між одиницями вимірювання сили в системі СІ так МКГСС:

$$1 \text{ кГ} \approx 9,81 \text{ Н} \text{ або } 1 \text{ Н} \approx 0,102 \text{ кГ}.$$

#### 1.1.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Матеріальна точка вважається вільною, якщо її рух не обмежується будь якими в'язями.

Основний закон динаміки для вільної матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k. \quad (1.1.3)$$

Дане векторне рівняння можна надати у вигляді проєкцій на три осі декартових координат, а саме

$$ma_x = \Sigma_{k=1}^n F_{kx}; \quad ma_y = \Sigma_{k=1}^n F_{ky}; \quad ma_z = \Sigma_{k=1}^n F_{kz}.$$

Як відомо з кінематики, проєкції прискорення по координатній осі дорівнюють другим похідним за часом від відповідних координат, тобто:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Підставимо ці вирази у попередні рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma_{k=1}^n F_x; \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma_{k=1}^n F_y; \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma_{k=1}^n F_z. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Таким чином, ми отримали систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку, яку виражає у координатній формі другий закон динаміки.

У проєкціях на натуральні осі, тобто на дотичну, головну нормаль і бінормаль траєкторії, диференціальні рівняння руху матеріальної точки матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{\tau}; \\ m \frac{V^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_n; \\ 0 = \sum_{k=1}^n F_b. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

де  $V$  – величина швидкості точки;

$\rho$  – радіус кривини траєкторії в даній точці.

$\sum_{k=1}^n F_{\tau}$ ,  $\sum_{k=1}^n F_n$ ,  $\sum_{k=1}^n F_b$  – алгебраїчні суми проекцій усіх сил на натуральні осі.

Рівняння (1.1.5) називаються диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі (рівняння Ейлера).

### 1.1.5. Початкові умови

Рух точки починається з початкового моменту часу. Положення, яке точка займає у початковий момент часу, називається початковим положенням, а її швидкість в цей момент – початковою швидкістю.

Якщо рух точки визначений координатним способом, то положення точки в початковий момент визначається її координатами, а швидкість – її проекціями на осі координат. Тому, у випадку прямолінійного руху точки, початкових умов дві:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0. \end{cases}$$

Якщо точка рухається у площині, то маємо чотири початкові умови:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0; y = y_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0; \dot{y} = \dot{y}_0. \end{cases}$$

При русі точки у просторі початкових умов шість:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0; y = y_0; z = z_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0; \dot{y} = \dot{y}_0; \dot{z} = \dot{z}_0. \end{cases}$$

У разі натуральної форми завдання руху початкові умови мають вид:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} S = S_0; \\ V = V_0. \end{cases}$$

Оскільки початок координат може бути вибраний довільно, координати початкового положення точки взагалі можуть не дорівнювати нулю. Тільки в тому випадку, коли початок координат береться в початковому положенні точки, координати точки в початковий момент часу дорівнюють нулю.

### 1.1.6. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

Перша основна задача динаміки матеріальної точки полягає у наступному:

При заданому законі руху матеріальної точки та її масі необхідно визначити сили, діючі на цю точку.

Двічі диференціюючи рівняння руху за часом, одержуємо проекції прискорення точки, тому задача називається диференціальною. Помножаючи ці проекції на масу, знаходимо проекції  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  рівнодіючої сили:

$$F_x = m\ddot{x}; F_y = m\ddot{y}; F_z = m\ddot{z}.$$

Величину сили знаходимо за формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок сили визначаємо за формулами:

$$\cos(x, F) = \frac{F_x}{F}; \cos(y, F) = \frac{F_y}{F}; \cos(z, F) = \frac{F_z}{F}.$$

Розглянемо такий приклад:

Рух матеріальної точки масою 1 кг, визначається рівняннями  $x = 3$ ,  $y = 4t$ ,  $z = 5t^2$ . Визначити величину та напрям сили  $\vec{F}$ , яка діє на точку.

Розв'язування:

Диференціюємо двічі рівняння руху часом, знаходимо проекції прискорення точки:



$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 10.$$

Знаходимо проекції сили, яка діє на точку:

$$F_x = m\ddot{x} = 0;$$

$$F_y = m\ddot{y} = 0;$$

$$F_z = m\ddot{z} = 10 \text{ Н.}$$

Величина сили визначається за формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 10 \text{ Н.}$$

Напрямок сили визначається за формулами:

$$\cos \alpha = \cos(x, \bar{F}) = \frac{F_x}{F} = 0;$$

$$\cos \beta = \cos(y, \bar{F}) = \frac{F_y}{F} = 0;$$

$$\cos \gamma = \cos(z, \bar{F}) = \frac{F_z}{F} = 1.$$

Відповідно кути між силою  $F$  і осями координат будуть такими:

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 0.$$

Отже сила  $\bar{F}$  спрямована по вертикалі вгору.

Друга основна задача динаміки полягає у наступному.

Згідно заданим силам, діючим на матеріальну точку, і початковим умовам визначити закон руху точки.

Друга задача динаміки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

## 1.1.7. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки

### 1.1.7.1. Рух точки під дією постійної сили

Розглянемо матеріальну точку D масою  $m$ , яка рухається прямолінійно під дією постійної сили  $P = const$ . В початковий момент часу координата цієї точки була  $x = x_0$ , а початкова швидкість  $V = V_0$ .

Необхідно визначити закон руху точки.

Складаємо розрахункову схему (рис. 1.1.1)

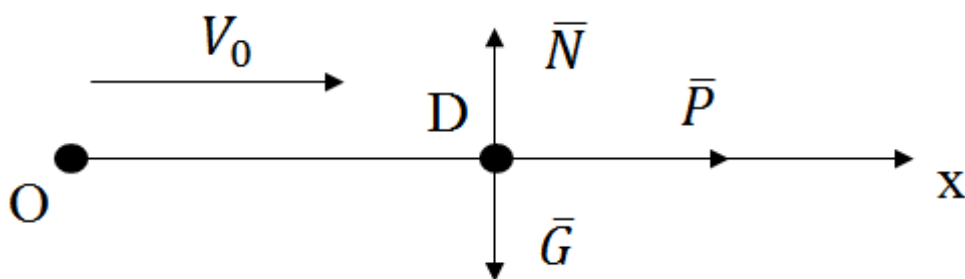


Рис. 1.1.1. Схема сил, діючих на матеріальну точку D

Для розв'язання цієї задачі запишемо основний закон динаміки:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.1.6)$$

Спроеціюємо рівняння (1.1.6) на вісь  $x$ :

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.1.7)$$

Враховуючи, що  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ , рівняння (1.1.7) приймає вид:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.1.8)$$

Сума проєкцій сил, діючих на точку, дорівнює  $\sum_{k=1}^n F_{kx} = P_x$ . Підставимо у праву частину рівняння (1.1.8) суму проєкцій сил:

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x = P. \quad (1.1.9)$$

Рівняння (1.1.9) – диференціальне рівняння прямолінійного руху точки під дією постійної сили  $P$ .

Для розв'язання цього рівняння необхідно відокремити змінні:

$$dV_x = \frac{P}{m} dt. \quad (1.1.10)$$

Інтегруємо ліву і праву частини (1.1.10)

$$\int dV_x = \frac{P}{m} \int dt \Rightarrow V_x = \frac{P}{m} t + C_1. \quad (1.1.11)$$

Підставимо  $V_x = \frac{dx}{dt}$  в ліву частину виразу (1.1.11), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P}{m} t + C_1. \quad (1.1.12)$$

Відокремимо змінні:

$$dx = \frac{P}{m} t dt + C_1 dt. \quad (1.1.13)$$

Інтегруємо ліву і праву частини виразу (1.1.13).

$$\int dx = \frac{P}{m} \int t dt + C_1 \int dt. \quad (1.1.14)$$

$$x = \frac{P}{2m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (1.1.15)$$

Сталі інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов при  $t = 0$   $\begin{cases} x = x_0; \\ V_x = V_{0x} = V_0. \end{cases}$

$$V_0 = \frac{P}{m} \times 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0;$$

$$x_0 = \frac{P}{2m} \times 0 + V_0 \times 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0.$$

Підставляємо сталі інтегрування у рівняння (1.1.15):

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{P}{2m} t^2; \quad (1.1.16)$$

Враховуючи той факт, що  $a = \frac{P}{m}$ , отримуємо рівняння руху точки під дією постійної сили у остатній формі:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.1.17)$$

Як видно з виразу (1.1.17), точка під дією постійної сили рухається рівнозмінно. Якщо рух є уповільненим, прискорення має від'ємний знак і вираз (1.1.17) приймає вид:

$$x = x_0 + V_0 t - \frac{at^2}{2}. \quad (1.1.18)$$

Розглянемо наступний приклад. При очистці зернівок їх пропускають крізь решето, яке коливається, має отвори і розташоване горизонтально.

Горизонтальна швидкість, з якою зернівка надходить до краю отвору, дорівнює  $V_0$ , форма зернівки – куля радіуса  $R$ . Нехтуючи опором повітря, треба визначити мінімальну ширину отвору  $b$ , щоб зернівка змогла проскочити крізь нього.

Розв'язання. Мінімальна ширина отвору  $b$  визначається з тієї умови, що в момент проскакування зернівки крізь отвір її центр повинен бути розташований на рівні поверхні решета (рис. 1.1.2).

Таким чином, центр зернівки повинен перейти з точки  $A$  в точку  $E$ . Візьмемо початок координат в точці  $A$  і спрямуємо вісь  $x$  по горизонталі в бік руху зернівки, а вісь  $y$  – по вертикалі вгору.

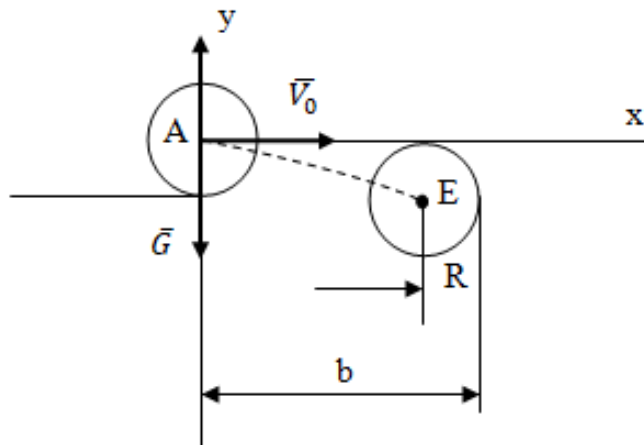


Рис. 1.1.2. Схема руху зернівки по поверхні плоского решета

Координати точки  $E$  такі:  $x_E = b - R$ ;  $y_E = -R$ .

Будемо вважати зернівку матеріальною точкою, маючи на увазі рух її центра ваги. На зернівку при його вільному польоті діє тільки одна постійна за величиною і напрямом сила ваги  $\bar{G}$ . Проекції цієї

сили на осі  $x$  і  $y$  будуть  $F_x = 0, F_y = -G$ . Тому диференціальні рівняння руху зернівки мають такий вигляд:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -G.$$

Враховуючи, що  $G = mg$ , і скорочуючи праві і ліві частини на  $m$ , одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Зменшимо порядок похідних:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \quad \frac{dV_y}{dt} = -g.$$

Відокремимо змінні, помножуючи на  $dt$  ліві і праві частини рівнянь:

$$dV_x = 0; \quad dV_y = -g dt.$$

Інтегруємо:

$$\int dV_x = 0; \quad \int dV_y = -gt.$$
$$V_x = C_1; \quad V_y = -gt + C_2. \quad (1.1.19)$$

З кінематики відомо, що:

$$V_x = \frac{dx}{dt} \quad i \quad V_y = -gt + C_2. \quad (1.1.20)$$

Підставляємо вирази (1.1.20) в рівняння (1.1.19), в результаті чого отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = C_1; \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_2. \quad (1.1.21)$$

Знову відокремимо змінні, помножуючи на  $dt$  ліві і праві частини рівнянь:

$$dx = C_1 dt; \quad dy = -gt dt + C_2 dt. \quad (1.1.22)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.22):

$$\int dx = C_1 \int dt; \quad \int dy = -g \int t dt + C_2 \int dt.$$

В результаті отримаємо:

$$x = C_1 t + C_3; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4, \quad (1.1.23)$$

де  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – сталі інтегрування, що визначаються за початковими умовами руху, які мають вид:

$$\text{при } t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 0 & V_{0x} = V_0; \\ y_0 = 0 & V_{0y} = 0. \end{cases}$$

Підставляючи в рівняння (1.1.21) початкові умови, знаходимо, що  $C_1 = V_0$ , а  $C_2 = 0$ . Аналогічно знаходимо сталі інтегрування  $C_3$  і  $C_4$ , підставляючи в рівняння (1.1.23) початкові умови. Таким чином, остаточно рівняння руху центра зернівки будуть точки:

$$\begin{aligned} x &= V_0 t. \\ y &= -\frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Виключаємо з рівнянь час падіння зернівки  $t = \frac{x}{V_0}$ , одержуємо рівняння траєкторії:

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2V_0^2}. \quad (1.1.25)$$

Центр зернівки повинен попасти в точку  $E$ , координати якої:

$$x_E = b - R; \quad y_E = -R.$$

Підставляючи замість  $x$  і  $y$  ці координати, дістаємо рівняння:

$$-R = -\frac{g}{2} \times \frac{(b - R)^2}{V_0^2},$$

з якого знаходимо ширину  $b$  отвору в решеті:

$$b = V_0 \sqrt{\frac{2R}{g}} + R.$$

### 1.1.7.2. Рух точки під дією сили, яка залежить від часу

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки масою  $m$  під дією змінної сили, яка залежить від часу, тобто  $F = f(t)$ , початкові умови руху: при  $t = 0$   $\begin{cases} V_x = V_{0x} \\ x = x_0 \end{cases}$ .

Диференціальне рівняння руху точки має вид:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.1.26)$$

Спроеціюємо рівняння (1.1.26) на вісь  $x$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad \text{або} \quad \frac{dV_x}{dt} = f(t). \quad (1.1.27)$$

Відокремимо змінні в рівнянні (1.1.27), помножуючи ліву і праву його частини на  $dt$ :

$$m dV_x = f(t)dt. \quad (1.1.28)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.28):

$$m \int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = \int_0^t f(t)dt;$$
$$m V_x \Big|_{V_{0x}}^{V_x} = \int_0^t f(t)dt.$$

Вважаючи, що функція  $f(t)$  відома, то останній інтеграл можна визначити, в результаті чого отримаємо деяку функцію часу, яку позначаємо через  $\Phi(t)$ , тобто  $\int_0^t f(t)dt = \Phi(t)$ , тоді

$$mV_x - mV_{0x} = \Phi(t). \quad (1.1.29)$$

З рівняння (1.1.29) визначаємо  $V_x$ :

$$V_x = V_{0x} + \frac{1}{m} \Phi(t). \quad (1.1.30)$$

Рівняння (1.1.30) визначає швидкість точки як функцію часу  $t$ . Вважаючи, що  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , підставимо в рівняння (1.1.30), яке приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + \frac{1}{m} \Phi(t). \quad (1.1.31)$$

Відокремимо змінні:

$$dx = V_0 dt + \frac{1}{m} \Phi(t) dt. \quad (1.1.32)$$

Інтегруємо ліву і праву частину рівняння (1.1.32), враховуючи початкові умови:

$$\int_{x_0}^x dx = V_0 \int_0^t dt + \frac{1}{m} \int_0^t \Phi(t) dt.$$

Остаточно закон прямолінійного руху матеріальної точки під дією сили, яка залежить від часу, має вид:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \Phi(t) dt. \quad (1.1.33)$$

Розглянемо приклад. Трактор вагою  $P$  рухається по прямій лінії і під час розгону його сила тяги збільшується по закону  $F = kt$ , де  $t$  – час у секундах,  $k$  – сталий коефіцієнт, який має розмірність  $\left[ \text{кг} \times \frac{\text{м}}{\text{с}^3} \right]$ . Визначити закон руху трактора під час розгону.

Розв'язання.

Трактор рухається поступально, тому його можна вважати матеріальною точкою. Початкові умови при  $t = 0$   $\begin{cases} V_x = V_{0x} = 0 \\ x = x_0 = 0 \end{cases}$ .

В основу розв'язування покладемо II закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.1.34)$$



З врахуванням, що  $\sum F_{kx} = F_x = kt$ , рівняння (1.1.34) приймає вид:

$$m\ddot{x} = kt \text{ або } m \frac{dV_x}{dt} = kt.$$

Відокремимо змінні:

$$m dV_x = kt dt. \quad (1.1.35)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.1.35) на  $m$ :

$$dV_x = \frac{1}{m} kt dt. \quad (1.1.36)$$

Інтегруємо ліву і праву частину рівняння (1.1.36).

$$\int dV_x = \frac{k}{m} \int t dt;$$
$$V_x = \frac{k}{2m} t^2 + C_1. \quad (1.1.37)$$

Рівняння (1.1.37) є рівнянням швидкості руху трактора.

Підставимо в ліву частину рівняння (1.1.37) замість  $V_x \frac{dx}{dt}$  і отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2m} t^2 + C_1.$$

Відокремимо змінні:

$$dx = \frac{k}{2m} t^2 dt + C_1 dt.$$

Інтегруємо рівняння:

$$\int dx = \frac{k}{2m} \int t^2 dt + C_1 \int dt.$$
$$x = \frac{k}{6m} t^3 + C_1 t + C_2. \quad (1.1.38)$$

Визначаємо сталі інтегрування, для чого використовуємо початкові умови:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0.$$

Тоді закон руху має вигляд:

$$x = \frac{k}{6m} t^3.$$

Враховуючи, що  $m = \frac{p}{g}$ , закон руху трактора в остатньому вигляді буде:

$$x = \frac{kg}{6p} t^3 \text{ [м]}.$$

### 1.1.7.3. Рух точки під дією сили, що залежить від положення точки

Точка рухається прямолінійно під дією змінної сили  $F = f(x)$ , де  $f(x)$  деяка функція від абсциси  $x$  рухомої точки. Початкові умови при  $t_0 = 0$   $\begin{cases} x = x_0; \\ V_x = V_{0x}. \end{cases}$

Необхідно знайти закон руху точки.

Складаємо диференціальне рівняння, для чого використовуємо II закон Ньютона  $m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  або  $ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}$ :

Враховуючи, що  $a_x = \frac{dV_x}{dt}$

$$m \frac{dV_x}{dt} = f(x). \quad (1.1.39)$$

Помножимо та одночасно поділимо ліву частину рівняння (1.1.39) на  $dx$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} \times \frac{dx}{dx} = f(x). \quad (1.1.40)$$

Враховуючи, що  $V_x = \frac{dV_x}{dt}$  отримаємо:

$$mV_x \frac{dV_x}{dt} = f(x). \quad (1.1.41)$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину рівняння (1.1.41) помножимо на  $dx$ :

$$mV_x dV_x = f(x) dx. \quad (1.1.42)$$

Поділимо ліву і праву частини рівняння (1.1.42) на  $m$ :

$$V_x dV_x = \frac{1}{m} f(x) dx. \quad (1.1.43)$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння (1.1.43):

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} V_x dV_x = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (1.1.44)$$

Межі інтегрування визначаємо за допомогою початкових умов:

$$\frac{V_x^2}{2} \Big|_{V_{0x}}^{V_x} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx; \quad (1.1.45)$$

$$\frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}^2}{2} = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (1.1.46)$$

Виконуємо інтегрування правої частини рівняння (1.1.46) (а це можливо зробити, оскільки функція  $f(x)$  відома), отримаємо деяку нову функцію змінної  $x$ , яку позначимо через  $\Phi(x)$ .

$$\frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}^2}{2} = \frac{1}{m} \Phi(x); \quad (1.1.47)$$

$$V_x = \pm \sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \Phi(x)}. \quad (1.1.48)$$

Ця формула визначає швидкість руху точки як функцію її абсциси  $x$ . Знак залежить від того, у якому напрямку рухається точка вздовж осі  $x$ .

З урахуванням того, що  $V_x = \frac{dx}{dt}$ , рівняння (1.1.48) приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \Phi(x)}. \quad (1.1.49)$$

Помножимо на  $dt$  ліву та праву частину рівняння (1.1.49):

$$dx = \pm \sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \Phi(x)} dt. \quad (1.1.50)$$

Відокремимо змінні:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{2}{m} \Phi(x)}}. \quad (1.1.51)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.51):

$$\int_0^t dt = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}}. \quad (1.1.52)$$

$$t = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}\phi(x)}}. \quad (1.1.53)$$

Це рівняння встановлює залежність між  $x$  і  $t$ . Після інтегрування правої частини і розв'язання отриманого після цього рівняння відносно  $x$ , знаходимо рівняння руху точки у остаточному вигляді  $x = \varphi(t)$ .

Розглянемо наступний приклад.

Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рухається вздовж осі  $x$  під дією сили, яка залежить від положення, тобто  $F = ktx$ , де  $k = 4$ . Початкові умови

$$\text{при } t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 5 [\text{м}] \\ V_0 = 2 \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]. \end{cases}$$

Визначити закон руху матеріальної точки  $M$ .

Складаємо розрахункову схему (рис. 1.1.3)



Рис. 1.1.3. Схема сил, діючих на матеріальну точку

Для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки використовуємо II закон Ньютона.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

Спроеціюємо це рівняння на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.1.54)$$

Підставляємо у праву частину рівняння (1.1.54)  $\sum_{k=1}^n F_{kx} = ktx$  і отримуємо рівняння:

$$m\ddot{x} = ktx. \quad (1.1.55)$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння (1.1.55) на  $m$ :

$$\ddot{x} = kx \text{ або } \ddot{x} - kx = 0. \quad (1.1.56)$$

Підставляємо у рівняння (1.1.56) значення  $k = 4$  і отримуємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки.

$$\ddot{x} - 4x = 0. \quad (1.1.57)$$

Для розв'язування диференціального рівняння (1.1.57) складаємо характеристичне рівняння:

$$n^2 - 4 = 0.$$

Корні цього рівняння дорівнюють:

$$n_1 = 2; \quad n_2 = -2.$$

Оскільки корні характеристичного рівняння є дійсними і різними, то загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння буде:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (1.1.58)$$

Визначаємо сталі інтегрування  $c_1$  і  $c_2$ , для чого використовуємо початкові умови: при  $t_0 = 0$   $\begin{cases} x_0 = 5 [\text{м}] \\ V_0 = 2 \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] \end{cases}$ .

Для визначення сталих інтегрування необхідно знати рівняння швидкості руху матеріальної точки, яке ми отримаємо шляхом диференціювання рівняння (1.1.58)

$$V = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (1.1.59)$$

Таким чином ми маємо два рівняння – рівняння руху точки (1.1.58) та рівняння швидкості (1.1.59).

Для знаходження сталих інтегрування підставимо у ці рівняння початкові умови:

$$5 = C_1 + C_2;$$

$$2 = 2C_1 - C_2.$$

Звідки  $C_1 = 3, C_2 = 2$ .

Підставляємо сталі інтегрування у рівняння (1.1.59) і отримуємо закон руху матеріальної точки  $M$  у остаточному вигляді:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}. \quad (1.1.60)$$

#### 1.1.7.4. Рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості

Матеріальна точка масою  $m$  рухається під дією сили, яка залежить від швидкості, тобто  $F = f(V)$ . Початкові умови: при

$$t_0 = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ V = V_0 \end{cases}.$$

Необхідно визначити закон руху точки.

Складаємо диференціальне рівняння руху точки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \quad \text{або} \quad ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}.$$

На точку діє одна сила, яка залежить від швидкості, тому  $\sum_{k=1}^n F_{kx} = F_x = f(V)$ .

Враховуючи, що  $a_x = \frac{dV}{dt}$ , можемо записати диференціальне рівняння у наступному вигляді:

$$m \frac{dV}{dt} = f(V). \quad (1.1.61)$$

Відокремимо змінні, для чого спочатку ліву і праву частину диференціального рівняння (1.1.61) помножимо на  $dt$ , а потім поділимо на  $f(V)$ , в результаті чого отримуємо вираз:

$$\frac{mdV}{f(V)} = dt. \quad (1.1.62)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.62), межі інтегрування визначаємо з початкових умов.

$$\int_{V_0}^V \frac{mdV_x}{f(V)} = \int_0^t dt. \\ \int_{V_0}^V \frac{mdV}{f(V)} = t. \quad (1.1.63)$$

Після інтегрування лівої частини виразу (1.1.63) отримаємо рівняння, яке розв'яжемо відносно  $V$  і знайдемо швидкість як функцію часу:

$$V = \frac{dx}{dt} = \Phi(t). \quad (1.1.64)$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину виразу (1.1.64) помножимо на  $dt$ :

$$dx = \Phi(t)dt. \quad (1.1.65)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.65):

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \Phi(t)dt.$$

В результаті отримаємо закон руху матеріальної точки, як функцію часу:

$$x - x_0 = \int_0^t \Phi(t)dt \quad \text{або} \quad x = x_0 + \int_0^t \Phi(t)dt. \quad (1.1.66)$$

Розглянемо приклад.

Тіло  $D$  вагою  $\bar{P}$  падає донизу із точки  $O$ , початкова швидкість  $V_0 = 0$ . Опір повітря пропорційний швидкості  $\bar{R} = \mu\bar{V}$ . Визначити закон руху тіла.

Складаємо розрахункову схему.

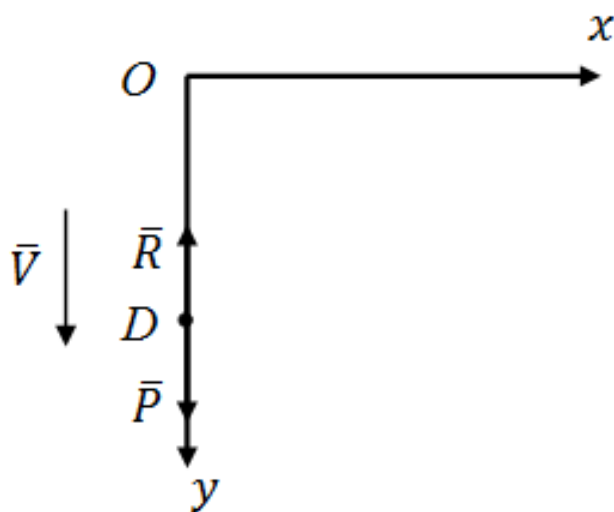


Рис. 1.1.4. Схема сил, діючих на точку  $D$

Складаємо диференціальне рівняння руху точки D в проекції на вісь у.

$$m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}.$$

Визначаємо суму проекцій діючих на точку сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = G_y - R_y = mg - \mu V. \quad (1.1.67)$$

Підставляємо вираз (1.1.67) у диференціальне рівняння:

$$m\ddot{y} = mg - \mu V. \quad (1.1.68)$$

Поділимо ліву і праву частину (1.1.68) на масу  $m$ :

$$\ddot{y} = g - \frac{\mu}{m} V. \quad (1.1.69)$$

Позначимо  $\frac{\mu}{m} = k$  та підставимо позначення у рівняння (1.1.69):

$$\ddot{y} = g - kV. \quad (1.1.70)$$

Знизимо порядок рівняння (1.1.70) за рахунок виразу  $\dot{y} = \frac{dv}{dt}$ .

$$\frac{dv}{dt} = g - kV. \quad (1.1.71)$$

Відокремимо змінні, для чого ліву і праву частину рівняння (1.1.71) помножимо на  $dt$ , а потім поділимо на  $(g - kV)$ .

$$dV = (g - kV)dt; \quad \frac{dV}{g - kV} = dt.$$

Введемо нову змінну  $u = g - kV$ ; тоді  $du = -k dV$ ;  $dV = -\frac{du}{k}$

Отримаємо рівняння  $\frac{du}{u} = -k dt$ .

Після інтегрування маємо:

$$\ln u = -kt + C_1, \quad \text{або} \quad \ln(g - kV) = -kt + C_1. \quad (1.1.72)$$

Із рівняння (1.1.72) визначимо значення  $C_1$ , підставивши початкові умови при  $t_0 = 0$ ;  $V = V_0 = 0$ ;

$$\ln(g - k \times 0) = -k \times 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення  $C_1$  в рівняння і визначимо швидкість  $V$ :



$$\ln(g - kV) = -kt \cdot \ln g; \ln\left(\frac{g-kV}{g}\right) = -kt. \quad (1.1.73)$$

Потенціюємо вираз (1.1.73):

$$\frac{g-kV}{g} = e^{-kt}; \quad V = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (1.1.74)$$

Аналіз виразу (1.1.74) показує, що при  $t \rightarrow \infty$  маємо  $e^{-kt} \rightarrow 0$ ,  $V \rightarrow \frac{g}{k}$ , тобто максимальна швидкість буде  $V_{max} = \frac{g}{k}$ , а рух стає рівномірним.

Уявимо рівняння (1.1.74) у вигляді:

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Відокремимо змінні:

$$dy = \frac{q}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (1.1.75)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.75):

$$y = \frac{q}{k}t + \frac{q}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (1.1.76)$$

Для визначення  $C_2$  підставимо у рівняння (1.1.76) початкові умови:  $t = t_0 = 0$ ,  $y = y_0 = 0$ ;

$$0 = \frac{q}{k^2} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{q}{k^2}.$$

Підставимо значення  $C_2$  у рівняння (1.1.76) і отримаємо рівняння тіла, що падає, долаючи опір повітря:

$$y = \frac{q}{k}t - \frac{q}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

### 1.1.7.5. Криволінійний рух точки

Інтегрування диференціальних рівнянь криволінійного руху розглянемо на прикладі руху тіла, яку кинули під кутом  $\alpha$  до горизонту, приймаючи його як матеріальну точку масою  $m$ .

Складаємо розрахункову схему (рис. 1.1.5).

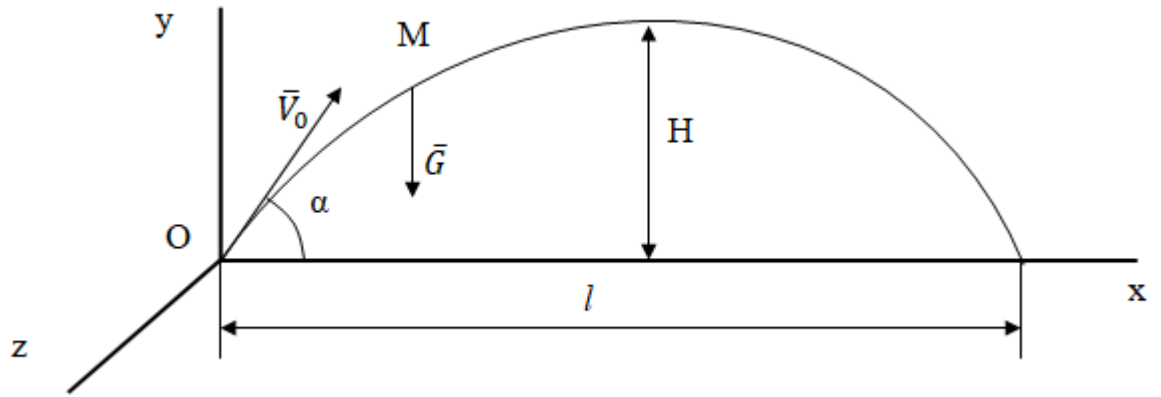


Рис. 1.1.5. Схема руху матеріальної точки по криволінійній траєкторії

На матеріальну точку діє сила ваги  $\bar{G}$ , проекції якої на координатні вісі дорівнюють:

$$G_x = 0; \quad G_y = -G = mg; \quad G_z = 0.$$

Складаємо диференціальні рівняння руху матеріальної точки М:

$$m \frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx};$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = \sum F_{ky};$$

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}.$$

З урахуванням діючої сили, рівняння приймають вид:

$$m \frac{dV_x}{dt} = 0; \quad m \frac{dV_y}{dt} = -mg; \quad m \frac{dV_z}{dt} = 0. \quad (1.1.77)$$

Розділимо ліву і праву частини рівнянь (1.1.77) на  $m$ :

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \quad \frac{dV_y}{dt} = -g; \quad \frac{dV_z}{dt} = 0. \quad (1.1.78)$$

Початкові умови мають вид:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0 = 0 & V_x = V_0 \cdot \cos\alpha; \\ y = y_0 = 0 & V_y = V_0 \cdot \sin\alpha; \\ z = z_0 = 0 & V_z = 0. \end{cases}$$

Відокремимо змінні, для чого помножимо ліву і праву частину рівняння (1.1.78) на  $dt$ :

$$dV_x = 0; \quad dV_y = -gdt; \quad dV_z = 0. \quad (1.1.79)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.79), в результаті чого отримаємо:

$$V_x = c_1; \quad V_y = -gt + c_2; \quad V_z = c_3. \quad (1.1.80)$$

Знаходимо сталі інтегрування, для чого підставляємо початкові умови в вирази (1.1.80):

$$c_1 = V_0 \cos \alpha; \quad c_2 = V_0 \sin \alpha; \quad c_3 = 0.$$

Підставляємо сталі інтегрування в рівняння (1.1.80):

$$V_x = V_0 \cos \alpha; \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt; \quad V_z = 0.$$

або

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \alpha - gt; \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Відокремимо змінні:

$$dx = V_0 \cos \alpha dt; \quad dy = V_0 \sin \alpha dt - gtdt; \quad dz = 0. \quad (1.1.81)$$

Інтегруємо рівняння (1.1.81):

$$\int dx = V_0 \cos \alpha \int dt; \quad \int dy = V_0 \sin \alpha \int dt - g \int t; \quad \int dz = \int 0.$$

В результаті чого отримаємо вирази:

$$x = V_0 t \cos \alpha + c_4, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + c_5, \quad z = c_6. \quad (1.1.82)$$

Визначаємо сталі інтегрування  $c_4, c_5, c_6$ :

$$c_4 = 0, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0.$$

Підставляємо сталі інтегрування у вирази (1.1.82) і остаточно знаходимо рівняння руху точки М у вигляді:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \quad (1.1.83)$$

Враховуючи, що  $z = 0$ , робимо висновок, що точка рухається у площині  $Oxy$ .

Визначимо за допомогою методів кінематики характеристики даного руху.

1. Траєкторія руху точки:

Виключаємо час  $t$  з перших двох рівнянь (1.1.83), отримаємо рівняння траєкторії:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha};$$
$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1.1.84)$$

Рівняння (1.1.84) – це є рівняння параболи з віссю, паралельною осі  $Oy$ .

2. Дальність польоту

$$l = \frac{V_0 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.1.85)$$

3. Висота польоту

$$H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (1.1.86)$$

4. Час польоту

$$t = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}. \quad (1.1.87)$$

## РОЗДІЛ II.

### ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### 1.2.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, що дорівнює добуткові маси точки на вектор її швидкості.

$$\bar{q} = m\bar{V}. \quad (1.2.1)$$

Спрямований вектор кількості руху вбік вектора швидкості, тобто по дотичній до траєкторії руху точки. Одиницею вимірювання кількості руху є  $1 \text{ [кг}\cdot\text{м/с]}$ .

Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили та імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Елементарним імпульсом сили називається векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії.

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt. \quad (1.2.2)$$

Напрямок елементарного імпульсу співпадає з напрямком вектора сили. За одиницю вимірювання імпульсу сили приймається  $1 \text{ [Н}\cdot\text{с]} = 1 \left[ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} \right] = \left[ 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$ .

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили за проміжок часу від 0 до  $t_1$ .

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} d\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt. \quad (1.2.3)$$

Якщо величина і напрям сили постійні, то імпульс сили за певний час  $t = t_1 - t_0$  дорівнює добуткові вектора сили на час її дії.

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot t. \quad (1.2.4)$$

В проекціях на координатні осі рівняння імпульсу сили можна записати наступним чином:

$$S_x = F_x \cdot t;$$

$$S_y = F_y \cdot t; \quad (1.2.5)$$

$$S_z = F_z \cdot t.$$

Повний імпульс сили дорівнюватиме:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \quad (1.2.6)$$

Враховуючи, що маса точки стала, а її прискорення  $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ , то основний закон динаміки може бути записаний наступним чином:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.2.7)$$

Вираз (1.2.7) є теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі.

Похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі діючих на точку сил.

Частіше використовується теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в скінченій формі.

Для її отримання помножимо ліву і праву частини виразу (1.2.7) на  $dt$ , а потім проінтегруємо.

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k dt;$$

$$\int_{V_0}^{V_1} d(m\bar{v}) = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k dt.$$

Остаточно отримаємо теорему про зміну кількості руху у скінченій формі.

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (1.2.8)$$

Зміна кількості руху матеріальної точки за якийсь проміжок часу дорівнює сумі імпульсів всіх діючих на точку сил за той же проміжок часу.

Проекціюючи векторне рівняння (1.2.8) на координатні осі  $x, y, z$ , одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}; \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}; \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

Розглянемо окремі випадки теореми про зміну кількості руху матеріальної точки.

З рівняння (1.2.8) випливає: якщо

$$\sum_{k=1}^n \bar{S} = 0, \quad mV_1 - mV_0 = 0$$

або

$$m\bar{V} = m\bar{V}_0 = \text{const.} \quad (1.2.10)$$

Останнє рівняння виражає закон збереження кількості руху матеріальної точки: якщо сума імпульсів сил, що прикладені до матеріальної точки, за деякий час дорівнює нулю, то кількість руху точки за цей час лишається сталою.

З рівнянь (1.2.9) випливає якщо: наприклад  $\sum_{k=1}^n S_x = 0$ , то

$$mV_{1x} - mV_{0x} = 0 \quad \text{або} \quad mV_x = mV_{0x} = \text{const.} \quad (1.2.11)$$

Останнє рівняння виражає закон збереження проекції кількості руху матеріальної точки на якусь вісь: якщо сума проєкцій імпульсів сил, що діють на матеріальну точку, на якусь вісь за деякий час дорівнює нулю, то проєкція кількості руху точки на ту ж вісь за той же час лишається сталою.

Розглянемо приклад.

Трактор вагою  $P$  виїжджає на підйом зі швидкістю  $V_0$ . Сила опору рухові трактору  $R$ . Через час  $t$  після входу трактору на підйом його швидкість падає до  $V_1$ . Знайти тягову силу трактору, якщо кут підйому дорівнює  $\alpha$ .

Розв'язання:

Складемо розрахункову схему. Паралельно похилій площині вибираємо вісь  $x$ , щоб її дотичний напрям збігався з напрямом руху трактора; вісь  $y$  спрямовуємо по нормалі до площини.

Оскільки трактор має поступальний рух, то цей рух можна розглядати як рух матеріальної точки М, в якій зосереджена вся маса трактора.

Розглянемо сили, які діють на трактор під час його руху.

На трактор будуть діяти чотири сили: сила власної ваги  $\bar{P}$ , рушійна сила  $\bar{Q}$ , нормальна реакція  $\bar{N}$  і сила опору  $\bar{R}$ , що спрямована протилежно рухові трактора. Вважаємо, що всі ці сили прикладені до точки М.

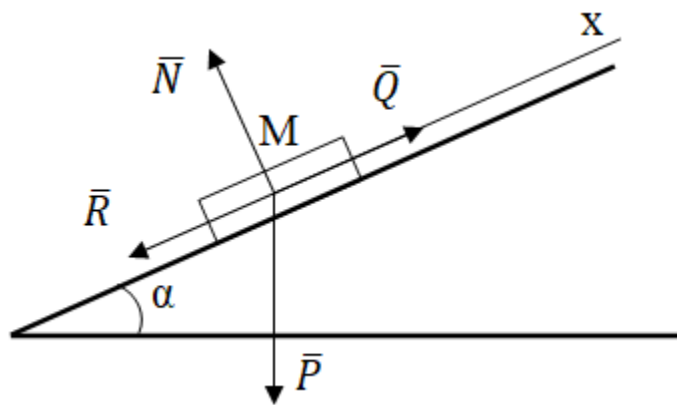


Рис. 1.2.1. Схема сил, діючих на трактор при підйомі

Застосовуємо теорему про зміну кількості руху в проекції на вісь  $x$ :

$$mV_x - mV_{0x} = S_x. \quad (1.2.12)$$

Оскільки сили, що діють на трактор, постійні за величиною і напрямом, то проекція імпульсу всіх сил на вісь  $x$  дорівнюватиме:

$$S_x = (Q - R - P \sin \alpha) \cdot t. \quad (1.2.13)$$

В задачі одна невідома величина – рушійна сила  $Q$  трактора, яка входить в рівняння (1.2.13). На підставі рівнянь (1.2.12) і (1.2.13) маємо:

$$m(V_x - V_{0x}) = (Q - R - P \sin \alpha) \cdot t$$

або

$$\frac{p}{g}(V_x - V_{0x}) = (Q - R - P \sin \alpha) \cdot t. \quad (1.2.14)$$



З рівняння (1.2.14) знаходимо рушійну силу трактора.

$$Q = \frac{\frac{p}{g}(V_x - V_{0x}) + (Q - R - P \sin \alpha) \cdot t}{t}. \quad (1.2.15)$$

### 1.2.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно якогось центра  $O$  є вектор, що дорівнює векторному добуткові радіуса – вектора точки, початок якого в центрі  $O$ , на кількість руху цієї точки:

$$\bar{k}_0 = \bar{M}(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (1.2.16)$$

Модуль моменту кількості руху точки дорівнює добутку модуля кількості руху точки на плече  $h$  – найкоротшу відстань від центра моменту до прямої лінії, на якій розташований вектор  $(m\bar{V})$ .

Проекції вектора  $\bar{k}_0$  на координатні осі дорівнюють моментам кількості руху відносно цих осей.

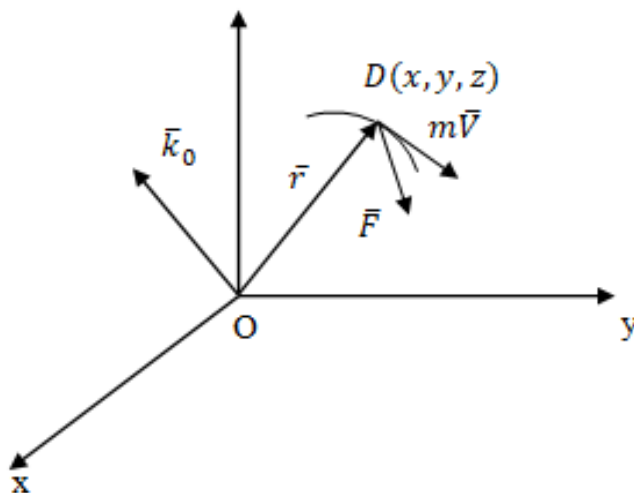


Рис. 1.2.2. Визначення моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра  $O$

З статки відомі формули для визначення моментів сили відносно координатних осей.

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y;$$

$$m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z; \quad (1.2.17)$$

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x,$$

де  $m_x(\bar{F}), m_y(\bar{F}), m_z(\bar{F})$  – моменти сили  $\bar{F}$  відносно координатних осей;

$F_x, F_y, F_z$  – проєкції сили  $\bar{F}$  на координатні осі;

$x, y, z$  – координати точки прикладання сили  $\bar{F}$ .

Аналогічно моменти кількості руху відносно координатних осей можна визначити по формулам (1.2.17) при умові, що проєкції  $F_x, F_y, F_z$  ми замінюємо проєкціями вектора кількості руху на ті ж осі.

$$k_x = M_x(m\bar{V}) = ymV_z - zmV_y;$$

$$k_y = M_y(m\bar{V}) = zmV_x - xmV_z;$$

$$k_z = M_z(m\bar{V}) = xmV_y - ymV_x;$$

або

$$k_x = m(yV_z - zV_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y});$$

$$k_y = m(zV_x - xV_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad (1.2.18)$$

$$k_z = m(xV_y - yV_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Знайдемо для матеріальної точки замкненість між моментами векторів кількості руху  $m\bar{V}$  та сили  $\bar{F}$  відносно якогось нерухомого центра  $O$ , для чого продиференціюємо за часом вираз (1.2.16).

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{V}}{dt}\right). \quad (1.2.19)$$

Проаналізуємо вираз (1.2.19)

$$(\bar{r} \times m\bar{V}) = k_0;$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} = 0,$$

як векторний добуток двох паралельних векторів.

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{a}, \text{ а в свою чергу } m\bar{a} = \bar{F}.$$

З статички відомо, що  $\bar{r} \times \bar{F} = m_0(\bar{F})$ .

Остаточно вираз (1.2.19) приймає вид:

$$\frac{dk_0}{dt} = m_0(\bar{F}). \quad (1.2.20)$$

Вираз (1.2.20) представляє собою теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра О, яка формулюється наступним чином.

Похідна за часом від моменту кількості руху точки, відносно якогось нерухомого центра, дорівнює моменту діючої на точку сили відносно того ж центра.

Розглянемо матеріальну точку М масою  $m$ , яка рухається під дією сили  $\bar{F}$ .

Знайдемо для неї залежність між моментами векторів  $m\bar{V}$  та  $\bar{F}$  відносно якоїсь нерухомої осі  $z$ , для чого продиференціюємо за часом вираз:

$$k_z = M_z(m\bar{V}) = m(xV_y - yV_x);$$

$$\frac{d}{dt} [M_z(m\bar{V})] = m \frac{dx}{dt} V_y + mx \frac{dV_y}{dt} - m \frac{dy}{dt} V_x - my \frac{dV_x}{dt}. \quad (1.2.21)$$

Проаналізуємо ліву та праву частину виразу (1.2.21):

$$M_z(m\bar{V}) = k_z, \frac{dV_y}{dt} = a_y, \frac{dV_x}{dt} = a_x;$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \frac{dy}{dt} = a_y. \quad (1.2.22)$$

Підставимо вирази (1.2.22) в рівняння (1.2.23):

$$\frac{dk_z}{dt} = mV_x V_y + mxa_y - mV_x V_y - mya_x,$$

або

$$\frac{dk_z}{dt} = ma_y x - ma_x y. \quad (1.2.23)$$

В свою чергу  $ma_y = F_y$  та  $ma_x = F_x$ , тоді

$$\frac{dk_z}{dt} = xF_y - yF_x. \quad (1.2.24)$$

Враховуючи формули (1.2.17), праву частину виразу (1.2.24) можна записати наступним чином:

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x.$$

Тоді вираз (1.2.24) приймає вид:

$$\frac{dk_z}{dt} = m_z(\bar{F}). \quad (1.2.25)$$

В результаті ми довели теорему моментів відносно осі: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

Розглянемо закон збереження моменту кількості руху точки відносно центра і осі, його сутність полягає у двох окремих випадках:

1. Якщо  $m_0(\bar{F}) = 0$ , то  $\frac{dk_0}{dt} = 0 \Rightarrow k_0 = m_0(m\bar{V}) = const.$

Якщо момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно того ж центра залишається сталим (як величина, похідна від якої дорівнює нулю).

2. Якщо  $m_z(\bar{F}) = 0$ , то  $\frac{dk_z}{dt} = 0 \Rightarrow k_z = const.$

Якщо момент рівнодійної сили, яка діє на матеріальну точку, відносно будь-якої осі  $z$  дорівнює нулю, то момент кількості руху даної точки відносно цієї ж осі залишається сталим.

### 1.2.3. Робота. Потенціальна енергія

#### Потужність.

Для характеристики дії сили на тіло при деякому його переміщенні введемо поняття роботи сили.

Сили, які діють на тіло, можуть бути постійними та змінними, від цього залежить визначення роботи.

Розглянемо спочатку визначення роботи постійної сили.

Роботою  $A$  постійної за величиною і напрямом сили на прямолінійній ділянці шляху  $S$  називається добуток сили на переміщення та косинус кута між напрямом сили та переміщенням.

Робота постійної сили визначається за формулою:

$$A = FS\cos\varphi, \quad (1.2.26)$$

де  $F$  – величина сили;

$S$  – переміщення;

$\varphi$  – кут між напрямом сили  $\vec{F}$  і напрямом переміщення  $\vec{S}$ .

Робота буде додатною, якщо кут  $\varphi$  гострий, і від'ємною, якщо цей кут тупий. Якщо сила напрямлена перпендикулярно до переміщення, то робота дорівнює нулю.

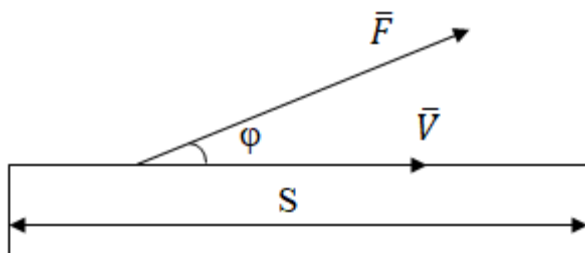


Рис. 1.2.3. Визначення роботи сили на прямолінійній ділянці шляху

Нехай модуль сили  $F$  є величина змінна і точка прикладення сили рухається по криволінійній траєкторії. У цьому випадку для визначення роботи на шляху  $S$  розіб'ємо цей шлях на велике число нескінченно малих переміщень  $dS$ .

Введемо поняття про елементарну роботу сили на нескінченно малому переміщенні  $dS$ .

Елементарною роботою  $dA$  сили  $\vec{F}$  називається скалярна величина, яка дорівнює добутку проекції сили на дотичну до траєкторії, спрямовану вбік переміщення точки на нескінченно малому переміщенні точки, спрямована вздовж цієї дотичної.

$$dA = F^{\tau}dS, \quad (1.2.27)$$

де  $F^{\tau}$  – проекція сили  $\vec{F}$  на дотичну до траєкторії, спрямована вбік переміщення точки.

$dS$  – нескінченно мале переміщення.

Якщо вважати, що  $F_\tau = F \cos \varphi$ , то вираз (1.2.27) можна записати у вигляді:

$$dA = F dS \cos \varphi. \quad (1.2.28)$$

Таким чином елементарна робота сили дорівнює добутку модуля сили  $F$  на елементарне переміщення  $dS$  та на косинус кута між напрямом сили і напрямом переміщення.

У аналітичній формі елементарна робота сили визначається за формулою:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.2.29)$$

Елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на елементарний приріст відповідних координат точки прикладення сили.

Перейдемо від поняття елементарної роботи сили до поняття роботи сили на кінцевому переміщенні.

Припустимо, що точка  $M$  перемістилась з положення  $M_1$  до положення  $M_2$  (рис. 1.2.4). Треба визначити роботу сили  $\vec{F}$  на цьому переміщенні: робота дорівнює інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж цього переміщення:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA. \quad (1.2.30)$$

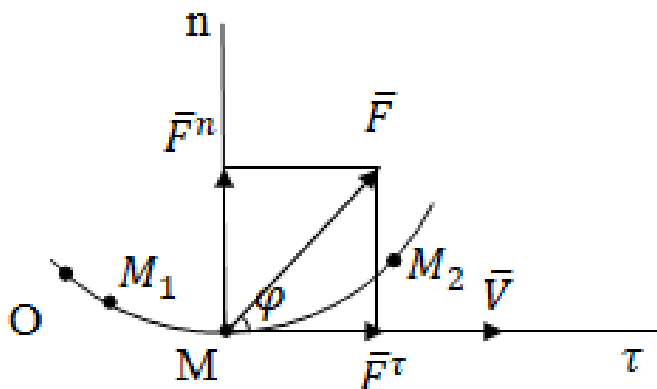


Рис. 1.2.4. Визначення роботи сили на кінцевому переміщенні  
роботи сили

З врахуванням виразу (1.2.28) формулу роботи сили на кінцевому переміщенні можна записати

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F dS \cos \varphi . \quad (1.2.31)$$

Або у аналітичній формі:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (1.2.32)$$

Розмірність роботи в системі СІ  $A = 1[\text{н}] \times 1[\text{м}] = 1[\text{Дж}]$ .

### **Потенціальна енергія.**

Частина простору, в кожній точці якого на матеріальну точку, вміщену в ньому, діє певна за величиною і напрямом сила, яка залежить лише від координат  $x, y, z$  точки, називається силовим полем.

Стационарне силове поле, називається потенціальним, якщо робота сили поля, що діє на матеріальну точку, вміщену в поле, не залежить від форми траєкторії точки, а залежить лише від координат початкового і кінцевого положення точки.

В потенціальному силовому полі існує така функція координат поля  $u(x, y, z)$ , частинні похідні якої по координатам дорівнюють проекціям сили поля на відповідні координатні осі, тобто:

$$F_x = \frac{du}{dx}; F_y = \frac{du}{dy}; F_z = \frac{du}{dz}. \quad (1.2.33)$$

Функція  $u$  називається силовою функцією (або потенціальною функцією, або потенціалом) даною потенціального силового поля.

Вираз елементарної роботи сили поля в цьому випадку буде:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = du . \quad (1.2.34)$$

Тобто елементарна робота сил поля є певним диференціалом силової функції  $u$ . Звідки одержуємо вираз роботи сили поля на кінцевому шляху точки її прикладення від  $M_0$  до  $M_1$ :

$$A = \int_{M_0}^{M_1} du = u_1 - u_0. \quad (1.2.35)$$

Отже, робота сили поля на деякому шляху дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій і початковій точках шляху і не залежить від форми або довжини траєкторії, по якій переміщується точка прикладення сили.

При вивченні руху матеріальної точки в силовому потенціальному полі дуже важливе значення має поняття потенціальної енергії.

Перебуваючи в потенціальному полі, матеріальна точка має потенціальну енергію  $\Pi$ , що дорівнює роботі, яку зробили б сили поля при переміщенні точки з даного положення  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в положення  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , яке прийнято за нульове.

$$\Pi = \int_{M_1}^{M_0} dA = \int_{M_1}^{M_0} du = u_0 - u_1. \quad (1.2.36)$$

Порівнюючи з визначенням силової функції  $u$ , одержуємо залежність між нею і потенціальною енергією  $\Pi$  точки:

$$\Pi(x, y, z) = -u(x, y, z). \quad (1.2.37)$$

Отже, робота сили потенціального поля на кінцевому шляху від  $M_0$  до  $M_1$ , подана через потенціальну енергію, буде дорівнювати:

$$A = \Pi_0 - \Pi_1. \quad (1.2.38)$$

де  $\Pi_0$  – потенціальна енергія в початковій точці;

$\Pi_1$  – потенціальна енергія в кінцевій точці шляху.

До потенціальних силових полів відносяться: поле сил ваги, поле сил пружності, електростатичне поле.

Робота сили ваги  $\bar{G}$  матеріальної точки дорівнює:

$$A = G(h_0 - h_1). \quad (1.2.39)$$

де  $(h_0 - h_1)$  – різниця висот початкового та кінцевого положень точки.

Робота сили пружності пружини визначається за формулою:

$$A = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2). \quad (1.2.40)$$



де  $c$  – жорсткість пружини;

$x_0$  – початкова деформація пружини;

$x_1$  – кінцева деформація пружини.

Відношення роботи корисних опорів  $A_{\text{кор}}$  до всієї затраченої роботи  $A_{\text{затр}}$  називається коефіцієнтом корисної дії:

$$r = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{затр}}}. \quad (1.2.41)$$

Потужність.

Потужність в даний момент вимірюється відношенням елементарної роботи до елементарного часу, протягом якого ця робота виконана:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (1.2.42)$$

Якщо потужність стала, то вона може бути виміряна роботою за будь-який проміжок часу, поділеною на цей проміжок часу:

$$N = \frac{A}{t}. \quad (1.2.43)$$

Якщо вважати, що елементарна робота сили визначається за формулою  $dA = F_{\tau} \times dS$ , то вираз (1.2.42) приймає вид:

$$N = \frac{F_{\tau} \times dS}{dt} = F_{\tau} \cdot V. \quad (1.2.44)$$

Визначимо розмірність потужності:

Система СІ:  $N = \frac{1[\text{Дж}]}{1[\text{с}]} = 1[\text{Вт}], 1[\text{кВт}] = 1000[\text{Вт}].$

Система МкГС:  $N = \frac{1[\text{кГм}]}{1[\text{с}]} = 1 \frac{[\text{кГм}]}{[\text{с}]}, 1[\text{к. с.}] = 75 \frac{[\text{кГм}]}{\text{с}}, 1[\text{кВт}] = 1,36 [\text{к. с.}].$

Розглянемо приклад.

Автомобіль вагою  $Q$  рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці шляху з прискоренням  $a$ . Опір, що його перемагає під час руху автомобіля, приймається сталим і дорівнює  $R$ . Визначити потужність, яку розвинув автомобіль в момент  $t$ , якщо в початковий момент  $t_0$  швидкість автомобіля дорівнювала  $V_0$ .

Розв'язання. Для визначення потужності автомобіля в заданий момент скористуємося формулою:

$$N = F_t \cdot V,$$

де  $F_t$  – величина тягової сили автомобіля;

$V$  – швидкість автомобіля в момент  $t$ .

Цю швидкість знайдемо, враховуючи, що автомобіль рухається зі сталим прискоренням, тобто рівноприскорено, за формулою:

$$V = V_0 + at.$$

Визначимо тепер тягову силу автомобіля.

Для цього, приймаючи автомобіль за матеріальну точку, напишемо рівняння його руху, враховуючи, що на автомобіль діє тягова сила  $\bar{F}_t$ , яка напрямлена по руху, і сила опору  $\bar{R}$ , напрямлена проти руху.

Рівняння в проекції на лінію руху матиме такий вигляд:

$$ma = F - R.$$

Звідси:

$$F_t = ma + R.$$

З отриманого рівняння видно, що тягова сила складається з двох частин: одна частина йде на надання автомобілю прискорення, а друга на подолання опору його рухові.

Знаходимо потужність автомобіля в момент часу  $t$ .

$$N = (ma + R)V = \left(\frac{Q}{g}a + R\right) \cdot (V_0 + at) = \frac{Q \cdot a V_0}{g} + \frac{Q \cdot a^2 t}{g} + V_0 R + aRt.$$

#### **1.2.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки**

Кінетичною енергією рухомої матеріальної точки називається скалярна величина, що дорівнює добутку маси рухомої точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \quad (1.2.45)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії може бути сформульована в диференціальній або в кінцевій формі.

В диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі всіх сил, прикладених до точки.

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA. \quad (1.2.46)$$

Припустимо, що в момент часу  $t_0$  швидкість точки дорівнювала  $V_0$ , а в момент часу  $t_1$  –  $V_1$ , і візьмемо інтеграл у відповідних границях:

$$\int_{V_0}^{V_1} mVdV = \int_{M_0}^{M_1} dA. \quad (1.2.47)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (1.2.48)$$

Рівняння (1.2.48) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії точки в кінцевій формі, яка формулюється наступним чином: зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.

Розмірність кінематичної енергії в системі одиниць СІ:

$$\left[\frac{mV^2}{2}\right] = 1[\text{кг}] \times 1\left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\right] = 1\frac{[\text{кг} \times \text{м}^2]}{[\text{с}^2]} = 1\frac{[\text{кг} \times \text{м}]}{[\text{с}^2]} [\text{м}] = 1[\text{Дж}].$$

Тобто розмірність кінетичної енергії співпадає з розмірністю роботи.

При русі матеріальної точки під дією сил потенціального силового поля сума кінематичної і потенціальної енергії, тобто певна механічна енергія  $E$  точки залишається сталою:

$$E = T + \Pi(x, y, z) = \text{const}. \quad (1.2.49)$$

Це є закон збереження механічної енергії.

Розглянемо приклад.

Колісний трактор вагою 30,12 кН йде по оранці з швидкістю 1,33 м/с. Після виключення муфти зчеплення він зупинився, пройшовши шлях 1,13 м. Визначити силу опору рухові трактора.

Розв'язання.

Оскільки рух трактора поступальний, розглядаємо трактор як матеріальну точку  $M$ , зосередивши всю його масу в центрі ваги.

На точку  $M$ , що рухається по площині, діє сила ваги  $\bar{P}$ , нормальна реакція  $\bar{N}$  і сила опору рухові трактора  $\bar{R}$  (рис 1.2.5).

Скористуємося для розв'язання теоремою про зміну кінематичної енергії точки:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (1.2.50)$$

Оскільки сила опору  $\bar{R}$  напрямлена проти руху трактора, то робота її на вказаному шляху від'ємна.

Сили  $\bar{P}$  і  $\bar{N}$  перпендикулярні напрямку руху, тому роботи не виконують.

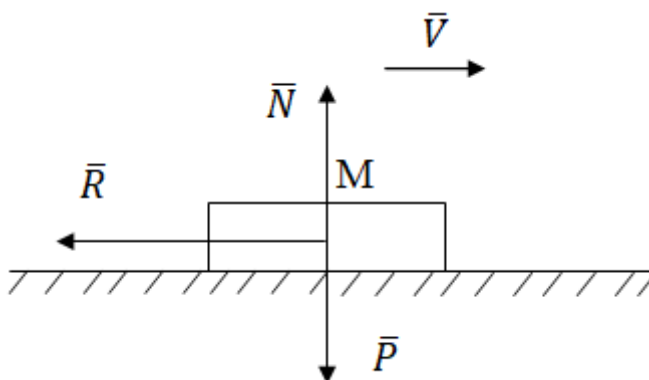


Рис 1.2.5. Схема сил, діючих на трактор

Таким чином, робота сил, діючих на трактор на шляху  $S$ , визначається виразом:

$$A = -RS. \quad (1.2.51)$$

Швидкість трактора в кінці руху дорівнює нулю  $V = 0$ . Тому рівняння (1.2.50) приймає вигляд:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -RS. \quad (1.2.52)$$

Враховуючи, що  $m = \frac{P}{g}$  і підставляючи це значення в рівняння (1.2.52), розв'яжемо його відносно R:

$$R = \frac{\frac{P}{g} \frac{V_0^2}{2}}{S} = \frac{PV_0^2}{2gS} = \frac{30,12 \cdot 1,33^2}{9,81 \cdot 2 \cdot 1,13} = 2,4 \text{ кН.}$$

## Розділ III.

### ДИНАМІКА НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### 1.3.1. Формулювання першої і другої задачі динаміки для невіЛЬНОЇ матеріальної точки

Основний закон динаміки для невіЛЬНОЇ матеріальної точки, а також і її диференціальні рівняння мають такий же вигляд, як і для вільної точки, тільки до діючих на точку сил додаються сили реакції в'язей. У цьому випадку руху точки можливе виникнення проблем при розв'язанні першої і другої задач динаміки, тому що сили реакції в'язей наперед невідомі і їх необхідно додатково визначити по заданим в'язям, накладеним на рухому матеріальну точку.

При розв'язанні першої задачі динаміки діюча на точку рівнодіюча сила визначається із диференціальних рівнянь її руху. Потім з цієї рівнодіючої сили згідно заданих в'язей відокремлюють силу реакції в'язей. Таким чином, отримаємо задачу про розкладання відомої сили на її складові.

Повну силу реакції точки при її русі звичайно розкладають на дві складові – статичну та динамічну.

Складова сили реакції в'язей, яка урівноважує діючі на точку сили, називається статичною реакцією.

Друга складова повної сили реакції, яка залежить тільки від руху точки під дією заданих сил, називається динамічною реакцією. Вона урівноважує силу інерції точки, що рухається.

При розв'язанні другої задачі динаміки, коли сили та початкові умови відомі, а необхідно визначити закон руху невіЛЬНОЇ матеріальної точки, частина сил, діючих на точку, а саме сили реакції в'язей, наперед не відомі і їх необхідно визначити по заданим в'язям в процесі розв'язання задачі.

Таким чином, другу задачу динаміки невіЛЬНОЇ матеріальної точки можна сформулювати наступним чином: по наперед відомим силам, початковим умовам та в'язям, накладеним на точку, визначити закон руху цієї точки та сили реакції в'язей.

### 1.3.2. Невільний рух точки по гладенькій поверхні

Нехай гладенька нерухома поверхня, по якій рухається точка масою  $m$  під дією заданої сили  $\vec{F}$ , задається рівнянням

$$f(x, y, z) = 0,$$

де  $x, y, z$  – координати точки, що рухається.

Рівняння  $f(x, y, z) = 0$  називається рівнянням в'язі. Весь час руху координати точки повинні задовольняти цьому рівнянню. При розгляді руху невольної точки необхідно прийняти до уваги дію реакції поверхні.

Враховуючи той факт, що поверхня, по якій рухається точка, є гладенькою – сила тертя відсутня. Позначимо через  $\vec{N}$  невідому нормальну силу реакції поверхні. Таким чином, на точку  $M$  діє відома сила  $\vec{F}$  та невідома реакція в'язі  $\vec{N}$  (рис. 1.3.1).

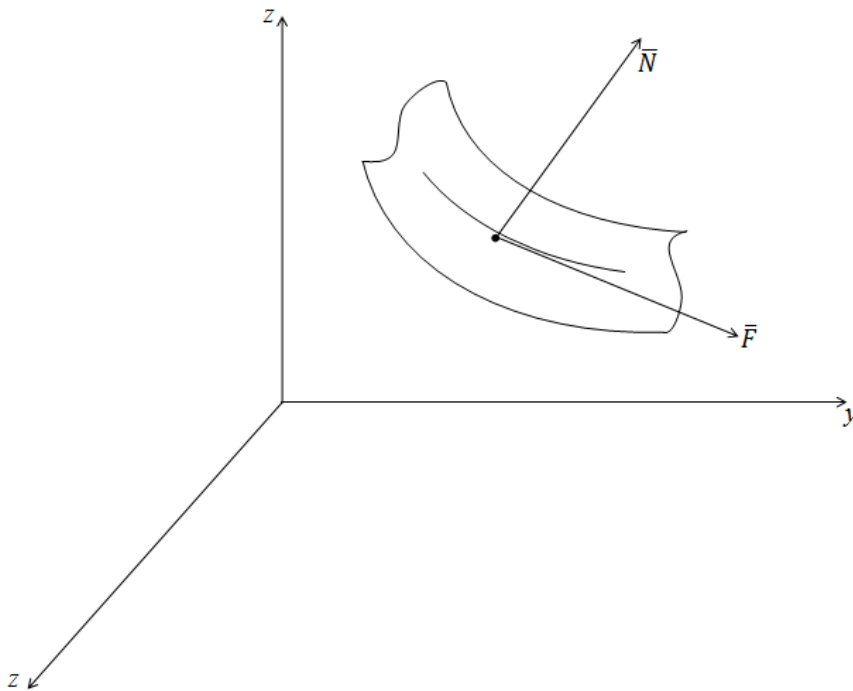


Рис. 1.3.1. Невільний рух точки по гладенькій поверхні

На підставі другого закону Ньютона будемо мати рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}. \quad (1.3.1)$$

Спроеціюємо ліву та праву частини векторного рівняння 1.3.1 на нерухомі осі декартових координат, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x + N_x, \\ ma_y &= F_y + N_y, \\ ma_z &= F_z + N_z, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

де  $F_x, F_y, F_z$  – проєкції сили  $\bar{F}$  на координатні осі;

$N_x, N_y, N_z$  – проєкції нормальної реакції  $\bar{N}$  на координатні осі;

$a_x, a_y, a_z$  – проєкції прискорення точки  $M$  на координатні осі.

Враховуючи, що  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$  та  $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$  рівняння (1.3.2) приймають вид:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N_x, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N_z. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Проєкції нормальної реакції можна визначити за формулами:

$$\begin{aligned} N_x &= N \cdot \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{i}}), \\ N_y &= N \cdot \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{j}}), \\ N_z &= N \cdot \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{k}}), \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

де  $\cos(\widehat{\bar{N}, \bar{i}}), \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{j}}), \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{k}})$  – напрямні косинуси.

Для визначення напрямних косинусів нормалі даної поверхні  $f(x, y, z) = 0$  використовуємо  $\Delta f$  – диференціальний параметр функції  $f$ :

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.3.5)$$

Тоді напрямні косинуси визначаються з виразів:



$$\cos(\widehat{N, \bar{i}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \quad \cos(\widehat{N, \bar{j}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \quad \cos(\widehat{N, \bar{k}}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

або

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{N, \bar{i}}) &= \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \cos(\widehat{N, \bar{j}}) &= \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \cos(\widehat{N, \bar{k}}) &= \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Тоді проекції нормальної реакції на координатні осі будуть визначатися:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ N_y &= \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ N_z &= \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Підставимо ці значення проекцій нормальної реакції у диференціальні рівняння (1.3.3), отримаємо наступні диференціальні рівняння:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \tag{1.3.8}$$

Позначаючи відношення  $\frac{N}{\Delta f}$  через  $\lambda$  (множник Лагранжа), одержимо рівняння, які називаються рівняннями Лагранжа I роду:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \tag{1.3.9}$$

Приєднуючи до цих рівнянь рівняння поверхні  $f(x, y, z)$ , одержуємо чотири рівняння, з яких можна визначити координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки як функції часу, а також нормальну реакцію  $N$ . Сталі інтегрування визначаються за допомогою початкових умов, які задаються.

### 1.3.3. Невільний рух точки по шорсткій поверхні

Якщо поверхня шорстка, то в цьому випадку невільна матеріальна точка буде знаходитись під дією трьох сил: заданої сили  $\bar{F}$ , нормальної сили реакції  $\bar{N}$  та сили тертя  $F_{\text{тр}}$ .

Диференціальні рівняння руху будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + N_x + F_x^{\text{тр}}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + N_y + F_y^{\text{тр}}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + N_z + F_z^{\text{тр}}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Проекції сили тертя на координатні осі можна уявити у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} F_x^{\text{тр}} &= F^{\text{тр}} \cdot \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{i}}), \\ F_y^{\text{тр}} &= F^{\text{тр}} \cdot \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{j}}), \\ F_z^{\text{тр}} &= F^{\text{тр}} \cdot \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{k}}). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Враховуючи, що сила тертя спрямована в бік, протилежний швидкості точки, то напрямні косинуси  $\bar{F}^{\text{тр}}$  та  $\bar{v}$  відрізняються тільки знаком:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{i}}) &= -\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}), \\ \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{тр}}, \bar{j}}) &= -\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}), \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

$$\cos(\widehat{\bar{F}^{\text{TP}}, k}) = -\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}).$$

В свою чергу косинуси швидкості дорівнюють:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}) &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}) &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}) &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}\tag{1.3.13}$$

Як відомо:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

Підставимо вирази (1.3.14) в формули (1.3.13) і отримаємо:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}) &= \frac{1}{v} \cdot \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{1.3.15}$$

Тоді з урахуванням виразів (1.3.15) напрямні косинуси сили тертя  $\bar{F}^{\text{TP}}$  приймають вид:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\bar{F}^{\text{TP}}, \bar{i}}) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{TP}}, \bar{j}}) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \cos(\widehat{\bar{F}^{\text{TP}}, \bar{k}}) &= -\frac{1}{v} \cdot \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{1.3.16}$$

Підставимо значення напрямних косинусів сили тертя у вирази (1.3.11) і отримаємо формули для визначення проєкцій сили тертя на координатні осі:

$$\begin{aligned}
F_x^{mp} &= -\frac{F^{mp}}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\
F_y^{mp} &= -\frac{F^{mp}}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\
F_z^{mp} &= -\frac{F^{mp}}{v} \cdot \frac{dz}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.3.17}$$

На підставі рівнянь (1.3.11) та виразів для визначення проєкцій сил тертя (1.3.17), а також залежностей для визначення проєкції нормальної реакції на координатні осі (1.3.8) отримаємо систему диференціальних рівнянь руху невільної точки по шорсткій поверхні у вигляді

$$\left. \begin{aligned}
m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{F_{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dx}{dt}, \\
m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F_{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dy}{dt}, \\
m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \frac{N}{\Delta f} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F_{\text{тр}}}{v} \cdot \frac{dz}{dt}.
\end{aligned} \right\}
\tag{1.3.18}$$

Приєднуючи до цих трьох рівнянь рівняння поверхні  $f(x, y, z) = 0$ , а також рівняння закону Кулона  $F^{mp} = f \cdot N$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя, отримаємо п'ять рівнянь, з яких можна визначити всі п'ять невідомих величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $N$  і  $F^{\text{тр}}$ .

Розглянемо наступний приклад.

По шорсткій похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha = 30^\circ$ , спускається важке тіло без початкової швидкості.

Треба визначити, протягом якого часу  $t$  тіло пройде шлях довжиною  $S = 39,2$  м, якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,2$ .

Розв'язання. Вважаємо тіло матеріальною точкою. Вибираємо початок координат в початковому положенні точки і спрямовуємо вісь вздовж похилої площини в напрямі руху тіла, а вісь  $y$  – по нормалі до цієї площини. Рух тіла буде невільний, оскільки похила площина є його в'язю.

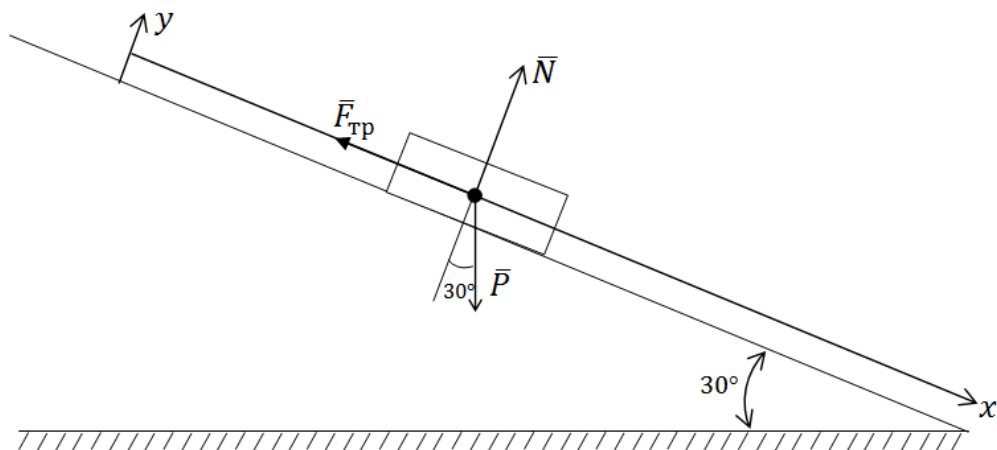


Рис. 1.3.2. Схема сил, діючих на невільну матеріальну точку при її русі по шорсткій поверхні

На тіло діють постійні за величиною і напрямом сили: сила ваги  $\bar{P}$  і сила реакції площини, яка складається з двох складових: нормальної до площини реакції  $\bar{N}$  і сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , яка напрямлена по дотичній в бік, протилежний рухові (1.3.2).

Таким чином, диференціальні рівняння руху тіла будуть:

$$m\ddot{x} = P \cdot \cos 60^\circ - F_{\text{тр}}; \quad (1.3.19)$$

$$m\ddot{y} = N - P \cdot \cos 30^\circ. \quad (1.3.20)$$

Оскільки при русі тіла  $y = \text{const}$ , то  $\ddot{y} = 0$ , а тому з рівняння (1.3.20) знаходимо, що  $N = P \cdot \cos 30^\circ$ . Сила тертя дорівнює  $F_{\text{тр}} = f \cdot N = f \cdot P \cdot \cos 30^\circ$ . Підставляючи вираз сили тертя в рівняння (1.3.19) і скорочуючи всі його члени на  $m$  (враховуючи, що  $P = mg$ ), матимемо:

$$\ddot{x} = g \cdot \cos 60^\circ - f \cdot g \cdot \cos 30^\circ. \quad (1.3.21)$$

Відокремимо зміни, для чого ліву і праву частину рівняння (1.3.21) помножимо на  $dt$ .

$$dV_x = g \cdot \cos 60^\circ \cdot dt - f \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot dt. \quad (1.3.22)$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння (1.3.22)

$$\int dV_x = g \cdot \cos 60^\circ \cdot \int dt - f \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot \int dt. \quad (1.3.23)$$

В результаті дістанемо:

$$V_x = g \cdot \cos 60^\circ \cdot t - f \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot t,$$

або

$$V_x = g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot t + C_1. \quad (1.3.24)$$

Відокремимо змінні і інтегруємо ще один раз:

$$\begin{aligned} dx &= g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot t \cdot dt + C_1 \cdot dt; \\ \int dx &= g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot \int t \cdot dt + C_1 \cdot \int dt; \\ x &= g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  використовуємо початкові умови. Початкові умови такі:

$$\text{при } t_0 = 0 \begin{cases} V_{0x} = 0; \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи значення  $t_0 = 0$  і  $V_{0x} = 0$  в рівняння (1.3.24), знаходимо, що  $C_1 = 0$ . Підставляючи значення  $t_0 = 0$  і  $x_0 = 0$  в рівняння (1.3.25), маємо  $C_2 = 0$ .

Таким чином, остаточне рівняння руху тіла буде таким:

$$x = g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (1.3.26)$$

Щоб знайти час руху тіла, розв'язуємо це рівняння відносно  $t$ :

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g \cdot (\cos 60^\circ - f \cdot \cos 30^\circ)}}. \quad (1.3.27)$$

Знаючи, що  $x = 39,2$  м;  $f = 0,2$ ;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>, знаходимо:  $t = 5$  с.

#### 1.3.4. Рух невільної точки по гладенькій кривій лінії

Розглянемо рух матеріальної точки  $M$  вздовж заданої плоскої нерухомої лінії. Нехай рівняння цієї плоскої лінії буде  $f(x, y, z) = 0$ . На точку  $M$  діють відома сила  $\vec{F}$ , яка розташована в одній площині з

лінією, а також реакція в'язі  $\bar{N}$ , яка напрямлена по нормалі до даної лінії (рисунок 1.3.3).

Диференціальні рівняння руху точки будуть мати наступний вигляд:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x + N \cdot \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{i}}), \quad (1.3.28)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y + N \cdot \cos(\widehat{\bar{N}, \bar{j}}),$$

або

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (1.3.29)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

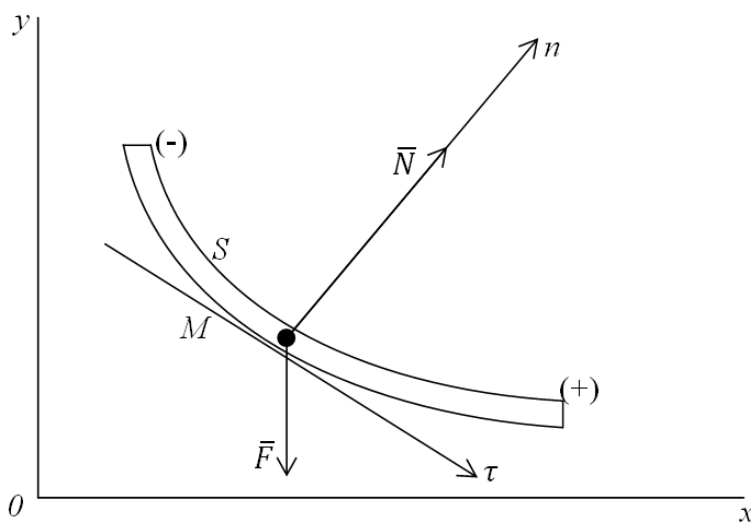


Рис.1.3.3. Схема сил, діючих на невільну матеріальну точку при її русі по гладенькій поверхні

З цих двох рівнянь, до яких треба ще додати рівняння в'язі  $f(x, y, z) = 0$ , можна визначити  $x$ ,  $y$  та  $\lambda$  як функції часу  $t$ , а значить визначити закон руху точки  $M$  і реакцію в'язі  $N$ .

Під час дослідження руху точки по заданій плоскій лінії зручніше проектування векторне рівняння  $m\bar{a} = \bar{F} + \bar{N}$  на

натуральні осі координат. В цьому випадку ми отримаємо два рівняння

$$\begin{aligned} m\bar{a}^\tau &= \bar{F}^\tau, \\ m\bar{a}^n &= \bar{F}^n + \bar{N}. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

де  $F^\tau$  – проєкція сили  $\bar{F}$  на дотичну ось;

$F^n$  – проєкція сили  $\bar{F}$  на головну нормаль.

Як відомо з кінематики, проєкції прискорення на дотичну вісь та головну нормаль визначаються з формул

$$a^\tau = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad a^n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.3.31)$$

Підставляючи ці формули у попередні рівняння, отримаємо диференціальні рівняння руху невільної точки у натуральній формі:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2s}{dt^2} &= F^\tau, \\ \frac{mV^2}{\rho} &= F^n + N. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.32)$$

Інтегруємо перше рівняння і знаходимо закон руху точки  $M$  вздовж заданої лінії та її швидкість. З другого рівняння визначаємо реакцію  $N$ .

Розглянемо приклад.

Точка  $M$ , маса якої  $m$ , рухається під дією сили тяжіння по гладенькій внутрішній поверхні жолоба. Поверхня жолоба являє собою частину бокової поверхні циліндра радіусом  $r$ . У початковий момент часу точка знаходиться в положенні  $M_0$ , а її швидкість дорівнює нулю.

Визначити швидкість  $V$  точки  $M$  і реакцію  $N$  поверхні жолоба в положенні, коли центральний кут  $\angle M_0OM = 60^\circ$ .

Розв'язок. Зобразимо точку  $M$  у довільному положенні на траєкторії, якою є внутрішня поверхня жолоба. Положення точки  $M$  визначається кутом  $\varphi = \angle M_0OM$ .



Покажемо сили, які діють на точку  $M$ :  $\bar{P}$  – сила тяжіння точки,  $\bar{N}$  – реакція внутрішньої поверхні жолоба, яка спрямована по радіусу до центра кривини  $O$ .

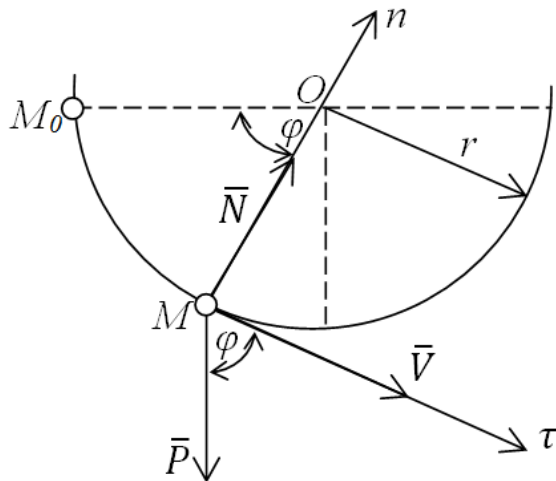


Рис. 1.3.4. Рух точки по внутрішній поверхні жолоба

Оскільки траєкторія точки відома (дуга з радіусом  $r$ ), то зв'яжемо з точкою  $M$  натуральну систему координат  $Mt$ .

Рівняння руху точки  $M$  у вертикальній формі має вигляд:

$$ma = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{N}. \quad (1.3.33)$$

Спроеціюємо векторне рівняння (1) на натуральні осі координат  $Mt$ .

$$ma^\tau = P \cdot \cos\varphi, \quad (1.3.34)$$

$$ma^n = N - P \cdot \sin\varphi.$$

Сила тяжіння  $\bar{P}$  визначається з формули  $P = mg$ . Підставимо цю формулу в праву частину рівняння (1.3.34), в результаті чого отримаємо

$$ma^\tau = mg \cdot \cos\varphi, \quad (1.3.35)$$

$$ma^n = N - mg \cdot \sin\varphi.$$

Розділимо ліву і праву частину першого з рівнянь (1.3.35) на  $m$

$$a^\tau = g \cdot \cos\varphi, \quad (1.3.36)$$

$$ma^n = N - mg \cdot \sin\varphi.$$

Дотичне прискорення визначається з формули  $a^t = \frac{dV}{dt}$ . Після підстановки цієї формули в ліву частину першого з рівнянь (1.3.36) рівняння приймають вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot \cos\varphi, \quad (1.3.37)$$

$$ma^n = N - mg \cdot \sin\varphi.$$

В свою чергу нормальне прискорення визначається з формули  $a^n = \frac{mV^2}{\rho}$  і після підстановки його значення у ліву частину другого рівняння (1.3.37) ми отримаємо:

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot \cos\varphi, \quad (1.3.38)$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = N - mg \cdot \sin\varphi.$$

У рівняннях (1.3.38) три змінні величини  $V$ ,  $t$ ,  $\varphi$ . При розв'язуванні цих рівнянь необхідно одну зі змінних виразити через інші. Оскільки в умові задачі не вказаний час руху точки, а задається кут зміни положення точки, то виразимо в першому рівнянні залежностей (1.3.38) змінну  $t$  через змінну  $\varphi$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega = g \cdot \cos\varphi.$$

Враховуючи, що  $\omega = \frac{V}{r}$ , отримаємо:

$$\frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{V}{r} = g \cdot \cos\varphi. \quad (1.3.39)$$

Помножимо ліву і праву частину рівняння (1.3.39) на  $r \cdot d\varphi$ .

$$V \cdot dV = g \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi. \quad (1.3.40)$$

Проінтегруємо ліву і праву частину рівняння (1.3.40)

$$\int V \cdot dV = g \cdot r \cdot \int \cos\varphi \cdot d\varphi.$$

$$\frac{V^2}{r} = g \cdot r \cdot \sin\varphi + C. \quad (1.3.41)$$

де  $C$  – стала інтегрування.

Для визначення сталої інтегрування використовуємо початкові умови, а саме:

$$\text{при } t = 0 \quad \begin{cases} V_0 = 0; \\ \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Після підстановки початкових умов у рівняння (1.3.41) отримаємо, що  $C = 0$ .

З рівняння 1.3.41 знаходимо закон зміни швидкості матеріальної точки:

$$V = \sqrt{2g \cdot r \cdot \sin\varphi}. \quad (1.3.42)$$

В положенні, коли  $\varphi = 60^\circ$ , швидкість точки  $M$  дорівнює:

$$V = \sqrt{2g \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{3}} = 4,1\sqrt{r}. \quad (1.3.42)$$

Після визначення швидкості точки  $M$  з другого рівняння залежностей (1.3.38) знаходимо нормальну реакцію внутрішньої поверхні циліндра:

$$N = \frac{mV^2}{r} + mg \cdot \sin\varphi = m \left( \frac{V^2}{r} + g \cdot \sin\varphi \right).$$

При  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  та  $\frac{V^2}{r} = g\sqrt{3}$ , одержимо:

$$N = m \left( g\sqrt{3} + g \frac{\sqrt{3}}{r} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{r} mg = 25,5m. \quad (1.3.43)$$

### 1.3.5. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки

Розглянемо рух невільної матеріальної точки на яку діють відома сила  $\vec{F}$  та реакція в'язі  $\vec{N}$ .

Додамо геометрично сили  $\vec{F}$  та  $\vec{N}$ , в результаті отримаємо рівнодійну  $\vec{R}$  (рис. 1.3.5).

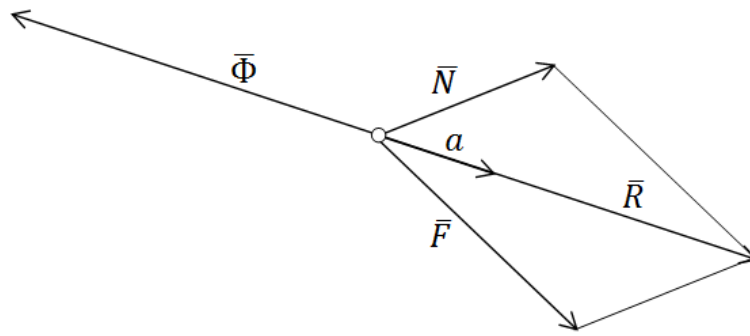


Рис. 1.3.5. Визначення вектору сили інерції

Уявимо собі тепер, що ми приклали у даний момент до точки  $M$  ще силу, яка має той же модуль, що сила  $R$ , тобто  $ta$  і напрямлена в протилежний бік. Це і є сила інерції.

Сила інерції матеріальної точки за величиною дорівнює добуткові маси точки на величину її прискорення і напрямлена протилежно векторові прискорення точки, тобто:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}, \quad (1.3.43)$$

де  $\bar{\Phi}$  – сила інерції.

Сили  $\bar{R}$  і  $\bar{\Phi}$ , які рівні за модулем і напрямлені протилежно зрівноважуються, тобто:

$$\bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (1.3.44)$$

У той же час

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}. \quad (1.3.45)$$

Якщо підставити векторне рівняння (1.3.45) в векторне рівняння (1.3.44), то отримаємо наступне:

$$\bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \quad (1.3.46)$$

Це векторне рівняння виражає принцип Д'Аламбера для матеріальної точки, який можна сформулювати наступним чином: при русі матеріальної точки активні сили і реакції в'язей, діючи на точку, а також сила інерції матеріальної точки, якщо умовно прикласти до самої точки, являють формально зрівноважену систему сил.

Слід мати на увазі, що в дійсності рівновага сил при русі точки (крім прямолінійного і рівномірного рухів) не існує. Сили, що входять в рівняння принципу Д'Аламбера, прикладені до різних тіл: сили  $\bar{F}$  та  $\bar{N}$  до рухомої точки, а сила інерції  $\bar{\Phi}$  є геометричною сумою (головним вектором) сил, що прикладені частково до тіл, які своєю активною дією викликають прискорення точки, а частково прикладені до в'язей точки.

Тому рівняння принципу Д'Аламбера є формальним рівнянням, яке подає задачу руху як задачу рівноваги (статики), що буває зручно при розв'язуванні задач.

Розглянемо наступний приклад.

Кривошип ОА соломотряса зернозбирального комбайна обертається з кутовою швидкістю 16 рад/с. Визначити, при якому найменшому значенні кута  $\varphi$  частки хлібної маси будуть відриватися від соломотряса АВ, якщо  $OA = BC = 0,05$  м та  $AB = OC$  (рис. 1.3.6).

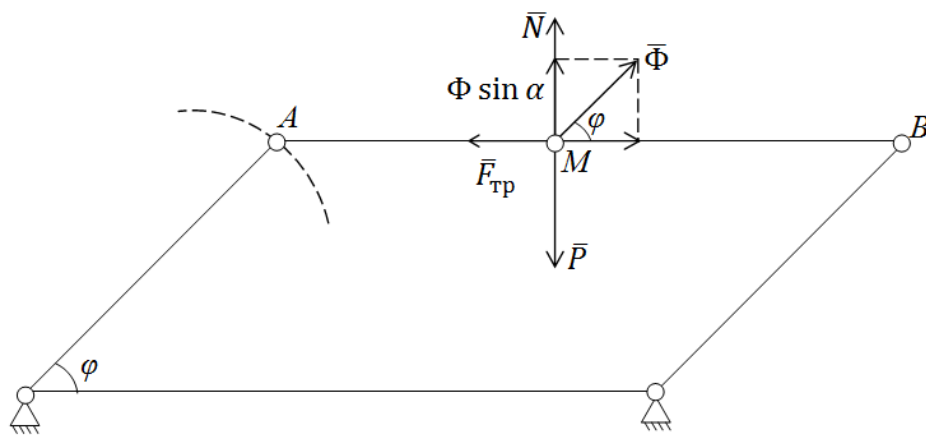


Рис. 1.3.6. Схема сил, діючих на частки хлібної маси

Розв'язання. Розглянемо рух однієї частки хлібної маси, як матеріальну точку М. На дану точку в будь-який момент діють наступні сили:  $\bar{P}$  – сила ваги,  $\bar{N}$  – нормальна реакція,  $\bar{F}_{тр}$  – сила тертя. Приєднуємо до даних сил, згідно принципу Д'Аламбера, силу інерції. Оскільки рух ланки АВ поступальний, то прискорення всіх її точок будуть однакові і дорівнюватимуть прискоренню точки А

кривошипа. Точка А рухається по колу з сталою швидкістю, тому її прискорення – це нормальне прискорення, величина якого  $a^n = r\omega^2$ . Тому сила інерції матеріальної точки хлібної маси дорівнює нормальній складовій сили інерції  $\Phi = mr\omega^2$ .

Підкидання матеріальної точки можливе при умові, якщо нормальна складова сили інерції буде більше сили ваги або дорівнювати їй. Для цього повинна бути справедливою умова:

$$\Phi \sin \varphi \geq P$$

або

$$mr\omega^2 \sin \varphi \geq mg.$$

Звідси

$$\sin \varphi \geq \frac{g}{r\omega^2} \approx 0,707.$$

Отже,  $\varphi \geq 45^\circ$ . Найменший кут  $\varphi = 45^\circ$ .

## Розділ IV.

# ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### 1.4.1. Вступ

Основний закон динаміки  $m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  справедливий тільки в інерціальних системах відліку.

Інерціальною (нерухомою) системою називається така система відліку, для якої справедливий перший закон динаміки – принципи інерції.

Але є багато систем, у яких не стверджується перший закон динаміки, проте закон руху матеріальної точки необхідно шукати в цих неінерціальних системах. До неінерціальних систем відліку відносяться і поверхня землі.

Розв'язання численних задач техніки потребує дослідження об'єктів відносно рухомої системи координат, наприклад, це стосується теорії складного руху точки.

### 1.4.2. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

Нехай рухома система  $O, x, y, z$  здійснює відомий нам рух відносно нерухомої системи відліку  $O_1, x_1, y_1, z_1$ .

В свою чергу точка  $M$  масою  $m$  рухається відносно рухомої системи відліку  $O, x, y$  під дією системи сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$ , рівнодіюча якої  $\bar{F} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ . Визначити рівняння руху матеріальної точки відносно рухомої системи відліку, якщо на точку діють відомі сили.

Для розв'язання цієї задачі необхідно скласти диференціальне рівняння відносного руху точки  $M$ .

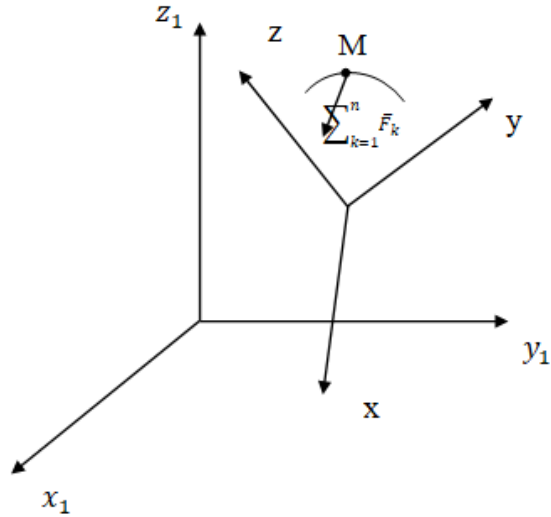


Рис 1.4.1. Схема відносного руху матеріальної точки

Згідно основного закону динаміки вільної матеріальної точки для абсолютного руху:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (1.4.1)$$

де  $m$  – маса точки;

$\bar{a}$  – абсолютне прискорення точки;

$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  – геометрична сума прикладених сил.

З теореми про додавання прискорень (теореми Коріоліса) відомо що:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \quad (1.4.2)$$

де  $\bar{a}_r$  – відносне прискорення;

$\bar{a}_e$  – переносне прискорення;

$\bar{a}_k$  – коріолісове прискорення.

Підставимо значення  $\bar{a}$  у рівняння основного закону динаміки, в результаті отримаємо:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

або

$$m\bar{a}_r + m\bar{a}_e + m\bar{a}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.4.3)$$



Перенесемо в ліву частину  $m\bar{a}_e$  та  $m\bar{a}_k$ .

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k - m\bar{a}_e - m\bar{a}_k. \quad (1.4.2)$$

Позначимо:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e \text{ та } \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k. \quad (1.4.5)$$

Підставимо позначення (1.4.5) в рівняння (1.4.4)

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (1.4.6)$$

де  $\bar{\Phi}_e$  – переносна сила інерції матеріальної точки;

$\bar{\Phi}_k$  – коріолісова сила інерції матеріальної точки.

З виразів (1.4.5) видно, що переносна сила інерції та коріолісова сила інерції спрямовані в протилежний бік переносного та коріолісового прискорення.

Вектори переносної  $\bar{\Phi}_e$  і коріолісової  $\bar{\Phi}_k$  сил інерції – це поправки на неінерціальність рухомої системи координат.

Ці сили фіктивні, оскільки вони не є силами взаємодії між тілами.

Вираз (1.4.6) є основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки.

Спроеціюємо вектори рівняння (1.4.6) на рухомі осі координат

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Рівняння (1.4.7) є диференціальними рівняннями відносного руху матеріальної точки. Як видно з цих рівнянь вони записуються аналогічно диференціальним рівнянням абсолютного руху матеріальної точки, але в правій частині рівнянь до активних сил треба додати силу інерції переносного руху і силу інерції Коріоліса.

Якщо переносний рух є обертальним рухом, то переносне прискорення дорівнює:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n,$$

де  $\bar{a}_e^\tau$  – дотичне прискорення точки М у переносному русі;

$\bar{a}_e^n$  – нормальне прискорення точки М у переносному русі.

Тоді:

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n. \quad (1.4.8)$$

З врахуванням рівності (1.4.8) рівняння (1.4.6) набуває вид

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e^\tau + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_k, \quad (1.4.9)$$

Для невільної матеріальної точки основне рівняння відносного руху має вид:

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k, \quad (1.4.10)$$

де  $\bar{R}$  – рівнодіюча реакцій в'язей.

Модулі переносної та коріолісової сили інерції визначаються за формулами:

$$|\Phi_e| = ma_e; \quad (1.4.11)$$

$$|\Phi_k| = ma_k. \quad (1.4.12)$$

В свою чергу прискорення Коріоліса визначається виразом:

$$a_k = 2\omega_e \bar{V}_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r). \quad (1.4.13)$$

Тоді з врахуванням виразу (1.4.13) сила інерції Коріоліса дорівнює:

$$|\Phi_k| = 2m\omega_e V_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r). \quad (1.4.14)$$

Модуль сили інерції Коріоліса буде дорівнювати нулю у випадках коли:

- переносний рух є поступальним;
- відносний рух напрямлений паралельно осі переносного обертання, або у даний момент часу вектор  $\bar{V}_r$  паралельний цієї осі;
- відносна швидкість у даний момент часу дорівнює нулю.

Розглянемо наступний приклад.

Прямий стержень обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega_e = 2 \text{ c}^{-1}$  навколо вертикальної осі і нахилений до неї під кутом  $\alpha = 45^\circ$ . Одна з крайніх точок стержня, точка  $O$ , знаходиться на осі обертання; вздовж стержня може ковзати без тертя кільце  $A$  з масою  $m$ . В початковий момент кільце  $A$  знаходиться на віддалі  $2a = 0,2\text{м}$  від точки  $O$  і не має швидкості. Нехтуючи вагою точки, визначити закон руху кільця  $A$  вздовж стержня при його обертанні.

Розв'язання. Виберемо нерухому систему відліку у вигляді декартових осей координат  $x, y, z$  з початком в точці. Вісь  $z$  спрямуємо по осі обертання вгору. Початок рухомих координат візьмемо в точці  $O$  і спрямуємо рухому вісь  $\gamma$  вздовж стержня.

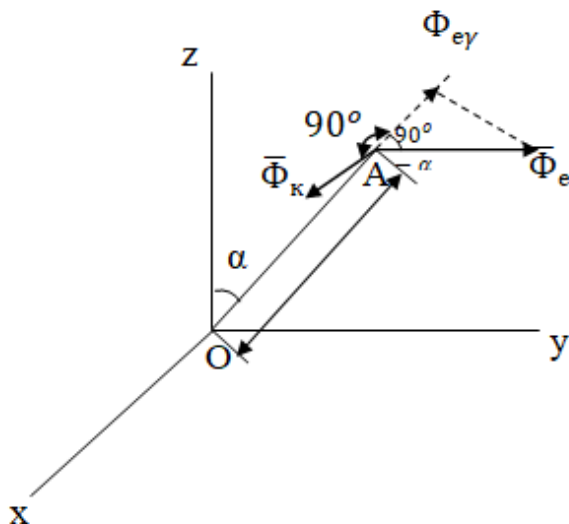


Рис. 1.4.2. Схема руху кільця  $A$

Переносним рухом осі  $\gamma$  є обертання її разом зі стержнем навколо осі  $z$ . Відмітимо, що переносний рух – обертовий. Будемо вважати кільце  $A$  матеріальною точкою. Переносним рухом точки  $A$  буде рух тієї точки разом з віссю  $\gamma$ . Відносним рух точки  $A$  буде рух її вздовж осі  $\gamma$ . Припустимо, що вісь  $\gamma$ , обертаючись навколо осі  $z$ , в даний момент знаходиться в площині  $x, y$  і що точка  $A$ , рухаючись вздовж стержня, знаходиться на віддалі  $\gamma$  від точки  $O$ .

Диференціальне рівняння руху точки  $A$  в проекції на вісь  $\gamma$  буде

$$m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{k\gamma} + R_{\gamma} + \Phi_{e\gamma} + \Phi_{k\gamma}, \quad (1.4.15)$$

де 1)  $F_{\gamma}$  – проєкція рівнодіючої активних сил за умовою дорівнює нулю.

2)  $R_{\gamma}$  – проєкція реакції в'язі. Оскільки сила тертя дорівнює нулю, а проєкція нормальної реакції стержня на вісь  $\gamma$  також дорівнює нулю, то  $R_{\gamma} = 0$ .

3)  $\Phi_{e\gamma}$  – проєкція переносної сили інерції. При рівномірному обертанні стержня точка А буде мати тільки нормальне прискорення, що за величиною дорівнюватиме  $a^n = \omega^2 \gamma \sin \alpha$  і напрямлене перпендикулярно до осі обертання в бік від'ємної осі  $y$  в даний момент. Переносна сила інерції точки А  $\bar{\Phi}_e$  буде напрямлена протилежно, тобто в бік додатної осі  $y$ , її модуль визначається з формули:

$$\Phi_e = ma_e = m\omega^2 \gamma \sin \alpha.$$

Проєкція її на вісь  $\gamma$  буде:

$$\Phi_{e\gamma} = \Phi_e \cos(90 - \alpha) = \Phi_e \sin \alpha = m\omega^2 \gamma \sin^2 \alpha.$$

4)  $\Phi_{k\gamma}$  – проєкція сили інерції Кориоліса точки А. Сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі  $\gamma$ . Тому проєкція її на вісь  $\gamma$  дорівнює нулю ( $\Phi_{k\gamma} = 0$ ).

З врахуванням проведеного аналізу, рівняння (1.4.15) прийме такий вид:

$$m\ddot{y} = \Phi_{e\gamma}$$

або

$$m\ddot{y} = m\omega^2 \gamma \sin^2 \alpha. \quad (1.4.16)$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння (1.4.16) на  $m$ , в результаті чого отримаємо:

$$\ddot{y} = \omega^2 \gamma \sin^2 \alpha$$

або

$$\ddot{\gamma} - \omega^2 \gamma \sin^2 \alpha = 0. \quad (1.4.17)$$

Рівняння (1.4.17) є диференціальним рівнянням відносного руху кільця А. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - \omega^2 \gamma \sin^2 \alpha = 0.$$

Розв'язуючи його, знаходимо:

$$r_{1,2} = \pm \omega \sin \alpha.$$

Таким чином, розв'язання рівняння (1.4.17) буде:

$$\gamma = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{(\omega \sin \alpha)t} + c_2 e^{(-\omega \sin \alpha)t}. \quad (1.4.18)$$

Визначаємо сталі інтегрування  $c_1$  та  $c_2$ , для чого використовуємо початкові умови при  $t_0 = 0$   $\begin{cases} \gamma_0 = 2a \\ \dot{\gamma}_0 = 0 \end{cases}$ .

Продиференціюємо за часом вираз (1.4.18)

$$\dot{\gamma} = c_1 \omega \sin \alpha e^{(\omega \sin \alpha)t} - c_2 \omega \sin \alpha e^{(-\omega \sin \alpha)t}. \quad (1.4.19)$$

Підставляючи  $t = 0, \gamma_0 = 2a$  в рівняння (1.4.18) і  $t = 0, \dot{\gamma}_0 = 0$  в рівняння (1.4.19), одержуємо:

$$2a = c_1 + c_2;$$

$$0 = c_1 - c_2.$$

Звідси знаходимо  $c_1 = c_2 = a$ .

Отже остаточно закон руху точки А вздовж стержня буде таким:

$$\gamma = a [e^{(\omega \sin \alpha)t} + e^{(-\omega \sin \alpha)t}].$$

Підставляючи числові значення, одержуємо:

$$\gamma = 0,1(e^{1,4t} + e^{-1,4t}). \quad (1.4.20)$$

### 1.4.3. Принцип відносності класичної механіки

У випадку, коли рухома система виконує поступальний, рівномірний і прямолінійний рух, переносне та коріолісове

прискорення дорівнюють нулю. В цьому разі основне рівняння відносного руху має вигляд:

$$m\bar{a}_r = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (1.4.21)$$

Як видно з рівняння (1.4.21), відносний рух не відрізняється від абсолютного.

Таким чином, відносний рух матеріальної точки по відношенню до рухомої системи відліку, яка рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, відбувається так само як і по відношенню до нерухомої системи відліку.

Якщо рухома система відліку рухається відносно нерухомої системи відліку прямолінійно, поступально і рівномірно, то її можна вважати інерціальною і рух матеріальної точки можна розглядати як абсолютний рух.

Таким чином принцип відносності класичної механіки полягає у тому, що усі механічні явища у середовище, яке здійснює інерціальний рух, відбувається однаково, як і в нерухомій.

Звідки випливає принцип відносності Галілея.

Ніякими механічними дослідженнями в середині системи, яка рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, не можна виявити, що вона рухається.

#### 1.4.4. Відносний спокій матеріальної точки

У випадку рівноваги точки відносно рухомої системи координат при наявності переносно руху точки відносна швидкість  $\bar{V}_r = 0$  та відносне прискорення  $\bar{a}_r = 0$ . Внаслідок цього прискорення Коріоліса  $\bar{a}_k$  також буде дорівнювати нулю, тому що  $a_k = 2V_r\omega\sin\alpha$ . Враховуючи той факт, що сила інерції Коріоліса дорівнює добутку маси точки на коріолісове прискорення у випадку рівності нулю коріолісова прискорення, сила інерції Коріоліса також дорівнює нулю.

Тоді рівняння (1.4.10) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.4.22)$$

Рівняння (1.4.22) є рівнянням відносно спокою матеріальної точки, суть якого полягає у наступному:

Ізометрична сума активних сил прикладених до точки, реакцій в'язей та переносної сили інерції дорівнює нулю.

У випадку, коли матеріальна точка є вільною, рівняння (1.4.22) мають вид:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.4.23)$$

Розглянемо приклад.

В початковий момент зернівка знаходиться в самій нижній точці  $M_0$  поверхні трієрного циліндра і рухається разом з ним без ковзання. При яких умовах буде знаходитись зернівка у відносному спокої при подальшому обертанні циліндра? Кутова швидкість циліндра  $\omega$ , радіус циліндра  $r$ , коефіцієнт тертя зерна по поверхні циліндра.

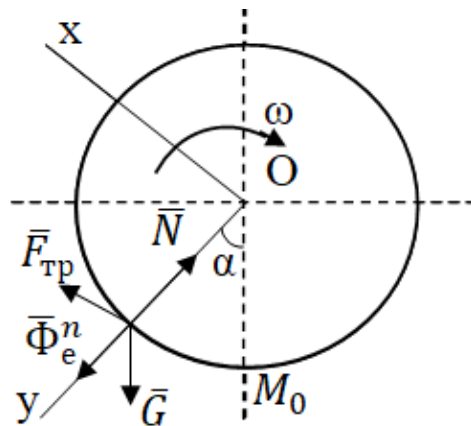


Рис. 1.4.3. Схема сил, діючих на зернівку у стані відносної її рівноваги

Розв'язання.

Нехай циліндр повернеться на деякий кут  $\alpha$  і зернівка, рухаючись разом з циліндром без ковзання, перемістилось з положення  $M_0$  в положення  $M$ . При спокої зернівки відносно циліндра мусить справджуватися рівняння відносної рівноваги зернівки, тобто:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.4.24)$$

де  $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k$  – рівнодіюча активних сил, якою є сила ваги  $G$ ;  
 $\bar{R}$  – рівнодіюча реакції в’язі, якою буде стінка циліндра;  
 $\bar{\Phi}_e$  – сила інерції переносного руху точки.

Слід відмітити, що реакцій в’язі дві:

- нормальна реакція  $\bar{N}$  поверхні циліндра;
- сила тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , яка напрямлена по дотичній до поверхні циліндра в бік його обертання.

Що стосується переносної сили інерції, то вона буде мати тільки нормальну складову, оскільки переносний рух є рівномірним обертанням. Ця складова по модулю буде дорівнювати:  $\Phi_e^n = mr\omega^2$  і спрямована по радіусу обертання  $OM$  зовні.

Отже, якщо зернівка знаходиться в спокої відносно циліндра, що обертається, то геометрична сума сил: ваги  $\bar{G}$ , нормальної реакції  $\bar{N}$ , сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  і переносної сили інерції зернівки  $\bar{\Phi}_e^n$  дорівнює нулю:

$$\bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (1.4.25)$$

Виберемо рухомі осі координат  $Ox$  і  $Oy$  з початком в точці  $O$ , які обертаються разом з циліндром. Вісь  $Oy$  спрямуємо через точку  $M$ , а вісь  $Ox$  перпендикулярно до осі  $Oy$  (рис. 1.4.3).

Спроеціюємо векторне рівняння (1.4.25) на координатні осі. Сума проєкцій всіх діючих сил на вісь  $x$  дорівнюватиме:

$$F_{\text{тр}} - G \sin \alpha = 0. \quad (1.4.26)$$

Сума проєкцій на вісь  $y$ :

$$G \cos \alpha - N + \Phi_e^n = 0. \quad (1.4.27)$$

Підставимо в рівняння (1.4.26) і (1.4.27) значення сил  $\bar{G}$  та  $\Phi_e^n$ , в результаті отримаємо:

$$F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha = 0; \quad (1.4.28)$$

$$mg \cos \alpha - N + mr\omega^2 = 0. \quad (1.4.29)$$

З рівняння (1.4.29) знаходимо  $N$ :



$$N = mg \cos \alpha + mr\omega^2 = m(g \cos \alpha + r\omega^2). \quad (1.4.30)$$

В рівняння (1.4.26) входить сила тертя  $F_{\text{тр}}$ , величина якої може приймати будь-яке значення від нуля до граничної величини;

$$F_{\text{тр}} \leq fN.$$

Тому рівняння (1.4.25) можна перенести так:

$$F_{\text{тр}} = G \sin \alpha \text{ або } Nf \geq mg \sin \alpha$$

Враховуючи (1.4.30), а також те, що  $f = \operatorname{tg} \varphi$  (де  $\varphi$  – кут тертя), одержимо:

$$m(g \cos \alpha + r\omega^2) \operatorname{tg} \varphi \geq mg \sin \alpha. \quad (1.4.31)$$

Після відповідних перетворень це рівняння можна звести до такого вигляду:

$$\frac{r\omega^2}{g} \sin \varphi \geq \sin(\alpha - \varphi). \quad (1.4.32)$$

Рівняння (1.4.30) і (1.4.32) визначають умови, при наявності яких має місце відносний спокій зернівки на поверхні циліндра, що обертається:

1) При умові додатної нормальної реакції

$$N = mg \left( \frac{r\omega^2}{g} + \cos \alpha \right) > 0. \quad (1.4.33)$$

Зернівка може знаходитись на поверхні циліндра (інакше, якщо  $N < 0$ , то зернівка буде відриватися від циліндра).

2) Рівняння (1.4.32) визначає умову, при якій зернівка, знаходячись на поверхні, не ковзає по ній.

Граничне положення зернівки при відносному спокої визначається виразом (1.4.32) при знакові рівності. Тоді:

$$\sin(\alpha_1 - \varphi) = \frac{r\omega^2}{g} \sin \varphi. \quad (1.4.34)$$

де  $\alpha_1$  – кут, на який зернівка зтягується циліндром без ковзання по його поверхні.

Рівняння (1.4.34) може служити для визначення кута  $\alpha_1$ .

## РОЗДІЛ V. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### 1.5.1. Гармонійні коливання

Розглянемо точку М, яка рухається прямолінійно під дією поновлюючої сили, пропорційної відхиленню точки від положення статичної рівноваги (рис. 1.5.1).

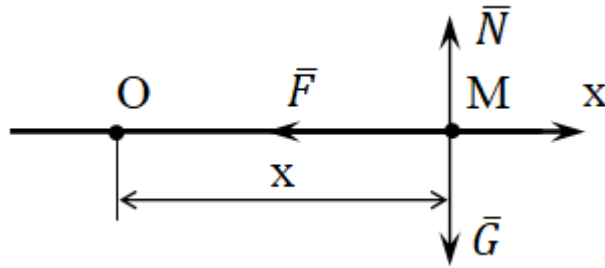


Рис. 1.5.1. Схема сил, діючих на точку при гармонічних коливаннях

Знайдемо закон руху точки М, для чого складемо диференціальне рівняння в проекції на вісь  $x$ .

$$m\ddot{x} = F_x. \quad (1.5.1)$$

де  $F_x$  – проекція поновлюючої сили на вісь  $x$ , яка визначається з виразу

$$F_x = -cx.$$

Підставимо значення проекції на вісь  $x$  поновлюючої сили в рівняння (1.5.1), в результаті чого отримаємо вираз:

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (1.5.2)$$

Поділимо ліву і праву частину рівняння (1.5.2) на  $m$ :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (1.5.3)$$

Введемо позначення  $k^2 = \frac{c}{m}$ , які підставимо в рівняння (1.5.3)

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (1.5.4)$$

де  $k$  – колова частота гармонічних коливань.

Колова частота визначається за формулою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (1.5.5)$$

де  $c$  – жорсткість пружини;

$m$  – маса точки.

Рівняння (1.5.4) – диференціальне рівняння гармонічних коливань. Його розв’язок шукають у вигляді:

$$x = e^{nt}. \quad (1.5.6)$$

Двічі продиференціюємо за часом цей вираз, в результаті чого отримаємо:

$$\ddot{x} = n^2 e^{nt}. \quad (1.5.7)$$

Підставимо вирази (1.5.6) та (1.5.7) у рівняння (1.5.4) і отримаємо характеристичне рівняння

$$n^2 e^{nt} + k^2 e^{nt} = 0$$

або

$$n^2 + k^2 = 0. \quad (1.5.8)$$

Обчислимо корні характеристичного рівняння:

$$n_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} \text{ або } n_{1,2} = \pm ik,$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Оскільки корні характеристичного рівняння (1.5.8) уявні, то загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння (1.5.4) набуває вигляду:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \quad (1.5.9)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування, які знаходимо за допомогою початкових умов.

Початкові умови у нашому випадку мають вигляд:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = V. \end{cases}$$

Вираз (1.5.9) характеризує зміну переміщення точки. Для знаходження закону, що характеризує зміну швидкості точки, необхідно продиференціювати вираз (1.5.9) за часом.

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (1.5.10)$$

Підставляємо початкову швидкість при  $t = 0$  у рівняння (1.5.10), в результаті чого отримуємо  $c_2$ :

$$V_0 = c_2 k \Rightarrow c_2 = \frac{V_0}{k}. \quad (1.5.11)$$

Аналогічно підставимо початкове переміщення при  $t = 0$  у рівняння (1.5.9) і знайдемо  $c_1$

$$x_0 = c_1.$$

Отримані сталі інтегрування підставимо у рівняння (1.5.9)

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt. \quad (1.5.11)$$

Рівняння (1.5.11) є загальним розв'язком диференціального рівняння (1.5.4).

Розв'язання рівняння (1.5.4) можна подати у іншому вигляді, якщо замість сталих інтегрування  $c_1$  і  $c_2$  ввести сталі  $A$  та  $\alpha$ , такі що  $c_1 = A \sin \alpha$  і  $c_2 = A \cos \alpha$ , тоді після їх підстановки у рівняння (1.5.9) ми отримуємо:

$$\begin{aligned} x &= A \sin \alpha \cos kt + A \cos \alpha \sin kt = \\ &= A(\sin \alpha \cos kt + \cos \alpha \sin kt) = A \sin(kt + \alpha). \end{aligned}$$

Коливання точки за законом  $x = A \sin(kt + \alpha)$  називаються гармонічними коливаннями.

Для визначення параметрів гармонічних коливань розглянемо рух точки  $D$  по колу радіуса  $A$  зі сталою кутовою швидкістю  $k = \text{const}$ , з положення  $D_0$ , яке визначається кутом  $\angle kOD_0 = \alpha$ . (рис. 1.5.2)

В довільний момент часу проекція  $M$  точки  $D$  на вісь  $x$  рухається за законом  $x = A \sin(kt + \alpha)$ , тобто здійснює гармонічні

коливання. Величина  $A$ , яка дорівнює максимальному відхиленню точки  $M$  від центра коливань  $O$  називається амплітудою коливань.

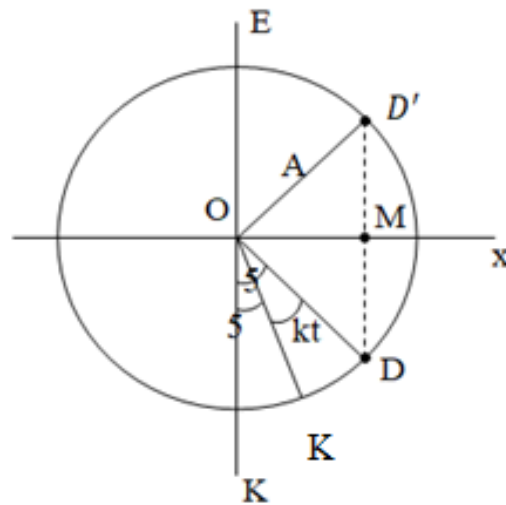


Рис 1.5.2. Рух точки  $D$  по колу радіуса  $A$

Аргумент  $\varphi = kt + \alpha$  називається фазою коливання, де  $\alpha$  – початкова фаза коливань.

Графіком руху точки  $M$  є синусоїда (рис. 1.5.3)

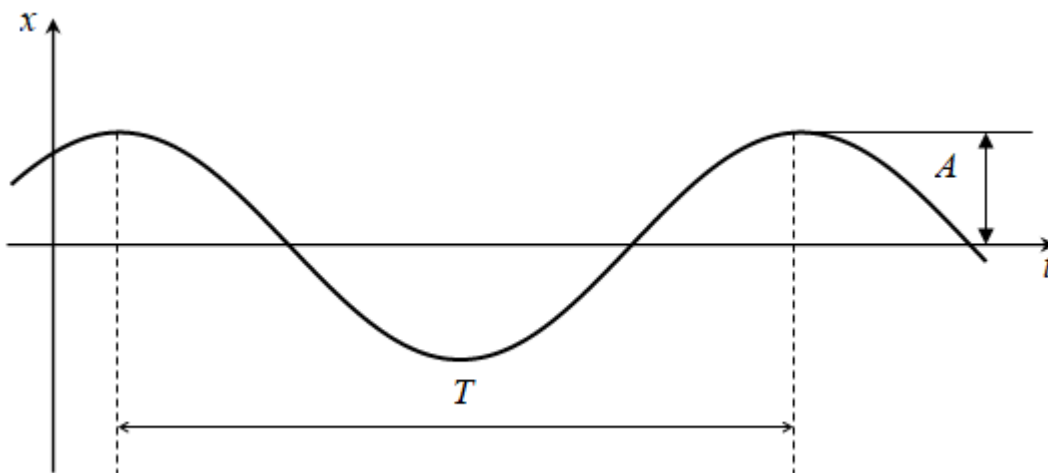


Рис. 1.5.3. Графік руху точки  $M$  при гармонічних коливаннях

Час, за який відбувається одне повне коливання, називається періодом коливань.

Величина зворотна періоду називається частотою коливань, вона дорівнює кількості коливань за одиницю часу  $[1c]$ .

В системі одиниць СІ частота вимірюється в Герцах.

$$f = \frac{1}{T}, \quad f = \frac{k}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (1.5.12)$$

де  $k$  – колова або циклічна частота гармонічних коливань.

Колова частота – це кількість повних коливань за  $2\pi$  секунд. Колова частота визначається за формулою:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Колова частота вимірюється в  $\left[\frac{\text{рад}}{c}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{c}\right]$  або  $[c^{-1}]$ .

Знайдемо формули для визначення амплітуди та початкові фази, для чого використаємо залежності  $c_1 = A \sin \alpha$  та  $c_2 = A \cos \alpha$ . Враховуючи, що  $c_1 = x_0$  і  $c_2 = \frac{V_0}{k}$  можемо записати

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin \alpha; \\ \frac{V_0}{k} &= A \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Ліві та праві частини рівнянь (1.5.13) зведемо в квадрат

$$\begin{aligned} x_0^2 &= A^2 \sin^2 \alpha; \\ \frac{V_0^2}{k^2} &= A^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Якщо вирази (1.5.14) почленно додати, то отримаємо

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} = A^2 \sin^2 \alpha + A^2 \cos^2 \alpha$$

або

$$x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2} = A^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha). \quad (1.5.15)$$

Враховуючи, що  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , рівняння (1.5.15) приймає вид:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2};$$

або

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}. \quad (1.5.16)$$

Поділимо перше рівняння залежностей (1.5.13) на друге, в результаті отримаємо що:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{V_0}$$

або

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{V_0}. \quad (1.5.17)$$

Як видно з рівнянь (1.5.16) та (1.5.17) амплітуда та початкова фаза гармонічних коливань залежать від початкових умов, в той же час, період та частота від початкових умов не залежать.

Розглянемо приклад.

Пружина  $AB$  закріплена одним кінцем в точці  $A$ . Для її подовження на  $0,01$  м треба прикласти в точці  $B$  при статичному навантаженні силу, яка дорівнює  $0,2$  Н.

В деякий момент до нижнього кінця недеформованої пружини підвішують гирю вагою  $P = 1$  Н і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння дальшого руху гирі і визначити амплітуду та період її коливань; віднести рух гирі до осі, проведеної вертикально вниз з положення статичної рівноваги гирі.

Розв'язання. Розглянемо гирю як матеріальну точку. Вибираємо за початок осі точку  $B_1$ , де знаходиться центр ваги гирі при її статичній рівновазі, і напрямляємо вісь  $x$  по вертикалі вниз (рис. 1.5.4). Позначимо через  $\lambda_{cm}$  подовження пружини в положенні  $B_1$  статичної рівноваги гирі через  $x$  – переміщення гирі від цього положення. Тоді загальне положення пружини в довільному положенні  $B$  гирі при її русі буде:

$$\lambda = \lambda_{cm} + x.$$

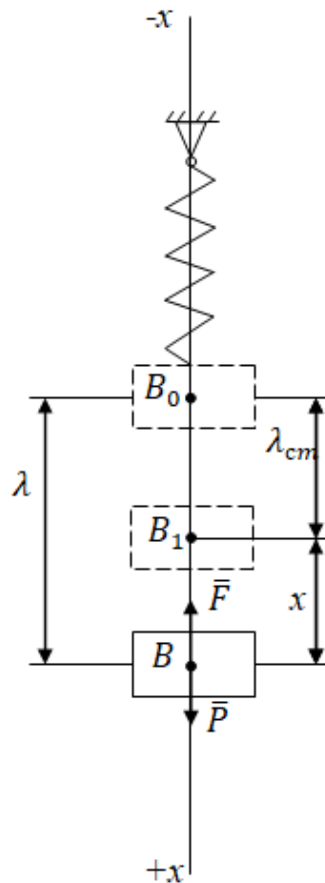


Рис. 1.5.4. Гармонічні коливання точки  $B$ , прикріпленої до пружини

Оскільки сила пружності  $\bar{F}$  пружини пропорціональна її загальному подовженню, то величина цієї сили становитиме:

$$F = c\lambda = c(\lambda_{cm} + x),$$

де  $c$  – жорсткість пружини.

$$c = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Напрявлена сила пружності пружини завжди проти її деформації, тому при положенні гирі в точці  $B$ , коли  $\lambda$  додатне, сила пружності спрямована вгору, а проекція її на вісь  $x$  буде від'ємною. На гирю діють сила ваги  $\bar{P}$  та сила  $\bar{F}$  пружності пружини.

Складаємо диференціальне рівняння руху гирі по осі  $x$ , для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.5.18)$$



Спроекціємо векторне рівняння (1.5.18) на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad (1.5.19)$$

де  $\sum F_{kx}$  – сума проєкцій всіх сил на вісь  $x$ .

$$\sum F_{kx} = -F + P. \quad (1.5.20)$$

Підставляємо вираз (1.5.20) у праву частину рівняння (1.5.19)

$$m\ddot{x} = P - F$$

або

$$m\ddot{x} = P - c(\lambda_{cm} + x). \quad (1.5.21)$$

Враховуючи, що в положенні статичної рівноваги гирі  $P = F_{cm}$ , а  $F_{cm}$  в свою чергу дорівнює  $c\lambda_{cm}$ , рівняння приймає вид:

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (1.5.22)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.5.22) на  $m$ .

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + k^2x = 0, \quad (1.5.23)$$

де  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

Рівняння (1.5.23) – це диференціальне рівняння гармонічних коливань, його загальний розв'язок має вигляд:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (1.5.24)$$

де  $c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування, які знаходяться з початкових умов.

Початкові умови мають наступний вигляд: при  $t = 0$   $\begin{cases} x_0 = \lambda_{cm}; \\ \dot{x}_0 = 0. \end{cases}$

Щоб ці умови використати, знаходимо також загальний вираз швидкості:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (1.5.25)$$

Підставляючи початкові дані в рівняння (1.5.24) та (1.5.25), знаходимо:

$$c_1 = x_0 = -\lambda_{cm}; \quad c_2 = \dot{x}_0 = 0.$$

Таким чином розв'язання диференціального рівняння (1.5.23) остаточно буде мати вигляд:

$$x = -\lambda_{cm} \cos kt, \quad (1.5.26)$$

де  $\lambda_{cm} = \frac{P}{c} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ м};$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{20 \times 9,8}{1}} = 14 \text{ с}^{-1}.$$

Визначаємо амплітуду та період коливань:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}} = 0,05 \text{ м}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 0,45 \text{ с}.$$

### 1.5.2. Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянемо загальну схему прямолінійного руху точки  $M$  під дією відновлюючої сили  $\bar{F}$  та сили опору середовища  $\bar{R}$  (рис. 1.5.5). В загальному випадку опір середовища залежить від багатьох факторів, основним з яких є швидкість руху. Припустимо, що сила опору середовища пропорційна першому степеню швидкості:

$$\bar{R} = -\mu\bar{V}. \quad (1.5.27)$$

Від'ємний знак свідчить про те, що сила опору спрямована у протилежний бік швидкості руху.

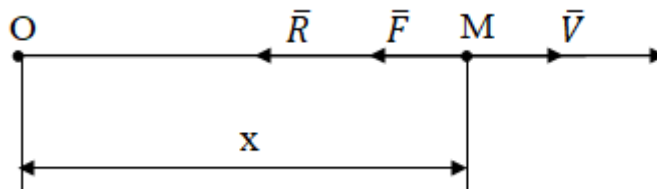


Рис. 1.5.5. Схема сил, діючих на точку при її згасаючих коливаннях

Початкові умови руху у загальному випадку мають наступний вигляд:

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} x = x_0; \\ \dot{x} = \dot{x}_0. \end{cases}$$

Складемо диференціальне рівняння згасаючих коливань, для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.5.27)$$

Спроеціюємо векторне рівняння (1.5.27) на вісь  $x$ .

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.5.28)$$

де  $\sum_{k=1}^n F_{kx}$  – сума проекцій всіх діючих сил на вісь  $x$ .

$$\sum F_{kx} = -R_x - F_x = -\mu\dot{x} - cx. \quad (1.5.29)$$

З кінематики відомо, що  $a_x = \ddot{x}$ , тоді з врахуванням виразу (1.5.29) рівняння (1.5.28) приймає вид:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - cx. \quad (1.5.30)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.5.30) на масу  $m$ :

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{m}\dot{x} - \frac{c}{m}x$$

або

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (1.5.31)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{m} &= 2b, & b &= \frac{\mu}{2m}, \\ \frac{c}{m} &= k^2, & k &= \sqrt{\frac{c}{m}}. \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

де  $b$  – коефіцієнт згасання;

$k$  – колова частота.

Підставимо позначення (1.5.32) в рівняння (1.5.31) і в результаті отримаємо наступне рівняння:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + kx = 0. \quad (1.5.33)$$

Рівняння (1.5.33) являє собою однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для розв'язку диференціального рівняння необхідно скласти характеристичне рівняння. У нашому випадку це квадратне рівняння виду:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0. \quad (1.5.34)$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння (1.5.34). Його розв'язок має вид:

$$n_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2} \text{ та } n_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}.$$

В залежності від конкретних умов можливі три випадки:

*перший випадок:*

$n_1$  і  $n_2$  комплексні числа, це можливо при умові, що  $b < k$ , тобто опір малий порівняно з відновлювальною силою.

*другий випадок:*

$n_1$  і  $n_2$  дійсні і різні між собою числа ( $n_1 \neq n_2$ ), це можливо при  $b > k$ , тобто опір більший порівняно з відновлювальною силою.

*третій випадок:*

$n_1$  і  $n_2$  дійсні і рівні числа ( $n_1 = n_2$ ), це буває у тому випадку, коли сила опору дорівнює відновлювальній силі.

Розглянемо кожний випадок окремо.

Перший випадок, корні характеристичного рівняння комплексні. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.5.33) набуває вигляду:

$$x = e^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t), \quad (1.5.35)$$

де  $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ ,

$c_1$  і  $c_2$  – сталі інтегрування.

Другий випадок – корні характеристичного рівняння дійсні і різні. Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.5.33) має вид:

$$y = c_1 e^{n_1 t} + c_2 e^{n_2 t}. \quad (1.5.36)$$

З врахуванням виразів (1.5.34) рівняння (1.5.36) набуває виду:

$$y = c_1 e^{(-b+\sqrt{b^2-k^2})t} + c_2 e^{(-b-\sqrt{b^2-k^2})t}. \quad (1.5.37)$$

Для спрощення виразу (1.5.37) можна ввести позначення  $r = \sqrt{b^2 - k^2}$  і тоді загальний розв'язок рівняння (1.5.33) буде мати вид:

$$y = c_1 e^{(-b+r)t} + c_2 e^{(-b-r)t}. \quad (1.5.38)$$

Третій випадок – корні характеристичного рівняння дійсні і рівні. Загальний розв'язок рівняння (1.5.33) має вид:

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t). \quad (1.5.39)$$

З фізичної точки зору перший випадок розв'язання диференціального рівняння (1.5.33), вираз (1.5.33) є математичним описом згасальних коливань у загальному вигляді. Для визначення сталих інтегрування використовуємо початкові умови.

Підставимо  $t = 0$  та  $x = x_0$  в рівняння (1.5.35):

$$x_0 = e^{-b \times 0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = c_1.$$

Ми визначили, що  $c_1 = x_0$ . Для визначення сталої інтегрування  $c_2$  необхідно знайти похідну за часом від рівняння (1.5.35)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= be^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + \\ &+ e^{-bt}(-c_1 k_1 \sin k_1 t + c_2 k_1 \cos k_1 t). \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

Підставимо в вираз (1.5.40)  $t = 0$  та  $\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0$

$$V_0 = -be^{-b0}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^{-b0}(-c_1 k_1 \sin 0 + c_2 k_1 \cos 0);$$

$$V_0 = -bc_1 + c_2 k_1;$$

$$c_2 = \frac{V_0 + bc_1}{k_1}. \quad (1.5.41)$$

Враховуючи, що  $c_1 = x_0$ , вираз (1.5.41) набуває вигляду:

$$c_2 = \frac{V_0 + bx_0}{k_1}. \quad (1.5.42)$$

Після підстановки сталих інтегрування  $c_1$  та  $c_2$  у рівняння (1.5.35) отримаємо закон згасальних коливань у остаточному вигляді:

$$x = e^{-bt} \left( x_0 \cos k_1 t + \frac{V_0 + bx_0}{k_1} \sin k_1 t \right). \quad (1.5.43)$$

Якщо ввести сталі  $a$  і  $\alpha$ , такі, що  $c_1 = a \sin \alpha$  та  $c_2 = a \cos \alpha$ , то рівняння (1.5.35) набуває виду:

$$x = ae^{-bt} (\sin \alpha \cos k_1 t + \cos \alpha \sin k_1 t) = ae^{-bt} (\sin k_1 t + \alpha). \quad (1.5.44)$$

Підставимо  $c_1$  і  $c_2$  у введені сталі і в результаті отримаємо

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \alpha \\ \frac{V_0 + bx_0}{k_1} &= a \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.5.45)$$

Величини  $a$  і  $\alpha$  визначається з рівнянь (1.5.45), для чого піднесемо обидва рівняння до квадрату:

$$\left. \begin{aligned} x_0^2 &= a^2 \sin^2 \alpha \\ \frac{(V_0 + bx_0)^2}{k_1^2} &= a^2 \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.5.46)$$

Додамо ліві та праві частини першого та другого рівнянь виразу (1.5.46).

$$x_0^2 + \frac{(V_0 + bx_0)^2}{k_1^2} = a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

або

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + bx_0)^2}{k_1^2}}. \quad (1.5.47)$$

Якщо поділити перше рівняння на друге в системі (1.5.45), то отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k_1}{V_0 + bx_0},$$

або

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k_1}{V_0 + b x_0}. \quad (1.5.48)$$

Коливання, які відбуваються за законом  $x = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha)$ , називаються згасаючими, так як завдяки множнику  $e^{-bt}$  амплітуда з часом зменшується, наближаючись до нуля.

Графік згасаючих коливань наведений на рис. 1.5.6., де він розташований між пунктирними кривими:  $x_1 = a e^{-bt}$ ,  $x_2 = -a e^{-bt}$ .

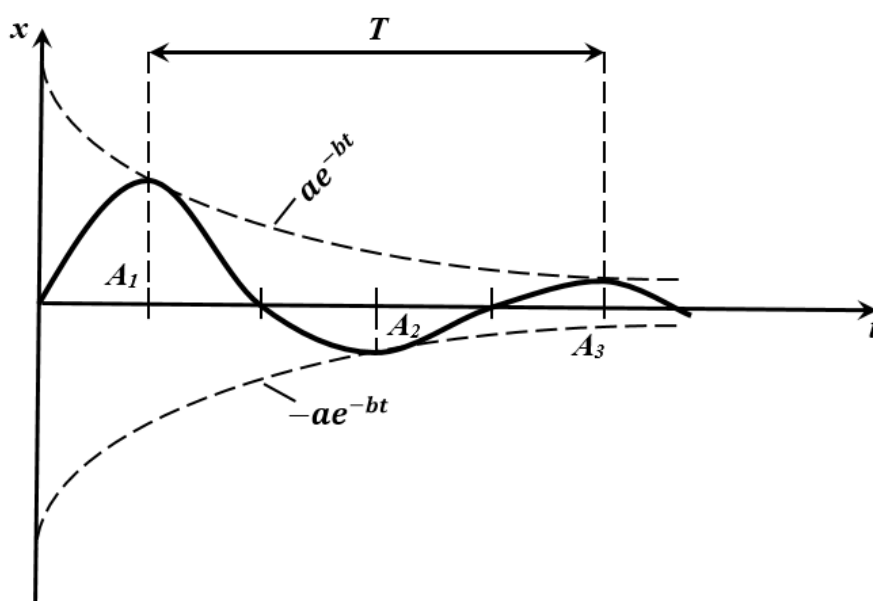


Рис. 1.5.6. Графік згасаючих коливань

Проміжок часу  $T$ , який дорівнює періоду функції  $\sin(k_1 t + \alpha)$ , називають періодом згасаючих коливань.

$$T = \frac{2\pi}{k_1}, \quad (1.5.49)$$

де  $k_1$  — колова частота згасальних коливань,  
 $\alpha$  — початкова фаза коливань.

Амплітуда згасаючих коливань з кожним розмахом зменшується. Відношення амплітуд двох розмахів — наступного до попереднього називається декрементом згасаючих коливань.

$$q = e^{-\frac{bt}{2}}. \quad (1.5.50)$$

Величина  $\ln q = -\frac{bt}{2}$  називається логарифмічним декрементом згасаючих коливань.

Якщо опір середовища буде настільки суттєвим, що  $b > k$  або  $b = k$  (другий та третій випадки розв'язку диференціального рівняння (1.5.33)) то коливань точки не буде, а рух буде мати аперіодичний характер.

Розглянемо наступний приклад.

Пластинка  $D$  вагою  $1\text{Н}$  підвішена на пружній пружині  $AB$  в нерухомій точці  $A$ , рухається між полюсами магніту. Внаслідок вихрових струмів рух гальмується силою, пропорційною швидкості. Сила опору руху дорівнює  $\mu v$  (де  $\mu = 0,51 \frac{\text{с}\cdot\text{Н}}{\text{м}}$ ,  $v$  – швидкість у  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ).

В початковий момент швидкість пластинки дорівнює нулю і пружина не розтягнута; подовження її на  $0,01\text{м}$  виникає при статичній дії сили в  $0,2\text{Н}$ . Знайти закон руху пластинки.

Розв'язання. Початок координат візьмемо в положенні статичної рівноваги точки  $B$  і направимо вісь  $x$  вертикально вниз (рис. 1.5.7). На пластинку діють сила  $\bar{P}$  ваги сила опору  $\bar{R}$ , напрямлена в бік, протилежний рухові пластинки, і сила  $\bar{F}$  пружності пружини, напрямлена до зрівноваженого положення кінця пружини тобто до точки  $B$ .

Нехай в даний момент пластинка, яка знаходиться на віддалі  $x$  від початку координат, рухається від зрівноваженого положення вниз. Тоді сила пружності пружини  $\bar{F}$  і сила опору  $\bar{R}$  будуть напрямлені вгору.

На підставі основного закону динаміки складаємо диференціальне рівняння руху пластинки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n F_k. \quad (1.5.51)$$



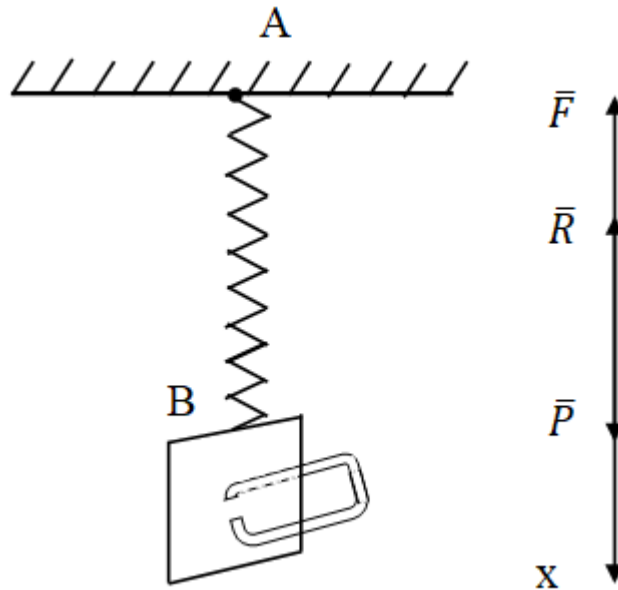


Рис. 1.5.7. Схема сил, діючих на пластину, підвішену до пружини

Спроеціюємо на вісь  $x$  векторне рівняння (1.5.51):

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} . \quad (1.5.52)$$

Знайдемо суму проекцій всіх сил на вісь  $x$ :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = P - R - F - F_{ст}, \quad (1.5.53)$$

де  $P$  – величина сили ваги;

$R$  – величина сили опору;

$F_{ст}$  – величина сили пружності статична;

$F$  – величина сили пружності динамічна.

Визначимо кожну з діючих сил.

Сила ваги:

$$P = mg. \quad (1.5.54)$$

Сила пружності статична:

$$F_{ст} = \lambda_{ст} \cdot c_1. \quad (1.5.55)$$

де  $\lambda_{ст}$  – статична деформація пружини, тобто деформація, яка виникає під дією сили ваги,

$c$  – жорсткість пружини  $c_1$ .

Сила ваги та сила пружності статична врівноважують один одного, тобто  $\bar{P} = \bar{F}_{\text{ст}}$ , і тому їх можна не враховувати при складанні диференціального рівняння.

Сила опору визначається за формулою:

$$R = \mu v = \mu \dot{x}, \quad (1.5.56)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності,  $\mu = 0,51 \frac{\text{с}\cdot\text{Н}}{\text{м}}$ .

Сила пружності динамічна пропорційна деформації пружини і визначається з залежності:

$$F = cx, \quad (1.5.57)$$

де  $c$  – жорсткість пружини,  $c = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Підставимо формули (1.5.56) та (1.5.57) у вираз (1.5.53).

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -\mu \dot{x} - cx. \quad (1.5.58)$$

Враховуючи, що  $a_x = \ddot{x}$ , а також вираз (1.5.58), після перетворень отримаємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0. \quad (1.5.59)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.5.59) на масу  $m$  і одержимо рівняння:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (1.5.60)$$

Введемо позначення:  $2b = \frac{\mu}{m}$  та  $k^2 = \frac{c}{m}$ . Тоді рівняння згасаючих коливань матиме вигляд:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0. \quad (1.5.61)$$

Для розв'язання цього диференціального рівняння складемо характеристичне рівняння:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0. \quad (1.5.62)$$

З метою визначення коренів цього рівняння необхідно обчислити величини  $b$  і  $k$ .

Коефіцієнт опору:

$$b = \frac{\mu}{2m} = \frac{\mu g}{2P} = \frac{0,51 \times 10}{2 \times 1} = 2,55 \text{ c}^{-1}.$$

Колова частота коливань пружини:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{gc}{P}} = \sqrt{\frac{9,81 \times 20}{1}} = 14 \text{ c}^{-1}.$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2} = -2,55 \pm \sqrt{2,55^2 - 14^2} = -2,55 \pm i 13,77.$$

Через те, що корені характеристичного рівняння комплексні, то розв'язання диференціального рівняння матиме такий вигляд:

$$x = e^{-bt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t), \quad (1.5.63)$$

$$\text{де } k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}.$$

Сталі інтегрування визначаються за початковими умовами.

За вихідними даними початкова швидкість  $V_0 = 0$  м/с. Для визначення положення точки  $B$  в початковий момент часу розглянемо залежність

$$\lambda = \lambda_{\text{ст}} + x, \quad (1.5.64)$$

де  $\lambda$  – загальна деформація пружини;

$\lambda_{\text{ст}}$  – статична деформація пружини;

$x$  – динамічна деформація пружини.

В початковий момент часу  $t = 0$  рівняння (1.5.64) приймає вид

$$\lambda_0 = \lambda_{\text{ст}} + x_0. \quad (1.5.65)$$

Враховуючи, що  $\lambda_0 = 0$ , залежність (1.5.65) можна записати наступним чином  $x_0 = -\lambda_{\text{ст}}$ .

Статичну деформацію пружини  $\lambda_{\text{ст}}$  визначимо з виразу:

$$P = F_{\text{ст}}$$

або

$$mg = \lambda_{\text{ст}} \cdot c. \quad (1.5.66)$$

Із залежності (1.5.66) знаходимо  $\lambda_{\text{ст}}$

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ м.}$$

Таким чином  $x_0 = -0,05 \text{ м.}$

Підставимо початкові умови в рівняння (1.5.63)

$$x_0 = e^{-b_0}(c_1 \cos k_1 0 + c_2 \sin k_1 0).$$

Звідки  $c_1 = x_0 = 0,05 \text{ м.}$

Для знаходження  $c_2$  необхідно продиференціювати за часом рівняння, і в отриманий вираз підставити початкові умови.

$$\dot{x} = -be^{-bt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t) + e^{-bt}(-c_1 k_1 \sin k_1 t + c_2 k_1 \cos k_1 t);$$

$$v_0 = -be^{-b_0}(c_1 \cos k_1 0 + c_2 \sin k_1 0) + e^{-b_0}(-c_1 \sin k_1 0 + c_2 k_1 \cos k_1 0);$$

$$v_0 = -bc_1 + c_2 k_1 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0 + bc_1}{k_1}.$$

Після підстановки даних отримаємо, що  $c_2 = \frac{0 + 2,55 \times 0,05}{13,77} = 0,009 \text{ м.}$

Таким чином, закон руху точки  $B$  і разом з тим пластинки буде мати такий вигляд:

$$x = e^{-2,55t}(0,05 \cos 13,77t + 0,09 \sin 13,77t). \quad (1.5.67)$$

### 1.5.3. Змушені коливання без врахування сил опору середовища

Колівальний рух точки  $M$  називається змушеним, коли на неї, крім відновлювальної сили  $\bar{F}$  діє ще збурювальна сила  $\bar{Q}$ .

$$Q = Q_0 \sin pt, \quad (1.5.68)$$

де  $Q_0$  – максимальне значення збурювальної сили, [Н];

$p$  – колова частота збурювальної сили  $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ ;

$t$  – час [с].

Розглянемо рух матеріальної точки масою  $m$ , на яку діють дві сили – відновлювальна  $F = cx$  та збудовальна  $Q = Q_0 \sin pt$  (рис. 1.5.8).

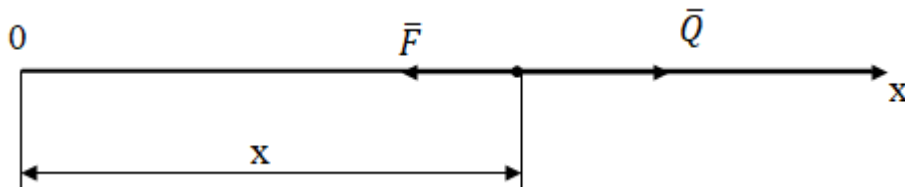


Рис. 1.5.8. Змушені коливання без враховування сил опору середовища

Складемо диференціальне рівняння змушених коливань, для чого використовуємо основний закон динаміки.

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.5.68)$$

Спроектуємо векторне рівняння (1.5.68) на вісь  $x$ :

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.5.69)$$

Визначаємо суму проекцій всіх сил на вісь  $x$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = Q - F = Q_0 \sin pt - cx. \quad (1.5.70)$$

Враховуючи, що  $a_x = \ddot{x}$ , а також вираз (1.5.70) отримаємо диференціальне рівняння

$$m\ddot{x} = Q_0 \sin pt - cx. \quad (1.5.71)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння 1.5.71 на  $m$

$$\ddot{x} = \frac{Q_0}{m} \sin pt - \frac{c}{m} x. \quad (1.5.72)$$

Введемо позначення

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{Q_0}{m} = p_0, \quad (1.5.73)$$

де  $p_0$  – стала, одиниця виміру якої  $\left[\frac{m}{c^2}\right]$ .

Після перетворень та введених позначень отримуємо диференціальне рівняння змушених коливань у остаточному вигляді:

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt. \quad (1.5.75)$$

Рівняння (1.5.75) – це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, його розв’язок має вид:

$$x = x_1 + x_2, \quad (1.5.76)$$

де  $x_1$  – загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння  $\ddot{x} + k^2 = 0$ ;

$x_2$  – частинний розв’язок неоднорідного рівняння (1.5.75).

Загальний розв’язок однорідного рівняння має вигляд

$$x = A \sin (kt + \alpha), \quad (1.5.77)$$

де  $A$  – амплітуда гармонічних коливань;

$\alpha$  – початкова фаза гармонічних коливань.

Формули для визначення амплітуди та початкової фази гармонічних коливань були отримані раніше, вони мають наступний вигляд:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{R^2}}. \quad (1.5.78)$$

Частинний розв’язок рівняння (1.5.75) шукаємо у вигляді:

$$x_2 = B \sin pt, \quad (1.5.79)$$

де  $B$  – стала величина.

Вважаємо, що  $p \neq k$ .

Визначимо  $B$ , для чого двічі продиференціюємо  $x_2$

$$\dot{x}_2 = Bp \cos pt. \quad (1.5.80)$$

$$\ddot{x}_2 = -Bp^2 \sin pt. \quad (1.5.81)$$

Підставимо  $x_2$  та  $\ddot{x}_2$  в рівняння (1.5.75)

$$-Bp^2 \sin(pt) + k^2 B \sin(pt) = P_0 \sin(pt). \quad (1.5.82)$$

Згрупуємо члени рівняння (1.5.82) наступним чином:

$$B(k^2 - p^2) \sin pt = p_0 \sin pt. \quad (1.5.83)$$

Прирівняємо коефіцієнти при синусах, вони повинні бути однакові.

$$B(k^2 - p^2) = p_0. \quad (1.5.84)$$

Звідки  $B$  визначиться з виразу

$$B = \frac{p_0}{k^2 - p^2}. \quad (1.5.85)$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (1.5.75) буде мати вигляд:

$$x_2 = \frac{p_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (1.5.86)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.5.75) буде мати вид:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{p_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (1.5.87)$$

де  $A$  і  $\alpha$  – сталі інтегрування, визначаються з допомогою початкових умов.

Вираз (1.5.87) показує, що коливання точки складаються з двох частин:

- коливань з амплітудою  $A$  (яка залежить від початкових умов і частотою  $k$ );
- коливань з амплітудою  $B$  (яка не залежить від початкових умов та частотою  $p$ ).

Перший тип коливань – це власні коливання, другий тип – вимушені коливання.

Таким чином точка здійснює складний рух, який є результатом накладання двох коливань вимушених та власних.

Резонанс при відсутності опорів настає тоді, коли частота  $p$  змушених коливань або (що теж саме) частота збурювальної сили дорівнює частоті  $k$  вимушених коливань  $p = k$  (або  $\frac{p}{k} = 1$ ).

Амплітуди змушених коливань з часом необмежено зростають і можуть досягати недопустимо великих, небезпечних для механічної системи значень.

Розглянемо наступний приклад.

Кінець пружини D, який з'єднано з кулісним механізмом, що приводиться в дію кривошипом OE, здійснює гармонічні коливання по вертикальній прямій з амплітудою R та кутовою швидкістю  $\omega$  за законом

$$x_E = R \sin \omega t \quad (x_E \text{ і } R - \text{в м; } t - \text{с}).$$

До другого кінця пружини підвішено тягар M вагою  $P = 4 \text{ Н}$ . Визначити рух тягара M відносно куліси, якщо під дією сили  $0,4 \text{ Н}$  пружина подовжується на  $0,01 \text{ м}$ ;

$$OE = R = 0,02 \text{ м; } \omega = 7 \text{ с}^{-1}.$$

Розв'язання.

Рух тягара M поступальний, тому достатньо дослідити рух однієї його точки – центра ваги B, вважаючи, що в ній зосереджена вся маса тягара. Візьмемо початок нерухомої системи координат в точці O (центрі обертання кривошипа OE) та напрямимо нерухому вісь x вертикально вниз зв'яжемо з кулісою рухому систему координат, початок якої візьмемо в точці  $O_r$  перетину осей симетрії куліси, і направимо рухому вісь  $x_r$  також вертикально вниз.

Абсолютний рух точки B складається з її руху відносно рухомої осі  $x_r$ , тобто відносно куліси (відносний рух) та руху разом з початком  $O_r$  цієї осі, тобто з кулісою (переносний рух). Відзначимо, що довжина пружини в ненапруженому стані –  $l_0$ , статична деформація пружини під дією ваги тягара –  $f_{cm}$  та стала довжина  $L = DO_r$  не змінюється при роботі механізму. Тому абсолютне переміщення точки B залежить лише від її переносного та відносного переміщень.

Переносне переміщення тягара  $x_e$  дорівнює переміщенню куліси  $x_E$  тому:

$$x_e = x_E = R \sin \omega t.$$



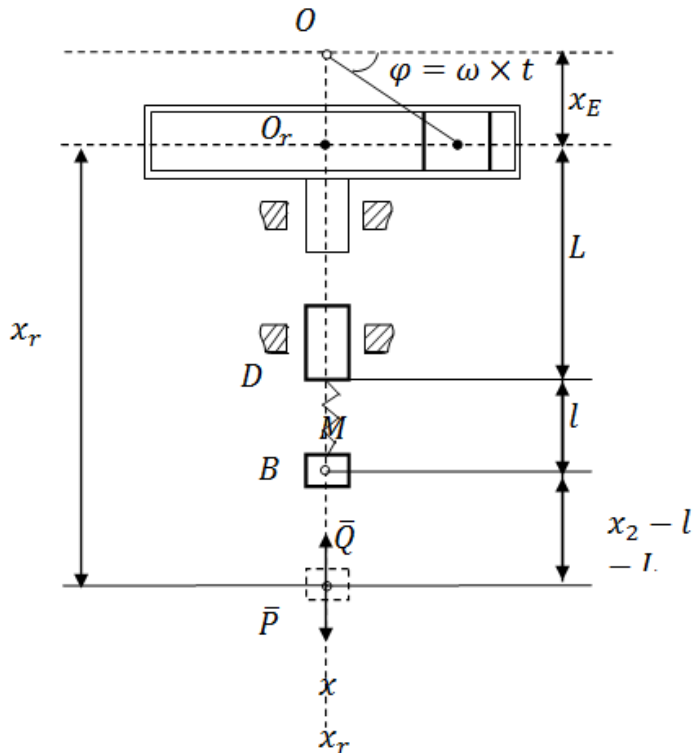


Рис. 1.5.9. Дослідження відносного руху точки В

Відносне переміщення, яке невідомо, назначимо через  $x_r$ . Абсолютне переміщення тягара дорівнює сумі його переносного та відносного переміщень:

$$x = x_e + x_r. \quad (1.5.88)$$

Для того щоб знайти відносне переміщення  $x_r$ , можна скористатися двома способами.

Перший полягає в тому, що ми складаємо диференціальне рівняння абсолютного руху точки В і, розв'язавши його, знаходимо відносний рух. Потім визначимо відносний рух точки В як різницю між її абсолютним та переносним рухами, які будуть відомі. Саме за цим способом і будемо розв'язувати задачу.

Другий спосіб полягає в складанні і розв'язанні диференціального рівняння відносного руху В.

Отже, складемо диференціальне рівняння абсолютного руху тягара, розглядаючи його як точку.

На тягар діють дві сили: сила ваги  $\bar{P}$  та сила пружності пружини  $\bar{Q}$ . Тому рівняння руху в векторній формі буде:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.5.89)$$

Проекціюючи вектори, що входять в рівняння (1.5.89) на нерухому вісь  $x$ , одержимо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} = P - Q. \quad (1.5.90)$$

Величина сили пружності пропорціональна загальній деформації пружини, враховуючи статичну деформацію  $f_{cm}$  під дією ваги тягара і деформацію динамічну, внаслідок його нерівномірного руху; остання деформація є відносним переміщенням тягара в його русі відносно куліси, тобто  $x_r$ . Тому:

$$Q = c(f_{cm} + x_r). \quad (1.5.91)$$

де  $c$  – жорсткість пружини.

З врахуванням виразу (1.5.91) рівняння (1.5.90) приймає вид:

$$m\ddot{x} = P - c(f_{cm} + x_r). \quad (1.5.92)$$

Але відносне переміщення  $x_r = x - x_e$ , а переносне  $x_e = R \times \sin \omega t$ , тоді:

$$m\ddot{x} = P - c(f_{cm} + x - R \times \sin \omega t). \quad (1.5.93)$$

Враховуючи, що  $P = cf_{cm}$ , одержуємо рівняння:

$$m\ddot{x} + cx = cR \times \sin \omega t. \quad (1.5.94)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння (1.5.94) на  $m$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{c}{m}R \times \sin \omega t. \quad (1.5.95)$$

Введемо позначення  $k^2 = \frac{c}{m}$ .

$$\ddot{x} + k^2x = k^2R \times \sin \omega t. \quad (1.5.96)$$

Позначимо  $k^2R = P_0$ . Це стала, яка має розмірність прискорення. Тоді рівняння (1.5.96) приймає вигляд:

$$\ddot{x} + k^2x = P_0 \sin \omega t. \quad (1.5.97)$$

Рівняння (1.5.97) це є диференціальне рівняння змушених коливань.

Розв'язання цього рівняння складається з двох частин:

$$x = x_1 + x_2, \quad (1.5.98)$$

де  $x_1$  – являє собою гармонічні коливання гаряна пружині;

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha),$$

де  $A$  – амплітуда гармонічних коливань;

$\alpha$  – початкова фаза гармонічних коливань.

Амплітуда та початкова фаза гармонічних коливань визначаються з початкових умов його руху. Оскільки останні з умови задачі невідомі, то ж можна визначити  $A$  і  $\alpha$ .

Розглянемо другу складову виразу (1.5.98)  $x_2$ , яка являє собою змушені коливання. Амплітуда цих коливань визначається за формулою:

$$B = \frac{P_0}{k^2 - \omega^2}. \quad (1.5.99)$$

Після підстановки даних у вираз (1.5.99) отримаємо, що амплітуда змушених коливань дорівнює 0,04 м.

Таким чином рівняння змушених коливань в його абсолютному русі буде мати вигляд:

$$x_2 = 0,04 \sin 7t. \quad (1.5.100)$$

Щоб знайти рівняння відносного руху тягача відносно куліси, необхідно з рівняння абсолютного руху  $x = x_1 + x_2$  відняти рівняння переносного руху  $x_e = R \sin \omega t$

$$\begin{aligned} x_r = x - x_e &= x_1 + x_2 - x_e = A \sin \omega t + B \sin \omega t - R \sin \omega t = \\ &= A \sin(kt + \alpha) + 0,02 \sin 7t. \end{aligned} \quad (1.5.101)$$

Це і є рівняння відносного руху тягача. Воно складається з власних та змушених коливань у відносному русі.

#### 1.5.4. Змушені коливання з врахуванням сили опору типу в'язкого тертя

Розглянемо рух точки, на яку діють відновлювальна сила  $\bar{F}$ , сила опору  $\bar{R}$  та збурювальна гармонічна сила  $Q$  (рис. 1.5.10).

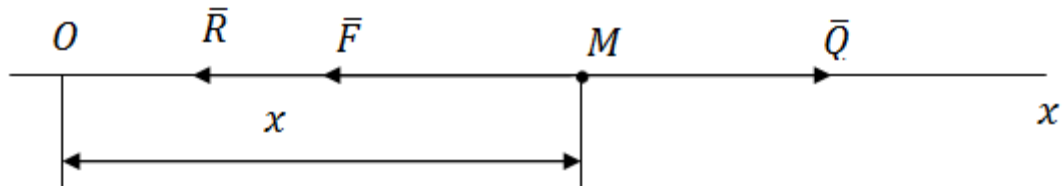


Рис. 1.5.10. Змушені коливання з врахуванням сили опору

Складемо диференціальне рівняння руху точки  $M$  для чого використовуємо основний закон динаміки:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.5.102)$$

Спроеціюємо векторне рівняння (1.5.102) на вісь  $x$ :

$$ma_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}. \quad (1.5.103)$$

Сума проєкцій всіх сил на вісь  $x$  дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = Q - F - R. \quad (1.5.104)$$

В свою чергу

$$a_x = \ddot{x}. \quad (1.5.105)$$

Підставимо вирази (1.5.104) та (1.5.105) в рівняння (1.5.103) і отримаємо диференціальне рівняння виду:

$$m\ddot{x} = Q - F - R. \quad (1.5.106)$$

Визначимо сили, які діють на матеріальну точку  $M$ .

Збурювальна гармонічна сила  $Q$  визначається з залежності:

$$Q = Q_0 \sin pt. \quad (1.5.107)$$

Відновлювальна сила  $F$  дорівнює:

$$F = -cx. \quad (1.5.108)$$

Сила опору пропорційна швидкості  $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ , а її проекція на вісь  $x$  дорівнює

$$R_x = -\mu\dot{x}. \quad (1.5.109)$$

Підставимо формули (1.5.107, ..., 1.5.109) у праву частину рівняння (1.5.106):

$$m\ddot{x} = Q_0 \sin pt - cx - \mu\dot{x}. \quad (1.5.110)$$

Поділимо рівняння (1.5.110) на масу точки

$$\ddot{x} = \frac{Q_0}{m} \sin pt - \frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}. \quad (1.5.111)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} &= k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \\ \frac{\mu}{m} &= 2b, \quad b = \frac{\mu}{2m}, \\ \frac{Q_0}{m} &= P_0. \end{aligned} \quad (1.5.112)$$

З урахуванням позначень (1.5.112) рівняння (1.5.111) набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P_0 \sin pt. \quad (1.5.113)$$

Рівняння 1.5.113 є диференціальним рівнянням змушених коливань точки при наявності сил опору. Його загальний розв'язок має вигляд:

$$x = x_1 + x_2, \quad (1.5.114)$$

де  $x_1$  – загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0;$$

$x_2$  – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння.

Знайдемо розв'язок однорідного диференціального рівняння  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0$ , для чого складаємо характеристичне рівняння, яке має вид:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0. \quad (1.5.115)$$

У випадку  $k > b$  корні характеристичного рівняння будуть комплексними і загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння буде мати вид:

$$x_1 = e^{-bt}(c_1 \sin k_1 t + c_2 \cos k_1 t) \quad (1.5.116)$$

або

$$x_1 = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (1.5.117)$$

$$\text{де } k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}.$$

Але гармоніка  $x_1$  досить швидко згасає, нею, як правило, нехтують.

Частинний розв'язок  $x_2$  будемо шукати у вигляді

$$x_2 = B \sin(pt - \beta), \quad (1.5.118)$$

де  $B$  і  $\beta$  – сталі, які треба підібрати таким чином, щоб рівність (1.5.113) обернулось у тотожність.

Продиференціюємо за часом двічі вираз (1.5.118)

$$\dot{x} = Bp \cos(pt - \beta); \ddot{x} = -Bp^2 \sin(pt - \beta). \quad (1.5.119)$$

Підставимо вирази (1.5.119) та (1.5.118) у ліву частину рівняння (1.5.113).

$$\begin{aligned} -Bp^2 \sin(pt - \beta) + 2bpB \cos(pt - \beta) + \\ + k^2 B \sin(pt - \beta) = P_0 \sin pt. \end{aligned} \quad (1.5.120)$$

Позначимо

$$pt - \beta = \psi, pt = \psi + \beta. \quad (1.5.121)$$

Підставимо позначення (1.5.121) у вираз (1.5.120).

$$-B(-p^2 + k^2) \sin \psi + 2bpB \cos \psi + k^2 B \sin \psi = P_0 \sin(\psi + \beta)$$

або

$$\begin{aligned} B(-p^2 + k^2) \sin \psi + 2bpB \cos \psi = \\ = P_0 (\cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \psi). \end{aligned} \quad (1.5.122)$$

Для того, щоб вираз (1.5.122) був тотожністю, необхідно, щоб коефіцієнти при  $\sin \psi$  та  $\cos \psi$  ліворуч і праворуч були однакові, тобто

$$\left. \begin{aligned} B(k^2 - p^2) &= P_0 \cos \beta, \\ 2Bbp &= P_0 \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.123)$$

Поділимо друге рівняння (1.5.123) на перше

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}.$$

Звідки

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \quad (1.5.124)$$

З рівнянь (1.5.123) визначимо амплітуду  $B$ , для чого ці рівняння спочатку піднесемо до квадрату і потім почленно додамо

$$\left. \begin{aligned} B^2(k^2 - p^2)^2 &= P_0^2 \cos^2 \beta, \\ B^2 b^2 p^2 &= P_0^2 \sin^2 \beta. \end{aligned} \right\}$$

$$B^2[(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2] = P_0^2 \cos^2 \beta + P_0^2 \sin^2 \beta,$$

або

$$B^2[(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2] = P_0^2.$$

Звідки

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}. \quad (1.5.125)$$

Коливання, які відбуваються за законом

$$x = B \sin(pt - \beta),$$

називаються змушеними.

Вони є незгасаючими гармонічними коливаннями з амплітудою  $B$ , що визначається рівністю (1.5.125) та частотою  $p$ , яка дорівнює частоті збудовальної сили.

Кут  $\beta$  характеризує кут зсуву за фазою.

Введемо позначення:

$$z = \frac{p}{k}, \quad h = \frac{b}{k}, \quad \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0 m}{c \times m} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_{cm}, \quad (1.5.126)$$

де  $z$  – відношення частот;

$h$  – коефіцієнт демпфірування;

$\lambda_{cm}$  – деформація пружного елемента під дією сили  $Q_0$ ;

$c$  – жорсткість пружного елемента, Н/м;

$b$  – коефіцієнт згасання;

$p$  – колова частота збурювальної сили.

Поділимо чисельник та знаменник рівності (1.5.125) на  $k^2$

$$B = \frac{\frac{P_0}{k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) + \frac{4b^2 p^2}{k^2}}}. \quad (1.5.127)$$

З врахуванням позначень (1.5.126) отримаємо:

$$B = \frac{\lambda_{cm}}{\sqrt{(1 - z^2) + 4h^2 z^2}}. \quad (1.5.128)$$

Як видно з виразу (1.5.128), амплітуда  $B$  залежить від двох параметрів –  $Z$  та  $h$ .

Проаналізуємо зміну амплітуди коливань в залежності від значень частоти збурювальної сили та частоти власних коливань.

а) Якщо частота збурювальної сили значно менша, ніж частота власних коливань  $p \ll k$ , то амплітуда змущених коливань наближається до статичного значення, і коливання відбуваються з амплітудою, яка дорівнює статичній деформації пружного елемента.

б) Якщо  $p \gg k$  (тобто частота збурювальної сили значно більша, ніж частота власних коливань), то  $B = \frac{\lambda_{cm}}{z^2} = \frac{P_0}{p^2}$ .

в) Якщо  $p = k$ , то частота збурювальної сили дорівнює частоті власних коливань. У цьому випадку амплітуда досягає максимальних значень. Наступає явище механічного резонансу. Максимум амплітуди залежить від коефіцієнта демпфірування.

Введемо поняття коефіцієнта динамічності  $\eta = \frac{B}{\lambda_{cm}}$ , який показує в скільки раз амплітуда  $B$  більше  $\lambda_{cm}$ .



Побудуємо графік залежності коефіцієнта динамічності від відношення частот  $z$  при різних значеннях коефіцієнта демпфірування (рис. 1.5.11).

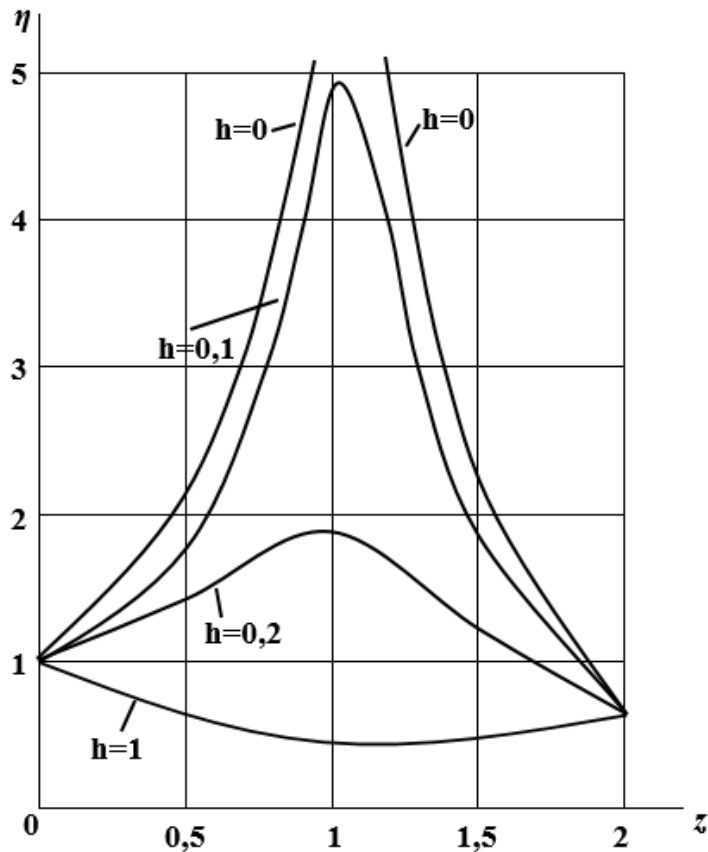


Рис. 1.5.11. Залежності коефіцієнта динамічності від відношення частот

Загальні властивості змушених коливань:

- 1) амплітуда змушених коливань не залежить від початкових умов;
- 2) змушені коливання і при наявності сил опору не згасають;
- 3) частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили і від характеристик системи не залежить;
- 4) навіть при великих значеннях збурювальної сили можна досягти технічними засобами, щоб змушені коливання були досить малими, якщо частота збурювальної сили значно відрізняється від частоти власних коливань;

5) навіть при малій збурювальній силі можна отримати інтенсивні змушені коливання, якщо опір малий, а частота збурювальної сили наближається до частоти власних коливань (механічний резонанс).

**ЧАСТИНА II.**  
**ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ЗБИРАННЯ**  
**ВРОЖАЮ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР МЕТОДОМ ОБЧІСУВАННЯ**  
**РОСЛИННА КОРЕНІ**

**РОЗДІЛ I.**  
**ТЕХНОЛОГІЇ ТА ТЕХНІЧНІ ЗАСОБИ ЗБИРАННЯ ВРОЖАЮ**  
**МЕТОДОМ ОБЧІСУВАННЯ РОСЛИН НА КОРЕНІ**

**2.1.1. Короткий історичний нарис розвитку збирання сільськогосподарських культур методом обчісування**

Ідея збирати тільки зернову частину врожаю, а солому залишати в полі відома людству з давніх часів. У стародавній Галлії в 100...400 р. н. е. використовувалася обчісуюча жниварка [7]. Обчісуюча жниварка уявляла собою візок-ящик, попереду якого встановлювався обчісуючий гребінь. Гребінь обчісував рослини таким чином, що обривалися колосся, а сама рослина залишалася в ґрунті. Попереду жниварки йшов чоловік, який палицею з поперечною колодкою скидав колосся в короб. Недоліком даної операції було те, що працівник весь час задкував назад, при цьому він ногами приймав колосся, що призводило до втрат врожаю. Другий працівник йшов позаду жниварки і, переміщаючи голоблі, керував тваринами, які штовхали жниварку. Короб для збору колосків був невеликий, тому багато часу йшло на простой, пов'язані з вивантаженням колосів [7].

Багато століть потому згадали про галльську жниварку в далекій Австралії.

В середині XIX століття в Австралії була розроблена обчісуюча жниварка для збирання зерна. Авторство цієї розробки оскаржують два винахідника Джон Рідлі і Джон Ретхол Булл. Історія не може однозначно відповісти на дане питання. Тому обидва Джон Рідлі і Джон Булл вважається піонером обчісування в Австралії.

Загальний вид австралійської жниварки Джона Рідлі наведено

на рис. 2.1.1 [8].

Австралійська жнивварка Джона Рідлі була більш досконалою в технічному відношенні, ніж Гальська жнивварка. Вона уявляла собою чотириколісний візок з керованими задніми колесами. Віз був виконаний у вигляді ящика для збору колосків. Штовхала візок вперед упряжка з двох і більше коней. Робочим органом жнивварки був встановлений попереду воза металевий обчісуючий гребінь, який складався з зубів розташованих паралельно один одному. Таким чином, вони мали зазори, причому ці зазори були більше діаметра соломини, але менше діаметра колоса. Зуби мали звужуючи вперед носки, але на відміну від Гальської жнивварки їх бічні крайки не були загостреними. На відміну від Гальської жнивварки австрійський стріпер Джона Рідлі мав лопатний бітер, який приводився в обертання від колеса обчісувача. Бітер був встановлений під гребенем в закритому циліндричному кожусі.

Бітер виконував одночасно три операції. Він обламував колосся (цей процес виконувався дуже легко, з огляду на те, що хлібостій в Австралії в період збирання пересушений), вимолочується з них частина зерна і скидав обламані колосся з обчісуючих зубів в короб, таким чином очищав робочі органи і запобігав від їх забивання. Жнивварка управлялася однією людиною, яка сиділа зверху на коні. Обчесані колосся без втрат збиралися в закритому короби-накопичувачі. У міру заповнення коробка вони вивантажувалися, колоски прямували на домолот, а зерно на провіювання. Машина за день могла прибирати до 4 гектарів, що на той час було величезним досягненням. На рисунку 2.1.1 [8] наведено загальний вигляд обчісувача Джона Рідлі.



Рис. 2.1.1. Обчісуватель Джона Рідлі в полі

Подальшим розвитком і продовженням робіт Джона Рідлі і Джона Булла зайнявся Джеймс Морроу, який отримав на змаганнях винахідників в 1833 році другу премію (першу не присуджено нікому) за створення австралійського обчісуючого комбайна (рис. 2.1.2) [8].

Австралійський комбайн включав в себе стрипер, молотарку і віялку.

Джеймс Морроу, Віктор Мак-Кей і ряд інших винахідників в Австралії сконструювали і освоїли виробництво комбайна обчісуючого типу. Даний комбайн обчісує рослини, обмолочував обірвані колоски і очищав зернівку. Комбайн збирав урожай з 100 акрів (40 гектарів) в день. Керували комбайном двоє людей: один управляв упряжкою з трьох-чотирьох коней, а другий підставляв, зав'язував і вивантажував мішки з зерном. Перевершити австралійський обчісуючий комбайн за витратами енергії на прибирання 1 т зерна не вдалося до цих пір (рис. 2.1.2) [8].

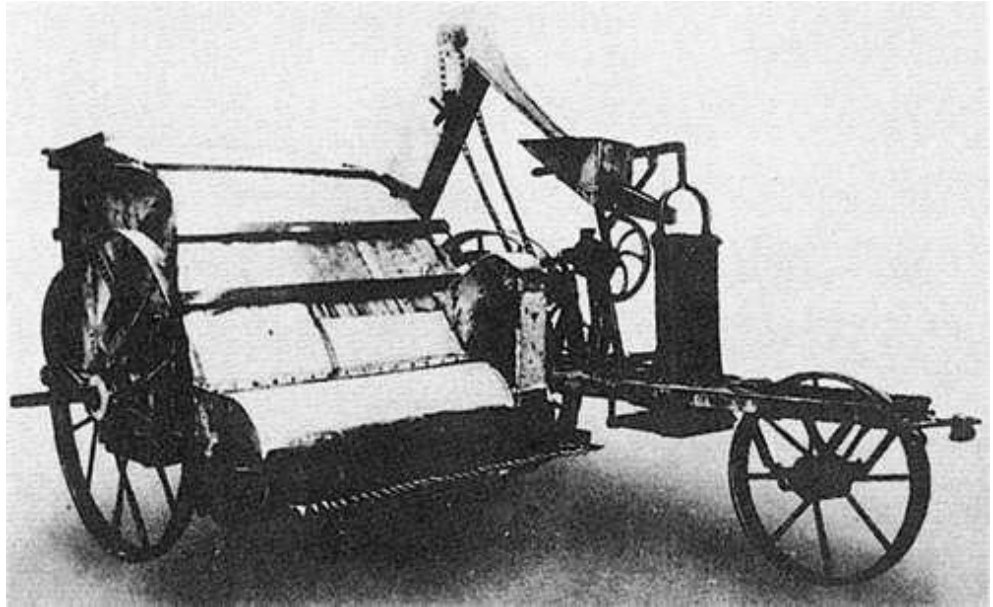


Рис. 2.1.2. Комбайн Мак-Кея (конструкція 1884 р.)

У 1895 році Віктор Мак-Кей організував масове виробництво обчісуючих комбайнів. Він створив прекрасний обчісуючий комбайн, організував компанію «СаншайнХарвестер» з виробництва комбайнів, вмiло їх рекламував і продавав [9, 10]. Помер Віктор Мак-Кей в 1926 році. Після його смерті в 1950 році контрольний пакет акцій компанії «СаншайнХарвестер» перейшов в руки американських власників, яким не вигідно було виробляти дешеві стріперні комбайни. Американці випускали дорогі і складні комбайни, які за своїми показниками були набагато гірше австралійських.

У 1952 році компанія «ІнтернейшнлХарвестер» (США) стала випускати в Австралії комбайн А8-г з обчісуючою жнивваркою, а з 1978 року – самохідний комбайн 711SP і причіпний з обчісуючим і ріжучим хедером.

У Росії вперше обчісуючі жнивварки з'явилися в Тверській губернії в 1868 р. Автором розробки є агроном-управитель Андрій Романович Власенко. Колосоуборка Власенко включала в себе обчісуючий апарат, молотарку і грубу очистку. Штовхалася колосоуборка парою коней, запряжених ззаду машини. Робочий

процес протікав наступним чином. При русі машини стебла рослин надходять на гребінку, барабан з білами вимолочує зерна з колосків. Решітка з підбарабання сприяє більш чистому обмолоту. Під дією сил пружності пружин вона віддаляється і наближається до біл барабана. Обмолочене зерно з половою подається на решето і через отвори проходить в ящик, а звідти воно надходить в мішки, підвішені до отвору в ящику [8].

З 1913 року в Якимівському відділенні бюро сільськогосподарської техніки проводилися випробування обчісуючих жнивварок.

Початок минулого століття ознаменувався значним розвитком методу обчісування рослин на корені, однак практичного застосування ці роботи так і не знайшли [11, 12, 13, 14].

У Радянському Союзі дослідження методів обчісування рослин на корені проводилися в ВІСГОМі в 1951...1953 роках [15, 16].

Програма досліджень включала в себе випробування обчісуючих пристроїв вальцевого і дискового типів. Дослідження показали досить високий рівень втрат експериментальних обчісуючих пристроїв і часте порушення технологічного процесу. З цієї причини подальші дослідження обчісуючих пристроїв в ВІСГОМі були припинені.

У 70-ті роки минулого століття знову зріс інтерес до способу обмолоту зернових культур на корені [17, 18, 19]. Як показують патентні дослідження, кількість винаходів в ці роки різко збільшується. Лідерами в цій галузі були СРСР, Японія, Великобританія та США.

В даний час обчісування широко застосовується у Великобританії. Для підвищення продуктивності комбайнів різних класів спроектовані і випускаються фірмою «АТРК Інженірінг» (Великобританія) шість типорозмірів хедерів для обчісування зерна на корені [20].

У 1990 році на випробуваннях в Англії комбайн «Командор-228» фірми «Клаас» з обчісуючим хедером встановив рекорд по

продуктивності, намолотивши за один день 358 т зерна з площі 44,5 га. Комбайн працював із середньою швидкістю 9,3 км/год., що практично неможливо при роботі з традиційним хедером [21].

Слід зазначити, що найбільш яскраву сторінку в історії розвитку методу обчісування рослин на корені вписали вчені лабораторії збиральних машин Мелітопольського інституту механізації сільського господарства (нині ТДАТУ).

Створена в 1973 році лабораторія збиральних машин пройшла славетний творчий шлях від перших експериментальних установок до розробки сучасного комбайна з принципово новою технологічною схемою.

Піонерами лабораторії були: керівник Шабанов П. А., наукові співробітники Данченко М.М., Гончаров Б.І., Повиляй В.М., Цибульников В.М., Стефанський В.В., Рєпін В. А.

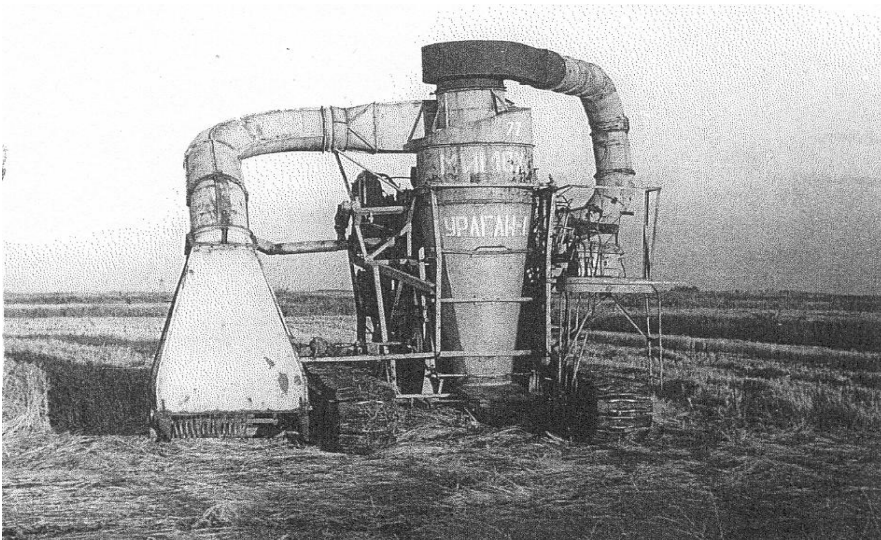
На початковому етапі становлення лабораторії розроблялися експериментальні установки з однобарабанными обчісуючими пристроями. Для збору і транспортування обчісаного вороху використовувався всмоктуючий повітряний потік. Загальний вигляд експериментальної установки «Ураган-1», створеної на базі комбайна СКД-5К «Сибіряк», наведено на рис. 2.1.3 [22].

В процесі роботи лабораторії удосконалювалися робочі органи, технологічні процеси, які протікають при збиранні зернових культур і рису. Так в 1982 році на базі комбайна КСГ-3,2 була розроблена рисо-збиральна машина поліпшеної конструкції «Ураган-4», з однобарабанным обчісуючим пристроєм, ширина захвату 2,2 м (рис. 1.4) [22].





а



б

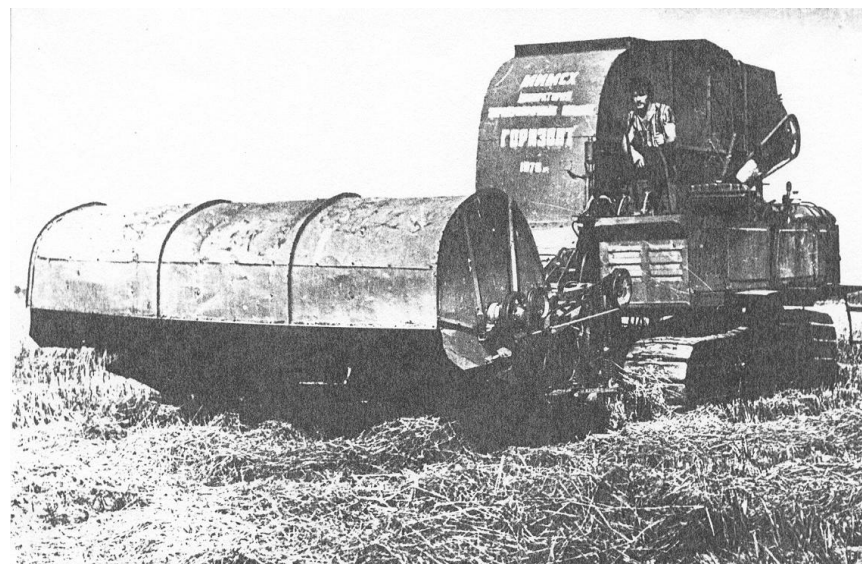
Рис. 2.1.3. Загальний вигляд експериментальних установок з  
всмоктуючим повітряним потоком:  
а «Ураган-1»; б «Ураган-4»

Паралельно в лабораторії велися роботи по дослідженню технологічного процесу обчісуєчих пристроїв без використання всмоктуєчого повітряного потоку.

Так в 1979...1980 р. були розроблені польові установки «Зоря» (рис. 2.1.4, а) [23] і «Горизонт» (рис. 2.1.4, б) [24].



а



б

Рис. 2.1.4. Загальний вигляд експериментальних установок без всмоктуючого повітряного потоку:  
а – установка «Зоря», б – установка «Горизонт»

Установка «Зоря» виготовлена на базі комбайна СКПР-6 «Колос» з метою перевірки використання обмолоту на корені в комбайновій технології. У ній обчесаний ворох надходив в молотарку комбайна, там оброблявся, і чисте зерно збиралося в бункері комбайна.

Польова установка «Горизонт» виготовлена на базі силосного комбайна КСГ-3,2. В її конструкцію була закладена ідея збору

всього обчісаного вороху з подальшим його доопрацюванням на стаціонарі.

Ці установки досліджувалися на збиранні рису, пшениці, вівса, ячменю і показали, що ці напрямки використання способу обмолоту є перспективними, але втрати зерна осипом були досить високими (близько 4%) [24].

Подальшому розвитку ідеї збирання методом обчісування рослини без застосування всмоктуючого повітряного потоку надало нове технічне рішення [27], яке дозволило розробити двобарабанний обчісуючий пристрій, і приступити к принципово новим дослідженням. На підставі цих досліджень було розроблено навісний двобарабанний обчісуючий пристрій з робочою шириною захвату 4,0 м [24, 26]. Загальний вигляд експериментального комбайну з навішаним обчісуючим пристроєм наведено на рис. 2.1.5 [26].

Обчісуючий пристрій (рис. 2.1.6) навішувався на комбайн СКГД-6 «Колос», «Єнісей-1200Р», СК-5 «Нива».



Рис. 2.1.5. Загальний вигляд експериментального комбайну з двобарабанним обчісуючим пристроєм

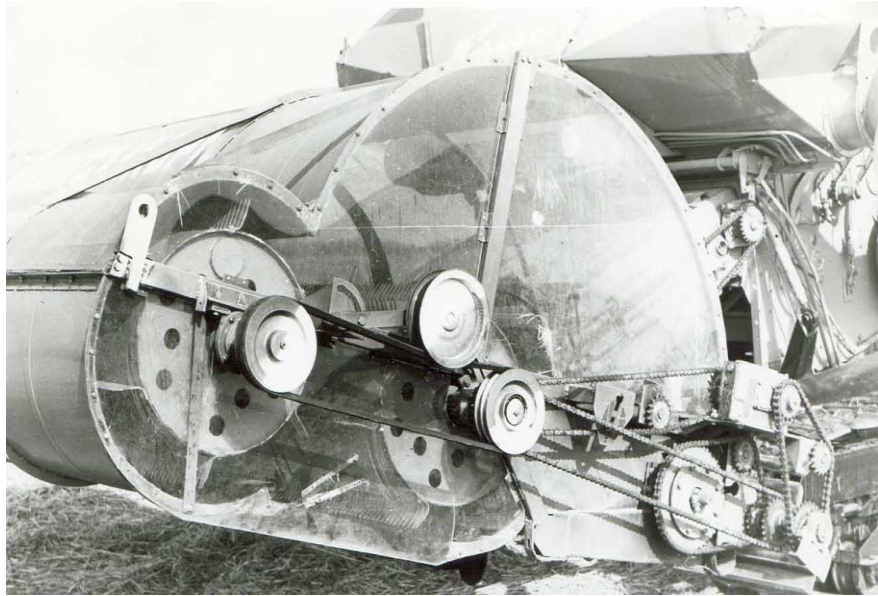


Рис. 2.1.5. Двобарабанний обчісуючий пристрій

Експериментальний комбайн в ході польових випробувань показав високу ефективність і технологічну надійність.

Крім розробки комбайнової технології збирання з використанням обчісуючих пристроїв в лабораторії проводилися дослідження індустріальної технології збирання з доопрацюванням вороху на стаціонарі. У колгоспі «Азовець» Приазовського району був виготовлений стаціонарний пункт доопрацювання обчісаного вороху. Проведені дослідження стаціонарної технології довели її високу ефективність.

Багаторічні дослідження лабораторії технології збирання зернових, рису, насінників трав методом обчісування дозволяють накопичити багатий досвід і придбати високий науковий потенціал.

Починаючи з 90 років минулого століття в УкрНДПВТ ім. Леоніда Погорілого почалися дослідження технології методом обчісування рослин на корені.

У 1998-1999 рр. УкрЦВТ (нині УкрНДПВТ ім. А. Погорілого) спільно з концерном «Лан» і КБ «Бердянськсільмаш» розробили конструкцію однобарабанної обчісуючої жнивarki ЖОН-6 до комбайна «Дон-1500» і «Лан-001». У наступні роки в інституті були

розроблені конструкції 4-х і 6-ти метрових однобарабаних жаток для комбайнів СК-5 «Нива», «Славутич», «Лан», «Джон Дір», «Кейс», «Клаас» та ін. (рис. 2.1.7) [139].

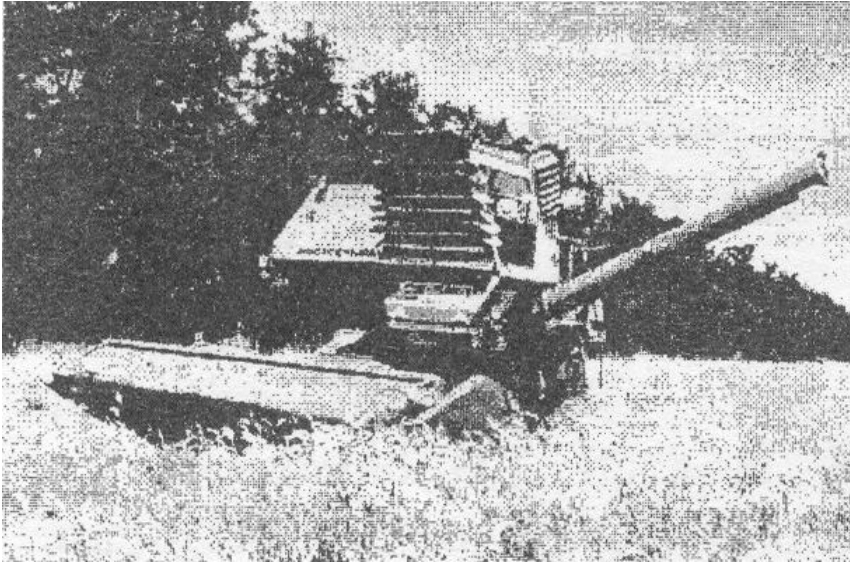


Рис. 1.9. Загальний вигляд комбайна з однобарабанною обчісуючою жнивваркою ЖОН-4 (конструкції УкрНДПВТ ім. Леоніда Погорілого)

У розробці конструкції обчісуючої жнивварки брали участь вчені та інженери інституту: академік УААН і РАСГН Погорілий Л.В., академік АНУ Коваль С. М., Макунін Г. В., Іваненко І. М., Шульга С. Ф., Ткаченко З. І., Івасюк В. В. та ін. [116].

На завершення короткого історичного огляду можна згадати слова академіка УААН і РАСГН Л. Погорілого: «Високо енерго-ресурсо-напружена хедерна технологія збирання в основному виконала свою історичну технологічну роль і за законом діалектичного розвитку і нашими прогнозами повинна поступитися місцем принципу обчісування» [8].

### **2.1.2. Аналіз застосування методів обчісування рослин на корені в комбайнових технологіях збирання**

Одним з ефективних варіантів підвищення продуктивності і якості роботи комбайнів є оснащення їх обчісуючими жнивварками.

Всебічні випробування і досвід практичного застосування обчісуючих пристроїв, як в країнах СНД, так і в далекому зарубіжжі підтвердили їх високу ефективність, особливо в умовах підвищеної вологості й високої засміченості посівів. Істотне зниження технологічної маси соломи, яка надходить в молотильний пристрій комбайна, знижує навантаження та знос робочих елементів молотильного апарату і дозволяє проводити прибирання на більш високих швидкостях. А це, в свою чергу, забезпечує підвищення продуктивності збиральних машин (в залежності від умов роботи і виду збираних культур) в 1,9...2,5 рази.

Природно, що метод, який володіє такими перевагами не міг бути не затребуваним людством в процесі створення збиральних машин.

Розглянемо різні варіанти комбайнів з обчісуючими пристроями. Обчісуючі жниварки транспортерного типу знайшли широке застосування в комбайнових технологіях збирання [28, 29, 30, 31].

Так в Білоруському НВО «Белсельхозмеханізація» проводилися дослідження технології збирання зернових культур методом обчісування рослин на корені [27]. В результаті досліджень була розроблена обчісуюча жниварка з робочими органами транспортерного типу. Жниварка встановлювалася на зернозбиральний комбайн СК-5 «Нива» (рис. 2.1.8) [28].

Дослідження [28] показали, що обчісуюча жниварка транспортерного типу на відміну від інших обчісуючих жниварок мала наступні переваги: можливість прибирати полеглі хліба; обчісуючий пристрій транспортерного типу дозволяв обривати колосся, боби або волотки рослин різної довжини від 0,1 до 1,8 м.

Однак дана жниварка мала суттєві недоліки:

- велика вага жниварки (2130 кг);
- великі габарити: жниварка закривала комбайнеру огляд;
- суттєві втрати зерна, які становили 4,5...9,0%, що перевищує допустимі агротехнічні вимоги.



Рис. 2.1.8. Обчісувача жнивварка транспортерного типу на комбайні СК-5 «Нива»

Для усунення помічених недоліків було проведено ФСА, який дозволив поліпшити конструкцію обчісувачої жнивварки, а саме [29]:

- вага жнивварки знизилася з 2130 кг до 1700 кг;
- зменшилася висота жнивварки і комбайнер отримав можливість спостерігати зону обчісування;
- знизилася втрата зерна з 4,5-9,0% до 1,5-3,0%.

Удосконалена жнивварка успішно пройшла випробування в Білорусі і в Росії (рис. 2.1.9) [29].

Велика робота по дослідженню технології збирання методом обчісування рослин на корені проводиться в УкрНДІПВТ ім. Леоніда Погорілого. Проведені дослідження дозволили обґрунтувати конструкцію жнивварки ЖОН-4.

Комбайн з обчісувачою жнивваркою ЖОН-4 наведено на рисунку 2.1.9.

В інституті були проведені порівняльні випробування комбайна СК-5 «Нива» з традиційною жнивваркою і обчісувачою жнивваркою ЖОН-4.



Рис. 2.1.9. Удосконалена обчісувача жнивварка в роботі

Методика проведення випробувань була наступною. Через кожні 2 години відбиралися проби зерна і соломи для визначення вологості, а також визначалися втрати зерна при роботі комбайнового агрегату з обчісувачою жнивваркою і з традиційною жнивваркою. Результати досліджень наведені в табл.2.1.1 [30].

Таблиця 2.1.1

Динаміка зміни вологості зерна і соломи, а також втрат зерна при роботі обчісувачої ЖОН-4 і традиційних комбайнових жнивварок при збиранні ярового ячменю

№	Час	Вологість, %		Втрати за жнивваркою							
				Разом		Вільне зерно		Зрізані колоски		Незрізані колоски	
		зерно	солома	обчіс.	тра-диц.	обчіс.	тра-диц.	обчіс.	тра-диц.	обчіс.	тра-диц.
1	8 <sup>00</sup>	16,9	36,3	1,27	3,65	0,93	0,02	0,12	0,28	0,22	3,35
2	10 <sup>00</sup>	15,3	32,5	1,36	1,63	1,04	0,07	0,22	0,30	0,10	1,26
3	12 <sup>00</sup>	13,5	23,0	1,60	0,98	1,20	0,08	0,37	0,31	0,03	0,59
4	14 <sup>00</sup>	12,5	17,2	1,97	0,60	1,41	0,10	0,53	0,35	0,03	0,15
5	16 <sup>00</sup>	12,0	13,7	2,42	0,57	1,54	0,11	0,84	0,41	0,04	0,05
6	18 <sup>00</sup>	12,3	12,7	2,60	0,62	1,52	0,11	1,04	0,45	0,04	0,06
7	20 <sup>00</sup>	12,5	13,0	2,53	0,70	1,47	0,10	1,00	0,44	0,06	0,16
8	22 <sup>00</sup>	13,8	16,0	2,32	0,97	1,41	0,10	0,84	0,39	0,07	0,48



Порівняльні техніко-економічні показники роботи комбайнових агрегатів з обчісуючими і традиційними жниварками наведені в табл. 2.1.2 [30].

Таблиця 2.1.2

Порівняльні економічні показники зернозбирального комбайна СК-5М «Нива» з обчісуючою жниваркою

Найменування показників	Одиниця виміру	Значення показників	
		СК-5М «Нива» ЖОН-4	СК-5М «Нива» традиційна жниварка
Продуктивність за годину змінного часу	т	6,86	3,64
Балансова вартість			
– комбайну	грн.	160000	160000
– жниварки	грн.	47700	24300
Річний обсяг	т	1509	692
Витрати палива	кг/т	1,18	2,50
Прямі експлуатаційні витрати на одиницю продукції (т), в тому числі	грн.	58,44	101,77
Заробітна плата	грн./т	0,78	3,48
Реновація	грн./т	29,31	50,17
Капітальні і поточні ремонти та періодичне технічне обслуговування	грн./т	26,28	45,74
Паливо	грн./т	2,07	4,38

Як видно з наведених даних (табл. 2.1.1 та 2.1.2) якісні показники роботи комбайнів з традиційною і обчісуючою жниваркою приблизно однакові, втрати у комбайна з обчісуючою жниваркою трохи вище, ніж у комбайна з традиційною жниваркою, проте продуктивність у комбайна з обчісуючою жниваркою майже в

два рази вище, ніж у комбайна з традиційною жнивваркою. Витрата палива при збиранні комбайном з обчісуючою жнивваркою в два рази нижче. Таким чином, при однакових якісних показниках комбайн з обчісуючою жнивваркою має набагато краще техніко-економічні показники.

Аналогічні порівняльні випробування роботи комбайнів з обчісуючою і серійною жнивварками проводилися в КубНДІТіМе і ЦМВС. Результати цих випробувань зі збирання зернових наведені в таблиці 2.1.3 [31].

Агротехнічна оцінка обчісуючої жнивварки при випробуваннях в КубНДІТіМі показала, що вона має переваги перед аналогом: по продуктивності – в 2,9 рази, по пошкодженню зерна – в 1,6 і поступається за втратами в 1,92 рази.

При експлуатаційно-технологічному оцінюванні випробовуваний агрегат перевершував аналог по продуктивності в 1,5 рази і питомій витраті палива на одиницю площі в 1,1 рази.

При випробуваннях на ЦМБД, де в якості аналога був застосований зернозбиральний комбайн «Дон-1500», результати агротехнічної оцінки порівнюваних агрегатів були практично однаковими. При експлуатаційно-технологічній оцінці випробовуваний агрегат поступався аналогу, причому вміст смітної домішки в бункерному вороху СК-5М був значно вище (в 5,3 рази), ніж у «Дон-1500». Це говорить про те, що обчісування рослин на корені замість їх зрізу пред'являє до конструкції та режимів роботи молотильно-сепаруючого пристрою і обчищення зернозбиральних комбайнів особливі вимоги.

В КубНДІТіМі були проведені також випробування обчісуючої жнивварки в агрегаті з зернозбиральних комбайном «Єнісей-1200Р» на збиранні полеглого рису і в агрегаті з польової машиною МПУ-150 на заготівлі невіяного вороху озимої пшениці.

Результати випробувань наведені в табл. 2.1.4 [31].

Таблиця 2.1.3

Результати порівняльних випробувань серійних і обчислюючих  
жниварок

Показники	КубНДТіМ		ЦМВС		
	СК-5М з обчислюючо ю жниваркою шириною захвату 4,2 м	СК-5М з серійною жниваркою ю шириною захвату 5 м	СК-5М з обчислюючо ю жниваркою шириною захвату 4,2 м	СК-5М с серійною жниваркою ю шириною захвату 5 м	
Агротехнічна оцінка					
Культура	Озима пшениця				
Врожайність, ц/га	66,3	66,3	42,8...44,6	42,8...44,6	
Продуктивність при рівні втрат зерна молотаркою, т/г	1%	21,2	7,3	7,6	8,1
	1,5%	–	–	–	–
Зміст основного зерна в бункері, %	95,84	96,07	95,50	96,10	
Дроблення зерна, %	1,46	2,34	2,30	2,20	
Втрати зерна жниваркою, %	0,48	0,25	1,06	1,31	
Експлуатаційно-технологічна оцінка					
Культура	Озима пшениця		Ячмінь		
Врожайність, ц/га	66,3	66,3	20,9...30,6	20,9...30,6	
Робоча швидкість, м/с	1,28	0,67	0,70	0,55	
Продуктивність, т/г (га)	9,92 (1,75)	7,19 (1,18)	2,86 (0,96)	3,19 (1,12)	
Питома витрата палива	10,07	11,52	9,40	11,60	
Втрати зерна жниваркою, %	0,48	0,25	3,12	2,72	

Таблиця 2.1.4

Результат порівняльних випробувань серійної та обчисуючої жниварки фірми «ShelbourneReynolds» в агрегаті з комбайном «Єнісей-1200»

Показники	«Єнісей-1200» з жниваркою для обчисування на ділянці з полеглистою рису, %		«Єнісей-1200» з серійною жниваркою для обчисування на ділянці з полеглистою рису, %	
	22,6	73,2	22,6	73,2
Швидкість руху, м/с	0,6...2,3	0,6...1,44	0,47...1,14	0,27
Втрати зерна жниваркою, %	1,27...3,14	1,4...6,82	1,09...1,72	31,38
Основне зерно	89,5	89,5	88,0	88,0
Дроблене і обрушене зерно	3,22	3,22	8,54	8,54
Сорна домішка	7,15	7,15	3,62	3,62

З таблиці 2.1.4 видно, що порівнювані агрегати за рівнем втрат (не більше 1%) перевищують допустимі агрономічні норми. Сильна полеглість рослин (73,2%) негативно позначилася на роботі серійної жниварки, навіть при швидкості 0,28 м/с втрати склали 31,38%. За якістю бункерного зерна обчисуюча жниварка перевершує аналоги: дроблення і обрушення зерна склали 3,22% проти 8,54% у серійної жниварки.

При випробуванні обчисуючої жниварки в агрегаті з польовою машиною МПУ-150 на зборі невіяного вороху озимої пшениці в візок, втрати зерна жниваркою при швидкості руху 2 м/с склали 3,15% (згідно агрономічного допуску не більше 1%).

В Угорщині проводилися порівняльні випробування традиційних та обчисуючих жниварок, навішених на зернозбиральні комбайни E524, Dominator 106, Commandor 114 CS (Німеччина). При

рівні втрат зерна за молотаркою 1,5% збільшення пропускної спроможності у комбайнів з обчісуною жнивваркою склало Е 524 – 31%; Dominator 106 – 12%; Commandor 114 CS – 29% (рис. 2.1.10) [31].

У лабораторії збиральних машин Мелітопольського інституту механізації сільського господарства (нині ТДАТУ) було розроблено двобарабанний обчісуочий пристрій [26], який досліджувався в схемі комбайнової технології збирання методом обчісування рослин на корені.

Загальний вигляд експериментального комбайна з двобарабанним обчісуочим пристроєм наведено на рис. 2.1.5 [26], а його технологічна схема на рис. 2.1.11 [26].

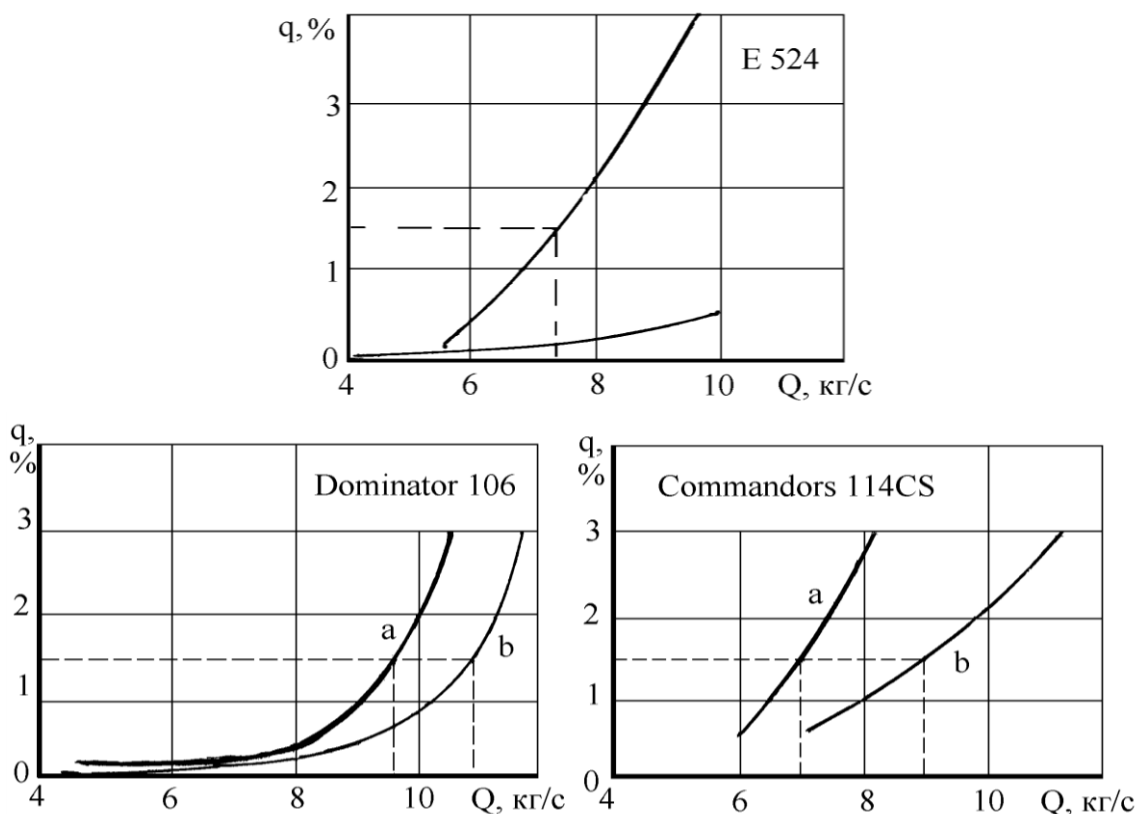


Рис. 2.1.10. Залежність втрат за молотаркою від подачі при роботі комбайнів з традиційною (а) і обчісуною (б) жнивварками

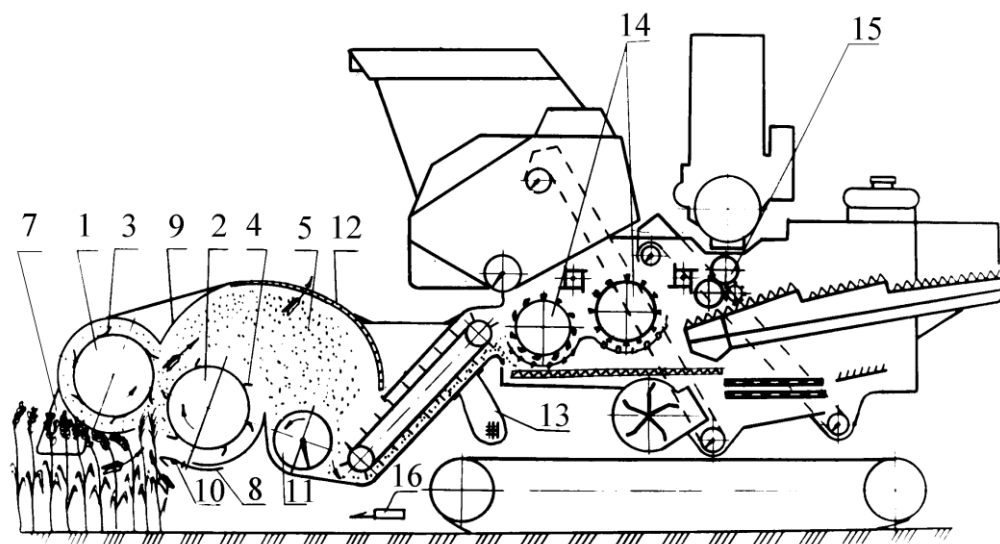


Рис. 2.1.11. Технологічна схема експериментального комбайна з двобарабаним обчісувачем

Технічні параметри експериментального комбайна наведені в табл. 2.1.5 [26].

Таблиця 2.1.5

Технічні параметри експериментального комбайна обчісувального типу

Найменування параметру	Значення параметрів
Базова машина	Комбайн СКГД-6 «Колос»
Конструктивна ширина захвату, м	4,0
Діаметр обчісувального робочого органу, м	
переднього	0,7
заднього	0,7
Частота обертання барабанів, рад/с	
переднього	40...45
заднього	40...45
Окружна швидкість робочих органів, м/с	6...12

Умови проведення випробувань експериментального комбайна наведені в табл. 2.1.6 [26].

Таблиця 2.1.6

## Умови проведення випробувань

№	Найменування показників	Значення показників
1	Культура	Рис сорт «Кулон»
2	Стиглість, %	100
3	Кількість рослин на 1 м <sup>2</sup> , шт. в тому числі бур'янів, шт.	307 23
4	Середня висота рослин, м	0,8
5	Зона розташування метелок, м	0,43
6	Середня врожайність зерна, ц/га	70,0
7	Полеглість рослин, %	8,75
8	Пониклість рослин, %	12,5
9	Відношення маси зерна до маси соломи	1:2,36
10	Втрати зерна від самоосипання, %	0,78
11	Вологість зерна, %	16,5
12	Вологість соломи, %	61,1
13	Маса 1000 зерен, г	35,3

Результати агротехнічної оцінки експериментального комбайна представлені в табл. 2.1.7 [26].

За результатами табл. 2.1.7 побудовані графіки зміни втрат зерна від поступальної швидкості комбайна (рис. 2.1.7) [26].

Таблиця 2.1.7

## Результати агротехнічної оцінки експериментального комбайна

Номер досвіду	Швидкість руху агрегату $V_M$ , м/с	Подача по зерну $Q$ , кг/с	Втрати зерна за обчислюючим пристроєм в розрахунку на 1 га				Загальні втрати		Кількість бункерного зерна	
			необчисом $q_n$		вільним зерном $q_c$		кг	%	дроблення, %	обрушення, %
			кг	%	кг	%				
1	0,36	1,10	–	–	62,0	0,75	62,0	0,75	2,05	1,09
2	0,36	1,10	–	–	89,8	1,15	89,8	1,15	2,80	1,10
3	0,38	1,20	–	–	87,0	1,20	87,0	1,20	1,94	0,90
4	0,76	2,24	9,1	0,11	42,8	0,54	42,8	0,54	4,90	2,75
5	0,80	2,50	–	–	45,0	0,57	45,0	0,57	3,70	1,75
6	1,11	3,10	4,0	0,06	35,0	0,50	39,0	0,56	6,10	2,20
7	1,15	3,85	20,0	0,24	35,0	0,45	58,0	0,69	8,10	2,60
8	1,36	4,0	32,9	0,47	45,0	0,64	77,9	1,11	5,95	1,57
9	1,42	3,83	12,0	0,19	55,0	0,87	67,0	1,06	4,32	2,32
10	1,43	6,57	–	–	49,3	0,47	49,3	0,47	2,24	2,58
11	2,14	6,57	18,7	0,22	55,3	0,64	72,0	0,86	2,48	2,35
12	2,14	6,57	24,7	0,29	41,7	0,49	66,4	0,78	4,15	2,10
13	3,00	11,4	71,0	1,06	36,0	0,54	107,0	1,60	7,00	3,27
14	3,00	12,0	86,0	1,06	40,0	0,48	126,0	1,52	5,00	2,10



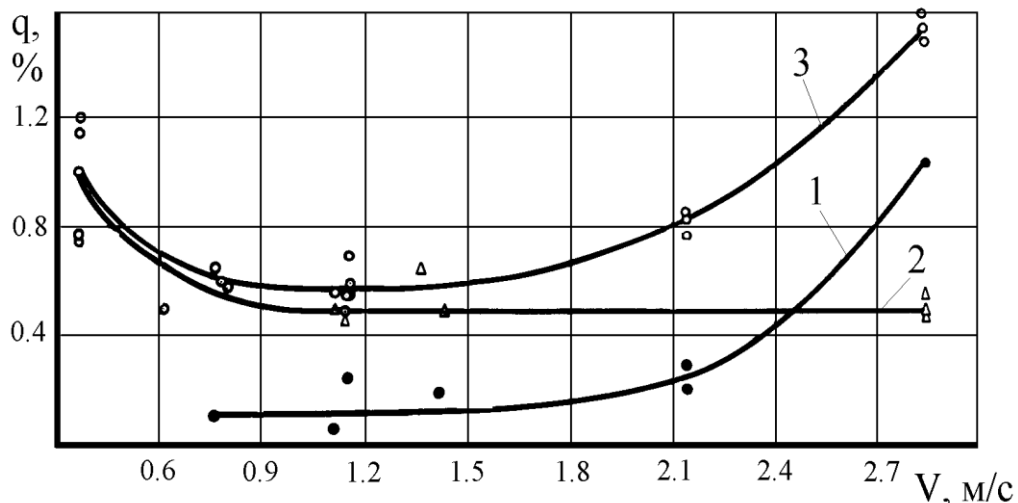


Рис. 2.1.12. Графік залежності втрат зерна від поступальної швидкості експериментального комбайна:

1 – втрати необчісом; 2 – втрати осипом; 3 – загальні втрати

Як видно з наведених даних, втрати зерна при збиранні комбайном з двобарабанним обчісуючим пристроєм при швидкості руху 1,4...2,14 м/с не перевищують агротехнічних вимог, однак травмування зерна (дроблення й обрушення) – значно перевищують агротехнічну норму. Цей факт пояснюється тим, що молотильно-сепаруючі робочі органи серійного комбайна не призначені для обробки обчісаного вороху.

### 2.1.3. Загальна технологічна схема стаціонарної технології збирання зернових з застосуванням методу обчісування рослин на корені

Метод обчісування рослин на корені можна застосовувати як в комбайнових, так і в стаціонарних технологіях збирання зернових культур.

Виходячи з проведених досліджень агробіологічних і фізико-механічних властивостей зернових культур, а також аналізу робіт [32, 33, 34] була розроблена структурна схема технологічного процесу збирання зернових культур (рис. 2.1.12) [35, 36, 37] з доробкою обчесаного вороху на стаціонарі.

Польова збиральна машина виконує першу операцію в загальному технологічному ланцюзі збирального процесу. Її призначення – обчісування рослин на корені, збір вороху в причіп і прибирання соломи.

Одержаний в результаті обчісування вороху являє собою суміш вільного зерна (60-85%), обірваних колосків (10...25%) і соломистих частинок (7...25%) [38].

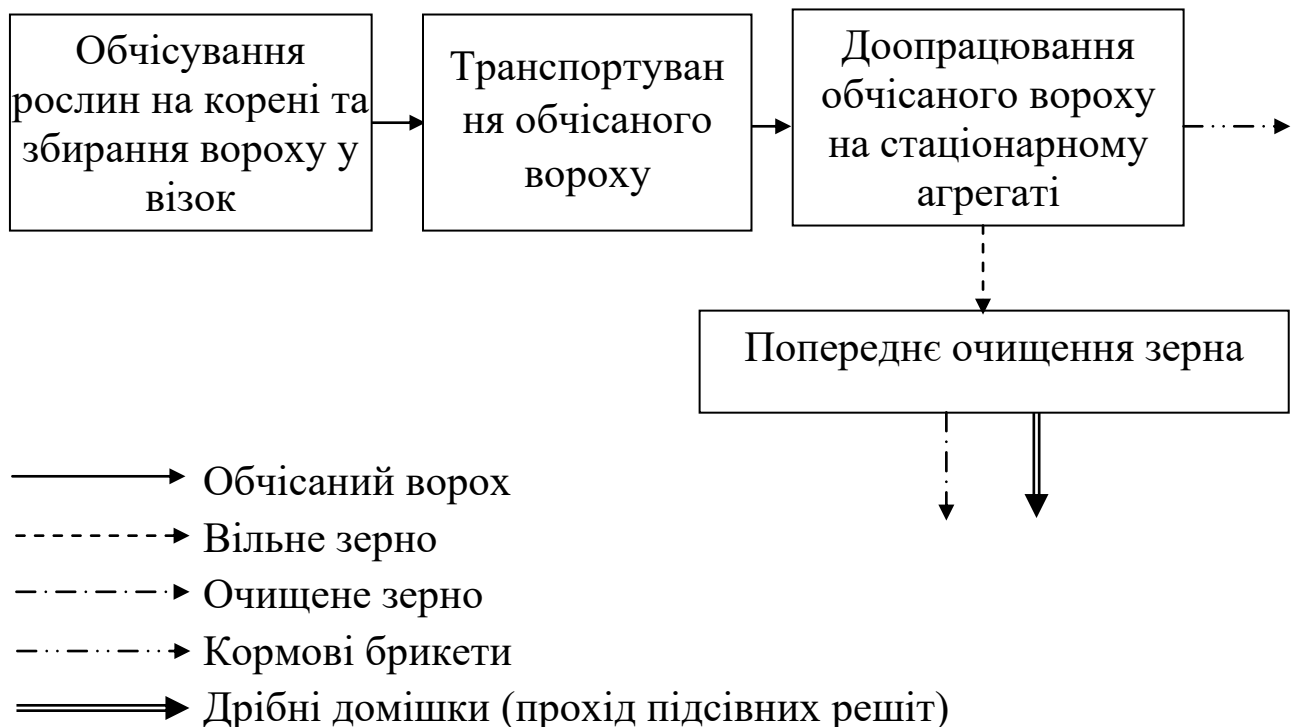


Рис. 2.1.12. Структурна схема технологічного процесу збирання зернової частини врожаю з використанням обчісуючих пристроїв

Зібраний в причеп обчісаний ворох доставляється на зернотік для його доопрацювання. Основним призначенням агрегату доопрацювання обчісаного вороху є виділення вільного зерна і у разі потреби приготування кормових брикетів.

В порівнянні з існуючою традиційною технологією запропонована технологія дозволяє суттєво знизити енерговитрати. Про це свідчить порівняльна оцінка енерговитрат на збирання врожаю зернових культур за існуючою комбайнвоюю і розробленою

стаціонарною технологіями із застосуванням обчисування рослин на корені (табл. 2.1.8) [39].

Таблиця 2.1.8

Порівняльні дані енерговитрат комбайнової та стаціонарної технологій

Найменування показників	Одиниця виміру	Комбайнова технологія	Стаціонарна технологія із застосуванням обчисуючи пристроїв
1	2	3	4
Прямі витрати енергії при роботі	МДЖ/га	Зернозбирального комбайна 627,7	Трактора 325,46
	МДЖ/кг	0,21	0,108
Енерговитрати живої праці при роботі	МДЖ/га	Комбайна 71,73	Трактора 33,6
	МДЖ/кг	0,024	0,011
Енергоємність	МДЖ/га	Комбайна 769	Трактора 39,03
	МДЖ/кг	0,25	0,013
	МДЖ/га	Комбайна 7,69	Трактора 60,46
	МДЖ/кг	0,025	0,02
	МДЖ/га	-	Причепи 2ПТС-4,0 149,36
	МДЖ/кг	-	0,02
Прямі енерговитрати на перевезення зерна з поля на зернотік	МДЖ/га	Автомобіля 152,77	Трактора 204
	МДЖ/кг	0,051	0,068
Енергоємність	МДЖ/га	Автомобіля 24,88	Трактора 38,95
	МДЖ/кг	0,0083	0,013
	МДЖ/га	-	Причепи 2ПТС-4,0 149,36
	МДЖ/кг	-	0,02

Продовження табл. 2.1.8

1	2	3	4
Енерговитрати живої праці під час перевезення зерна	МДЖ/га МДЖ/кг	Водія автомобіля 30,0 0,01	Тракториста 33,6 0,011
Розрахунок енерговитрат на доробку обчесаного вороху			
Прямі енерговитрати на сепарацію обчесаного вороху	МДЖ/га МДЖ/кг	- -	6,0 0,002
Прямі енерговитрати на домолот обірваних колосків (волоків)	МДЖ/га МДЖ/кг	- -	27,0 0,009
Прямі енерговитрати на роботу транспортуючих механізмів	МДЖ/га МДЖ/кг	- -	9,0 0,003
Енергоємність агрегату доробки вороху	МДЖ/га МДЖ/кг	- -	75,0 0,006
Енергоємність живої праці при доробці вороху	МДЖ/га МДЖ/кг	- -	Операторів 13,02 0,004
Енерговитрати на збирання соломи			
Прямі енерговитрати на подрібнювання соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	Комбайна 146,46 0,024	- -
Прямі енерговитрати на транспортування соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	512 0,085	8,65 0,011

Продовження табл. 2.1.8

1	2	3	4
Енергоємність трактора для транспортування соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	41,6 0,007	- -
Енергоємність причепа-візка для перевезення соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	298,72 0,004	- -
Енерговитрати живої праці під час перевезення соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	35,86 0,005	- -
Енергоємність трактора при скиртуванні соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	41,6 0,007	39,03 0,005
Енергоємність навантажувача	МДЖ/га МДЖ/кг	7,44 0,007	6,97 0,009
рямі витрати енергії на скиртування соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	762 0,127	99,06 0,127
Витрати живої праці при скиртуванні соломи	МДЖ/га МДЖ/кг	183,6 0,03	13,4 0,0017
Повні енерговитрати на збирання зернової та незернової частини врожаю, транспортування і скиртування соломи	МДЖ/га	3705,6	1255,95

Продовження табл. 2.1.8

1	2	3	4
Повні енерговитрати на збирання та транспортування зерна	МДЖ/га	0,56	0,31
Повні енерговитрати на збирання, транспортування і скиртування соломи (для стаціонару враховується солома, що перебуває в обчесаному вороху)	МДЖ/га	0,31	0,203

#### 2.1.4. Конструкція та принцип дії причіпного збирального агрегату

Для збору зернової частини пропонується причіпна збиральна машина з робочими органами обчісуючого типу, яка розроблена в Таврійському державному агротехнологічному університеті [40, 41].

Структурна схема обчісуючого модуля наведена на рис. 2.1.13, а її загальний вид на рис. 2.1.14.



Рис. 2.1.13. Структурна схема причіпної збиральної машини



Рис. 2.1.14. Загальний вид причіпної збиральної машини

Причіпна збиральна машина являє собою раму 7 (рис. 2.1.15), на якій змонтовано двохбарабанный обчісуючий пристрій конструкції лабораторії збиральних машин ТДАТУ та пневмомеханічний транспортер.

Для агрегування збиральної машини використовується трактор МТЗ-80.

Технологічний процес збирального агрегату здійснюється в такий спосіб. При русі машини по полю обчисуючий пристрій обчислює рослини, повітряний потік створюваний барабанами 2 і 3 направляє ворох в прийомну камеру 11, звідки він скребковим транспортером 4 подається в пневмотранспортер і під впливом повітряного потоку створюваного відцентровим вентилятором 5 транспортується у візок 10.

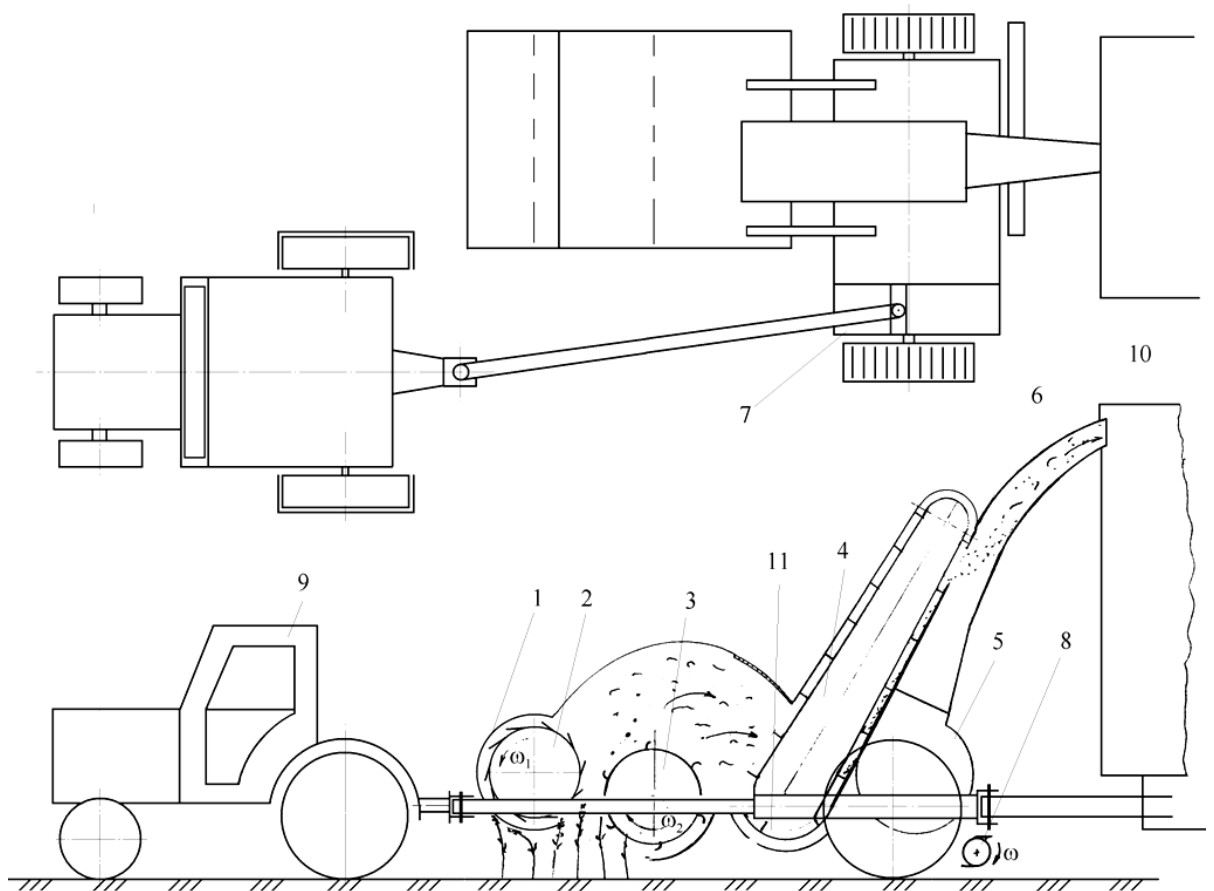


Рис. 2.1.15. Технологічна схема причіпної збиральної машини

Для збирання незернової частини врожаю рекомендується установка ріжучого апарата ротаційного типу, який буде зрізати обчесані стебла, подрібнювати їх і розкидати по полю для наступного закладення їх у ґрунт.

Загальний вид збирального агрегату наведено на рис. 2.1.16.





Рис. 2.1.16. Загальний вид збирального агрегату

## РОЗДІЛ II. ДИНАМІКА ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ ЗА ПРЯМОЛІНІЙНОГО І РІВНОМІРНОГО РУХУ ЦЕНТРА МАС ТРАКТОРА

### 2.2.1. Постановка проблеми

Причіпний агрегат, який складається з трактора МТЗ-80, причіпної збиральної машини з робочими органами обчісуючого типу та причепа-візка представляє собою трьохланкову механічну систему. При виконанні технологічного процесу збирання зернових культур цей агрегат рухається прямолінійно. Але з часом ланки агрегату починають відхилятися від основного руху. В цьому випадку ми можемо розглядати рух агрегату як складний, який містить в собі переносний та відносний рухи. Переносний рух агрегату відбувається разом з площиною  $x, o, y$  (рис. 2.2.1). Під впливом зовнішніх чинників (нерівностей поверхні поля) ланки агрегату починають рухатися відносно рухомої системи відліку. Такий рух називається відносним рухом.

Порушення прямолінійності руху призводить до:

- погіршення якісних показників технологічного процесу, а саме збільшенню втрат зерна необчісуванням;
- збільшенню витрат пального, що призводить до збільшення собівартості кінцевого продукту (зерна).

Щоб запобігти цих недоліків роботи збирального агрегату, необхідно аналітично обґрунтувати умови стійкості руху агрегату.

### 2.2.2. Вихідні дані і припущення

Для спрощення диференціальних рівнянь зробимо ряд припущень:

- вважаємо, що центр мас трактора  $S_1$ , рухається прямолінійно зі швидкістю  $V_0$ , а сам трактор обертається щодо вертикальної осі, що проходить через його центр мас;

- причеп-візок для збору обчесаного вороху – одноосьовий, у відносному русі він обертається навколо осі, що проходить через його точку причепа  $C_2$ ;
- деформації лівого  $\Delta_{L1}$  і правого  $\Delta_{L2}$  коліс збиральної машини рівні  $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \Delta_M$ .

Нехай агрегат рухається поступально, прямолінійно й рівномірно із швидкістю  $V_0 = \text{const}$ . Поворот трактора щодо вертикальної осі минаючої через центр мас трактора визначається узагальненою координатою  $\varphi_1$ .

Причіпна збиральна машина робить плоскопаралельний рух і її положення щодо точки причепа  $C_1$  до трактора визначається координатою  $\varphi_2$ .

Причіп-візок також робить плоскопаралельний рух і його положення щодо точки причепа визначається узагальненою координатою  $\varphi_3$ .

Таким чином, маємо механічну систему із трьома ступенями вільності; рух якої в загальному виді описується системою рівнянь [42].

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= Q_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} &= Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

### 2.2.3. Розрахункова схема причіпного збирального агрегату при прямолінійному і рівномірному русі центра мас трактора

На збиральний агрегат діють наступні сили й моменти сил (рис. 2.2.1) [42].

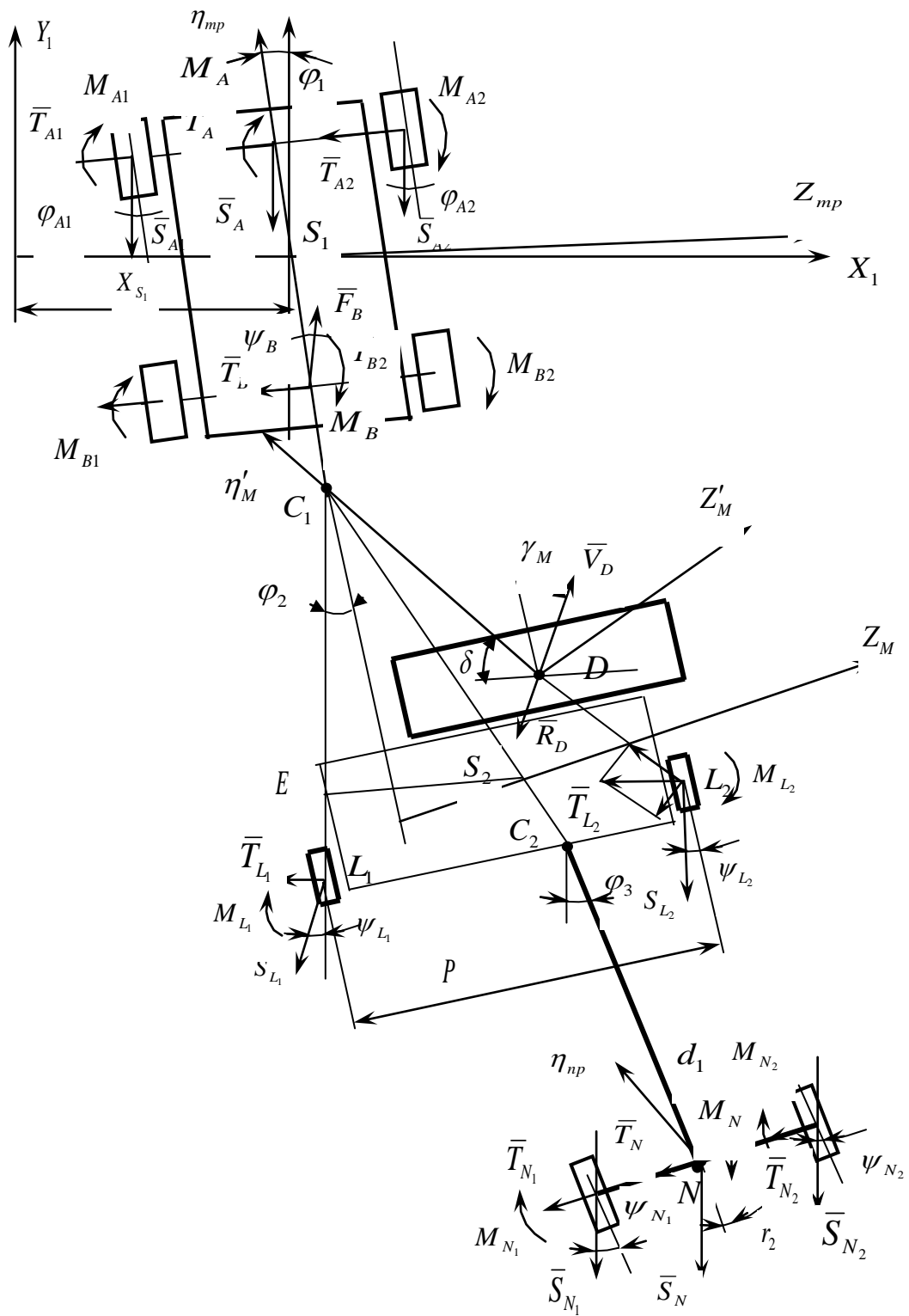


Рис. 2.2.1. Схема сил, що діють на збиральний агрегат при прямолінійному переміщенні центра мас трактора

де  $\bar{T}_A$  – головний вектор сил пружності шин передніх коліс, що виникає за їх поперечного зсуву,  $\bar{T}_A = \bar{T}_{A_1} + \bar{T}_{A_2}$ ;

$\bar{T}_B$  – головний вектор сил пружності шин задніх коліс, що виникає за їх поперечного зсуву,  $\bar{T}_B = \bar{T}_{B_1} + \bar{T}_{B_2}$ ;

$M_A$  – головний момент сил пружності шин передніх коліс трактора,  $M_A = M_{A_1} + M_{A_2}$ ;

$M_B$  – головний момент сил пружності шин задніх коліс трактора,  $M_B = M_{B_1} + M_{B_2}$ ;

$M_N$  – головний момент сил пружності шин коліс причепа-візка;

$\bar{S}_A$  – головний вектор сил опору перекочуванню передніх коліс трактора,  $\bar{S}_A = \bar{S}_{A_1} + \bar{S}_{A_2}$ ;

$\bar{F}_B$  – головний вектор рушійних сил задніх коліс трактора,  $\bar{F}_B = \bar{F}_{B_1} + \bar{F}_{B_2}$ ;

$M_L$  – головний момент сил пружності шин лівого й правого коліс збиральної машини,  $M_L = M_{L1} + M_{L2}$ ;

$\bar{T}_L$  – головний вектор сил пружності шин лівого й правого коліс збиральної машини,  $\bar{T}_L = \bar{T}_{L_1} + \bar{T}_{L_2}$ ;

$\bar{S}_L$  – головний вектор сил опору перекочуванню лівого й правого коліс збиральної машини  $\bar{S}_L = \bar{S}_{L_1} + \bar{S}_{L_2}$ ;

$\bar{S}_N$  – головний вектор сил опору перекочуванню коліс причепа-візка  $\bar{S}_N = \bar{S}_{N_1} + \bar{S}_{N_2}$ ;

$\bar{T}_N$  – головний вектор сил пружності шин коліс причепа  $\bar{T}_N = \bar{T}_{N_1} + \bar{T}_{N_2}$ .

#### 2.2.4. Диференціальні рівняння руху збирального агрегату

Для складання диференціальних рівнянь руху агрегату

знаходимо його кінетичну енергію у відносному русі:

$$T = T_{mp} + T_{з.м.} + T_{np} = \frac{1}{2} I_{S_1} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} [I_{S_2} \dot{\phi}_2^2 + m_{y.м.} (\dot{\phi}_1 a + \dot{\phi}_2 b)^2] + \\ + \frac{1}{2} [I_{S_3} \dot{\phi}_3^2 + m_{np.} (\dot{\phi}_1 a + \dot{\phi}_2 n + \dot{\phi}_3 d)^2] = \frac{1}{2} [I_{S_1} \dot{\phi}_1^2 + I_{S_2} \dot{\phi}_2^2 + m_{y.м.} (\dot{\phi}_1^2 a + \\ + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 a d + \dot{\phi}_2^2 b^2) + I_{S_3} \dot{\phi}_3^2 + m_{np.} (\dot{\phi}_1^2 a^2 + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 a n + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 a d + 2\dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 n d + \\ + \dot{\phi}_3^2 d^2 + \dot{\phi}_2^2 n^2)];$$

де  $T_{mp}$  – кінетична енергія трактора;

$T_{з.м.}$  – кінетична енергія збиральної машини;

$T_{np}$  – кінетична енергія причепа-візка;

$I_{S_1}$  – момент інерції трактора щодо вертикальної осі, що проходить через центр мас трактора;

$\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$  – узагальнені швидкості;

$I_{S_2}$  – момент інерції збиральної машини щодо вертикальної осі, що проходить через її центр мас;

$I_{S_3}$  – момент інерції причепа-візка, що проходить через його центр мас;

$m_{з.м.}$  – маса збиральної машини;

$m_{np}$  – маса причепа-візка;

$a$  – відстань від центру мас трактора  $S_1$  до точки причепа збиральної машини  $C_1$ ;

$b$  – відстань від точки причепа збиральної машини до трактора  $C_1$  до центру мас збиральної машини;

$n$  – відстань від точки причепа збиральної машини до трактора  $C_1$  до точки причепа причепа-візка до збиральної машини  $C_2$ ;

$d$  – відстань від центру осі причепа-візка  $N$  точки причепа його до збиральної машини  $C_2$ .

Остаточню маємо:

$$T = \frac{1}{2} \left[ \dot{\phi}_1^2 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \dot{\phi}_2^2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \dot{\phi}_3^2 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 abm_{y.m.} + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 anm_{np} + 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 adm_{np} + 2\dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 ndm_{np} \right] \quad (2.2.2)$$

Визначаємо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальнених швидкостях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= \dot{\phi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \dot{\phi}_2 abm_{y.m.} + \dot{\phi}_2 anm_{y.m.} + \dot{\phi}_3 adm_{np} = \\ &= \dot{\phi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \dot{\phi}_2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \dot{\phi}_3 adm_{np}; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} &= \dot{\phi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \dot{\phi}_1 abm_{y.m.} + \dot{\phi}_1 anm_{np.} + \dot{\phi}_3 ndm_{np} = \\ &= \dot{\phi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \dot{\phi}_1 (abm_{y.m.} + anm_{np.}) + \dot{\phi}_3 ndm_{np}; \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_3} &= \dot{\phi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{y.m.}) + \dot{\phi}_1 adm_{np} + \dot{\phi}_2 dnm_{np.} = \dot{\phi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \\ &+ \dot{\phi}_1 adm_{np} + \dot{\phi}_2 dnm_{np.} \end{aligned}$$

Диференціюємо за часом вираз (2.2.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right] &= \ddot{\phi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\phi}_3 adm_{np}; \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_2} \right] &= \ddot{\phi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 ndm_{np}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Знаходимо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_3} = 0. \quad (2.2.5)$$

Підставляємо вирази (2.2.4) і (2.2.5) у рівняння (2.2.1)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1(I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2(abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 adm_{np} &= Q_1; \\ \ddot{\varphi}_2(I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 ndm_{np} &= Q_2; \\ \ddot{\varphi}_3(I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} &= Q_3. \end{aligned} \right\} (2.2.6)$$

Знаходимо узагальнені сили, діючі на збиральний агрегат, з виразу [1]:

$$Q_i = \frac{\Sigma \delta A_i}{\delta q_i},$$

де  $\Sigma \delta A_i$  – повна елементарна робота діючих на систему сил;  
 $\delta q_i$  – елементарний приріст узагальнених координат.

Для визначення сили  $Q_1$  дамо приріст  $\delta \varphi_1$  куту повороту трактора, зберігаючи кути  $\varphi_2$  й  $\varphi_3$  незмінними, і знайдемо суму елементарних робіт прикладених сил:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta A_{\varphi_1} = & \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_A) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_B) + \delta A_{\varphi_1}(M_A) + \delta A_{\varphi_1}(M_B) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{F}_B) + \\ & + \delta A_{\varphi_1}(\bar{R}_D) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_{L_1}) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_{L_2}) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_{L_1}) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_{L_2}) + \\ & + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_N) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_N); \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

де  $\delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_A)$  – елементарна робота головного вектора сил пружності шин передніх коліс трактора при його повороті на кут  $\delta \varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_B)$  – елементарна робота головного вектора сил пружності шин задніх коліс трактора при його повороті на кут  $\delta \varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(M_A)$  – елементарна робота головного моменту сил пружності шин передніх коліс трактора при його повороті на кут  $\delta \varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(M_B)$  – елементарна робота головного моменту сил пружності шин задніх коліс трактора при його повороті на кут  $\delta \varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{F}_B)$  – елементарна робота головного вектора рушійних



сил задніх коліс трактора при його повороті на кут  $\delta\varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{R}_D)$  – елементарна робота головного вектора сил опору, що виникають при роботі обчислюючого пристрою при повороті трактора на кут  $\delta\varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_{L_1}), \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_{L_2})$  – елементарна робота сил пружності коліс збиральної машини при повороті трактора на кут  $\delta\varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_{L_1}), \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_{L_2})$  – елементарна робота сил опору перекочуванню коліс збиральної машини при повороті трактора на кут  $\delta\varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_N)$  – елементарна робота головного вектора сил пружності коліс причепа-візка при повороті трактора на кут  $\delta\varphi_1$ ;

$\delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_N)$  – елементарна робота головного вектора сил опору перекочуванню коліс причепа-візка при повороті трактора на кут  $\delta\varphi_1$ .

$$\sum \delta A_{\varphi_1} = (-T_A h_1 + T_B h_2 + F_B \psi_B h_2 + M_A + M_B + R_D \cos \gamma_M a + T_L a + S_L \psi_L a + S_N \psi_N a + T_N a) \delta\varphi_1, \quad (2.2.8)$$

де  $h_1$  – відстань від центру ваги трактора  $S_I$  до осі передніх коліс трактора  $A$  ( $h_1 = S_I A$ );

$h_2$  – відстань від центру ваги трактора  $S_I$  до осі його задніх коліс  $B$  ( $h_2 = S_I B$ );

$\psi_B$  – кут між головним вектором рушійних сил трактора і віссю трактора;

$\psi_L$  – кут закручування шин коліс збиральної машини ( $\psi_{L1} \approx \psi_{L2} \approx \psi_L$ );

$\psi_N$  – кут закручування шин коліс причепа-візка;

$\gamma_M$  – кут складений вектором швидкості точки  $D$ ,  $\bar{V}_D$  та віссю  $O_I Y_I$ .

Для визначення узагальненої сили  $Q_2$  повернемо збиральну машину на елементарний кут  $\delta\varphi_2$  і знайдемо суму елементарних робіт:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\varphi_2} = & \delta A_{\varphi_2}(\bar{R}_D) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_1}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_2}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_1}) + \\ & + \delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_2}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_N) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_N) + \delta A_{\varphi_2}(M_L); \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

де  $\delta A_{\varphi_2}(\bar{R}_D)$  – елементарна робота головного вектора сил опору, що виникають при роботі обчислюючого пристрою при повороті збиральної машини на кут  $\delta\varphi_2$ ;

$\delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_1})$  і  $\delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_2})$  – елементарна робота сил пружності коліс збиральної машини при повороті її на кут  $\delta\varphi_2$ ;

$\delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_1})$  і  $\delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_2})$  – елементарна робота сил опору перекочуванню коліс збиральної машини при повороті її на кут  $\delta\varphi_2$ ;

$\delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_N)$  – елементарна робота головного вектора сил пружності коліс причепа-візка при повороті збиральної машини на кут  $\delta\varphi_2$ ;

$\delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_N)$  – елементарна робота головного вектора сил опору перекочуванню коліс причіпа-візка при повороті збиральної машини на кут  $\delta\varphi_2$ ;

$\delta A_{\varphi_2}(M_L)$  – елементарна робота головного моменту сил пружності лівого і правого коліс збиральної машини при її повороті на кут  $\delta\varphi_2$ .

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\varphi_2} = & R_D \cos \gamma_M C_R \delta\varphi_2 + T_{L_2} \sin \alpha \ell \delta\varphi_2 + S_{L_2} \psi_L \ell \sin \alpha \delta\varphi_2 + \\ & + T_{L_1} \ell \delta\varphi_2 + S_{L_1} \psi_L \ell \delta\varphi_2 + M_L \delta\varphi_2 + S_N \psi_N n \delta\varphi_2 + T_N n \delta\varphi_2, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

де  $C_R$  – відстань від точки причепа збиральної машини до точки  $D_I$  прикладення головного вектора сил опору.

Знаходимо узагальнену силу  $Q_3$ , для чого повернемо причіп-візок на кут  $\delta\varphi_3$  і визначимо суму робіт:

$$\sum \delta A_{\varphi_3} = \delta A_{\varphi_3}(\bar{T}_N) + \delta A_{\varphi_3}(\bar{S}_N) + \delta A_{\varphi_3}(M_N); \quad (2.2.11)$$

$$\sum \delta A_{\varphi_3} = T_N d\delta\varphi_3 + S_N d\psi_N \delta\varphi_3 + M_N \delta\varphi_3 = \delta\varphi_3(T_N d + S_N d\psi_N + M_N); \quad (2.2.12)$$

Так як узагальнена сила є коефіцієнтом при приростах узагальнених координат у рівнянні суми елементарних робіт, то:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -T_A h_1 + T_B h_2 + F_B \psi_B h_2 + M_A + M_B + R_D \cos \gamma_T a + \\ &+ T_L a + S_L \psi_L a + S_N \psi_N a + T_N a; \\ Q_2 &= R_D \cos \gamma_M C_R + T_{L_2} \sin \alpha \ell + S_{L_2} \psi_L \ell \sin \alpha + T_{L_1} \ell + S_{L_1} \psi_L \ell + \\ &+ M_L + S_N \psi_N n + T_N n; \\ Q_3 &= T_N d + S_N d\psi_N + M_N. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Підставимо вираз (2.2.13) у рівняння (2.2.6) і одержимо систему диференціальних рівнянь руху збирального агрегату [42]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 adm_{np} = \\ = -T_A h_1 + T_B h_2 + F_B \psi_B h_2 + M_A + M_B + R_D \cos \gamma_T a + \\ + T_L a + S_L \psi_L a + S_N \psi_N a + T_N a_1; \\ \ddot{\varphi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 ndm_{np} = \\ = R_D \cos \gamma_M C_R + T_{L_2} \sin \alpha \ell + S_{L_2} \psi_L \ell \sin \alpha + T_{L_1} \ell + S_{L_1} \psi_L \ell + \\ + M_L + S_N \psi_N n + T_N n; \\ \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} = T_N d + S_N d\psi_N + M_N. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.14)$$

З урахуванням кутів закручування й сил деформації шин, а також моментів цих сил диференціальні рівняння (2.2.14) приймають вигляд [91]:

$$\left. \begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 adm_{np} = \\
& = -c_A \Delta_{TP} h_1 + c_B \Delta_{TP} h_2 + S_A k_B \Delta_{TP} h + f_A k_A \Delta_{TP} + f_B k_B \Delta_{TP} + \\
& + R_D \cos \gamma_{TP} a + c_L \Delta_L a + S_L k_L \Delta_L a + S_{np} k_{np} \Delta_{np} a + c_{np} \Delta_{np}; \\
& \ddot{\varphi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 ndm_{np} = \\
& = R_D \cos \gamma_M C_R + c_L \Delta_L \left( 1 - \frac{p^2}{\ell^2} \right) + c_L \Delta_L \ell + S_L k_L \Delta_L \ell + \\
& + f_L k_L \Delta_L + S_{np} \Delta_{np} k_{np} n + c_{np} \Delta_{np} n; \\
& \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np} c_{np} d + \\
& + S_N dk_{np} \Delta_{np} + \Delta_{np} c_{np} d.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

де  $c_{np}$  – коефіцієнт жорсткості шин коліс причепа-візка при їх зсуві;

$f_{np}$  – коефіцієнт жорсткості шин коліс причепа-візка при їх скручуванні;

$\Delta_{np}$  – поперечні деформації шин коліс причепа-візка;

$K_{np}$  – коефіцієнт пропорційності шин коліс причепа-візка.

Перетворимо рівняння (2.2.15)

$$\left. \begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_1 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 adm_{np} = \\
& = \Delta_{TP} (-c_A h_1 + c_B h_2 + S_A k_B h + f_A k_A + f_B k_B + \\
& + R_D k_B h_2 + S_L k_B h_2 + S_{np} k_B h_2) + \Delta_M (c_L a + S_L k_L a) + \\
& + \Delta_{np} (c_{np} a + S_{np} k_{np} a) - R_D \cos \gamma_{TP} a; \\
& \ddot{\varphi}_2 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 ndm_{np} = \\
& = \Delta_M (c_L \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L \ell + S_L k_L \ell + f_L k_L) + \Delta_{np} (S_{np} k_{np} n + c_{np} n) - \\
& - R_D \cos \gamma_M C_R; \\
& \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np} (c_{np} d + S_N dk_{np} + \\
& + f_{np} k_{np})
\end{aligned} \right\} (2.2.16)$$

де  $\gamma_{TP}$  – кут між віссю  $Z_{TP}$  та вектором швидкості  $\bar{V}_D$ .

Для знаходження  $\cos \gamma_{TP}$  і  $\cos \gamma_M$  спроекціюємо векторне рівняння (2.2.17) на осі  $Z_{TP}$  та  $Z_M$  (рис. 2.2.1)

$$\bar{V}_D = \bar{V}_0 + \bar{V}_{C_1 S_1} + \bar{V}_{DC_1}, \quad (2.2.17)$$

де  $\bar{V}_{C_1 S_1}$  – лінійна швидкість точки  $C_1$  в обертовому русі щодо вертикальної осі, що проходить через центр мас  $S_1$ ;

$$V_{C_1 S_1} = \dot{\varphi}_1 a;$$

$\bar{V}_{DC_1}$  – лінійна швидкість точки  $D$  в обертовому русі щодо вертикальної осі, що проходить через точку  $C_1$ , по модулю  $V_{DC_1} = \dot{\varphi}_2 C_R$ ;

$$\begin{aligned}
\cos \gamma_T &= \frac{V_0 \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R \cos \Theta}{V_0 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R}; \\
\cos \gamma_M &= \frac{V_0 \sin \Theta + V_0 \varphi_2 \cos \Theta + \dot{\varphi}_2 C_R + \dot{\varphi}_1 C_R \cos \Theta}{V_0 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R} \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Підставляємо вираз (2.2.18) у рівняння (2.2.16):

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_1(I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2(abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 adm_{np} = \\
& = \Delta_{TP}(-c_A h_1 + c_B h_2 + S_A k_B h + f_A k_A + f_B k_B + \\
& + R_D k_B h_2 + S_L k_B h_2 + S_{np} k_B h_2) + \Delta_M(c_L a + S_L k_L a) + \\
& + \Delta_{np}(c_{np} a + S_{np} k_{np} a) - R_D \frac{V_0 \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R \cos \Theta}{V_0 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R} a; \\
& \ddot{\varphi}_2(I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 ndm_{np} = \\
& = \Delta_M(c_L \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L \ell + S_L k_L \ell + f_L k_L) + \Delta_{np}(S_{np} k_{np} n + c_{np} n) - \\
& - R_D \frac{V_0 \sin \Theta + V_0 \varphi_2 \cos \Theta + \dot{\varphi}_2 C_R + \dot{\varphi}_1 C_R \cos \Theta}{V_0 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R} C_R; \\
& \ddot{\varphi}_3(I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np}(c_{np} d + S_N dk_{np} + \\
& + f_{np} k_{np})
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Перетворимо рівняння (2.2.19):

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_1 V_0 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 a (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \\
& + \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 C_R (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \\
& + \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_1 a (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2 C_R (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \\
& + \ddot{\varphi}_3 V_0 adm_{np} + \ddot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 a^2 dm_{np} = \Delta_{TP}(-c_A h_1 V_0 + c_B h_2 V_0 + \\
& + S_A k_B h_2 V_0 + f_A k_A V_0 + f_B k_B V_0 + R_D k_B h_2 V_0 + S_L k_B V_0 + \\
& + S_{np} k_B h_2 V_0) + \Delta_M(c_L a V_0 + S_L k_L a V_0) + \Delta_{np}(c_{np} a V_0 + S_{np} k_{np} a V_0) - \\
& - R_D a V_0 \varphi_1 - R_D \dot{\varphi}_1 a^2 - \dot{\varphi}_2 C_R \cos \Theta R_D a + \Delta_{TP} \dot{\varphi}_1 a (-c_A h_1 + c_B h_2 + \\
& + S_A k_B h_2 + f_A k_A + f_B k_B + R_D k_B h_2 + S_L k_B) + \\
& + \Delta_M \dot{\varphi}_1 a (c_L a + S_L k_L a) + \Delta_{np} \dot{\varphi}_1 a (c_{np} a + S_{np} k_{np} a) + \Delta_{TP} \dot{\varphi}_2 C_R (-c_A h_1 + c_B h_2 + \\
& + S_A k_B h_2 + f_A k_A + f_B k_B + R_D k_B h_2 + S_L k_B + S_{np} k_B h_2) + \\
& + \Delta_M \dot{\varphi}_2 C_R (c_L a + S_L k_L a) + \Delta_{np} \dot{\varphi}_2 C_R (c_{np} a + S_{np} k_{np} a);
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 V_0 ndm_{np} + \\
& + \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_1 a (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 a (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1 a ndm_{np} + \\
& + \ddot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_2 C_R (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 C_R (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \\
& + \ddot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_2 C_R ndm_{np} = \Delta_M (c_L V_0 \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L V_0 \ell + S_L k_L V_0 \ell + f_L V_0 k_L) + \\
& + \Delta_{np} (S_{np} k_{np} n V_0 + c_{np} n V_0) + \Delta_M \dot{\varphi}_1 a (c_L \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L \ell + S_L k_L \ell + f_L k_L) + \\
& + \Delta_{np} \dot{\varphi}_1 a (S_{np} k_{np} n + c_{np} n) + \Delta_M \dot{\varphi}_2 C_R (c_L \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L \ell + S_L k_L \ell + f_L k_L) + \\
& + \Delta_{np} \dot{\varphi}_2 C_R (S_{np} k_{np} n + c_{np} n) - R_D V_0 C_R \sin \Theta - R_D V_0 C_R \varphi_2 \cos \Theta - \dot{\varphi}_2 C_R R_D C_R \\
& \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \dot{\varphi}_1 a dm_{np} + \dot{\varphi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np} (c_{np} d + S_N dk_{np} + f_{np} k_{np}).
\end{aligned}$$

Якщо добутки малих величин уважати близькими до нуля і ними зневажити, то рівняння (2.2.20) приймають вид.

$$\begin{aligned}
& \ddot{\varphi}_1 V_0 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_2 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\varphi}_3 V_0 adm_{np} = \\
& = \Delta_A (-c_A h_1 V_0 + c_B h_2 V_0 + S_A k_B h_2 V_0 + f_A k_A V_0 + f_B k_B V_0 + \\
& + R_D k_B h_2 V_0 + S_L k_B V_0 + S_{np} k_B h_2 V_0) + \Delta_B (c_L a V_0 + S_L k_L a V_0) + \\
& + \Delta_{np} (c_{np} a V_0 + S_{np} k_{np} a V_0) - R_D a V_0 \varphi_1 - R_D \dot{\varphi}_1 a^2 - \dot{\varphi}_2 C_R \cos \Theta R_D a; \\
& \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\varphi}_3 V_0 ndm_{np} = \\
& = \Delta_L (c_L V_0 \sqrt{\ell^2 - p^2} + c_L V_0 \ell + S_L k_L V_0 \ell + f_L V_0 k_L) + \\
& + \Delta_{np} (S_{np} k_{np} n V_0 + c_{np} n V_0) - R_D V_0 C_R \sin \Theta - R_D V_0 C_R \varphi_2 \cos \Theta - \\
& - \dot{\varphi}_2 C_R R_D C_R
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

$$\ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \dot{\varphi}_1 a dm_{np} + \dot{\varphi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np} (c_{np} d + S_N dk_{np} + f_{np} k_{np}).$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
Y &= f_A k_A V_0 - C_A h_1 V_0; \\
\Omega &= C_B h_2 V_0 + S_A k_B h V_0 + S_L k_B V_0 + R_D k_B h_2 V_0 + \\
&+ S_{np} k_B h_2 V_0 f_B k_B V_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= c_L a + S_L k_L a; \\
P &= c_{np} a V_0 + S_{np} k_{np} a V_0; \\
\Psi &= V_0 c_L \sqrt{\ell^2 - p^2} + V_0 c_L \ell + V_0 S_L k_L \ell + f_L k_L V_0; \\
\Phi &= S_{np} k_{np} n V_0 + c_{np} n V_0; \\
\Gamma &= c_{np} d + S_N k_{np} d + f_{np} k_{np}.
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Підставимо позначення (2.2.22) у рівняння (2.2.21):

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi}_1 V_0 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_2 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\phi}_3 V_0 adm_{np} + \\
&+ R_D a V_0 \phi_1 + R_D \dot{\phi}_1 a^2 + \dot{\phi}_2 C_R \cos \Theta R_D a = \Delta_A Y + \Delta_B \Omega + \Delta_L \Lambda + \Delta_{np} P; \\
&\ddot{\phi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 V_0 ndm_{np} + \\
&+ R_D V_0 C_R \sin \Theta - R_D V_0 C_R \phi_2 \cos \Theta + \dot{\phi}_2 C_R R_D C_R = \Delta_L \Psi + \Delta_{np} \Phi; \\
&\ddot{\phi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np} = \Delta_{np} \Gamma.
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Позначимо ліві частини рівнянь (2.2.23) через  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ , тобто:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi}_1 V_0 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_2 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \ddot{\phi}_3 V_0 adm_{np} + \\
&+ R_D a V_0 \phi_1 + R_D \dot{\phi}_1 a^2 + \dot{\phi}_2 C_R \cos \Theta R_D a = f_1(t); \\
&\ddot{\phi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 V_0 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 V_0 ndm_{np} + \\
&+ R_D V_0 C_R \sin \Theta - R_D V_0 C_R \phi_2 \cos \Theta + \dot{\phi}_2 C_R R_D C_R = f_2(t); \\
&\ddot{\phi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np} = f_3(t).
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Тоді з урахуванням позначень (2.2.24) рівняння (2.2.23) приймають вид:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta_A Y + \Delta_B \Omega + \Delta_L \Lambda + \Delta_{np} P &= f_1(t); \\
\Delta_L \Psi + \Delta_{np} \Phi &= f_2(t); \\
\Delta_{np} \Gamma &= f_3(t)
\end{aligned} \right\} \tag{2.2.25}$$

З другого й третього рівнянь (2.2.25) визначимо  $\Delta_L$  і  $\Delta_{np}$ :

$$\Delta_{np} = \frac{f_3(t)}{\Gamma}; \tag{2.2.26}$$



$$\begin{aligned}
\Psi\Delta_L + \Phi \frac{f_3(t)}{\Gamma} &= f_2(t); \\
\Gamma\Psi\Delta_L + \Phi f_3(t) &= f_2(t)\Gamma; \\
\Delta_L &= \frac{f_2(t)\Gamma - \Phi f_3(t)}{\Gamma\Psi}
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

З урахуванням знайдених деформацій  $\Delta_L$  і  $\Delta_{пр}$  перше рівняння системи (2.2.25) можна записати у вигляді:

$$\Delta_A Y + \Delta_B \Omega + \frac{f_2(t)\Gamma - \Phi f_3(t)}{\Gamma\Psi} \Lambda + \frac{f_3(t)}{\Gamma} P = f_1(t); \tag{2.2.28}$$

Деформації  $\Delta_A$  і  $\Delta_B$  визначені в роботі [43].

$$\left. \begin{aligned}
\Delta_A &= A_1 e^{-k_A V_0 t}, \\
\Delta_B &= B_1 e^{-k_B V_0 t}.
\end{aligned} \right\} \tag{2.2.29}$$

$$\text{де } \left. \begin{aligned}
A_1 &= \int (V_0 \phi_1 - h_1 \dot{\phi}_1) e^{k_A V_0 t} dt + C_1 \\
B_1 &= \int (V_0 \phi_1 - h_2 \dot{\phi}_1) e^{k_B V_0 t} dt + C_2
\end{aligned} \right\}$$

Вирази (2.2.29) містять дві різні показові функції.

Для того, щоб позбутися від них необхідно виконати наступні дії.

Продиференціюємо рівняння (2.2.29) і (2.2.28) за часом.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\Delta_A}{dt} &= -h_1 \dot{\phi}_1 + V_0 (\phi_1 - k_A \Delta_A) \\
\frac{d\Delta_B}{dt} &= h_2 \dot{\phi}_1 + V_0 (\phi_1 - k_B \Delta_B)
\end{aligned} \right\} \tag{2.2.30}$$

$$\frac{d\Delta_A}{dt} Y + \frac{d\Delta_B}{dt} \Omega + \frac{\Lambda}{\Gamma\Psi} \left[ \Gamma \frac{df_2(t)}{dt} - \Phi \frac{df_3(t)}{dt} \right] + \frac{P}{\Gamma} \frac{df_3(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}. \tag{2.2.31}$$

Підставимо вираз (2.2.30) у рівняння (2.2.31):

$$\begin{aligned}
Y[-h_1 \dot{\phi}_1 + V_0 (\phi_1 - k_A \Delta_A)] + \Omega [h_2 \dot{\phi}_1 + V_0 (\phi_1 - k_B \Delta_B)] + \frac{\Lambda}{\Psi} \frac{df_2(t)}{dt} - \\
- \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \frac{df_3(t)}{dt} + \frac{P}{\Gamma} \frac{df_3(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt};
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

$$\begin{aligned}
-k_A \Delta_A V_0 Y - k_B \Delta_B V_0 \Omega = Y h_1 \dot{\phi}_1 - V_0 \phi_1 Y - \Omega h_2 \dot{\phi}_1 - \Omega V_0 \phi_1 - \\
- \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) + \dot{f}_1(t)
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Рівняння (2.2.31) і (2.2.33) можна представити у вигляді системи із двома невідомими  $\Delta_A$  і  $\Delta_B$ .

$$\left. \begin{aligned} A_1\Delta_A + B_1\Delta_B &= D_1 \\ A_2\Delta_A + B_2\Delta_B &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.34)$$

Вирішимо систему (2.34) відносно  $\Delta_A$  та  $\Delta_B$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_A &= \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1B_2 - D_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \\ \Delta_B &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_1D_2 - A_2D_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \end{aligned} \right\} \quad (2.2.35)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= Y; B_1 = \Omega; A_2 = -k_A V_0 Y; B_2 = -k_B V_0 \Omega; \\ D_1 &= f_1(t) - \frac{P}{\Gamma} f_3(t) - \frac{\Lambda}{\Psi} f_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} f_3(t); D_2 = Yh\dot{\phi}_1 - V_0\phi_1 Y - \Omega h_2 \dot{\phi}_1 - \\ &- \Omega V_0 \phi_1 - \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{\phi}_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) + \dot{f}_1(t) \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Після підстановки виразу (2.2.36) одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{V_0 Y (k_A - k_B)} \left[ \frac{P}{\Gamma} k_B V_0 f_3(t) - k_B V_0 f_1(t) + \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 k_B f_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_B V_0 f_3(t) - \right. \\ &- Yh_1 \dot{\phi}_1 + V_0 \phi_1 Y + \Omega h_2 \dot{\phi}_1 + \Omega V_0 \phi_1 + \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) + \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) - \dot{f}_1(t) \left. \right]; \\ \Delta_B &= \frac{1}{V_0 \Omega (k_A - k_B)} \left[ Yh_1 \dot{\phi}_1 - V_0 \phi_1 Y - \Omega h_2 \dot{\phi}_1 - \Omega V_0 \phi_1 - \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) + \right. \\ &+ \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) + \dot{f}_1(t) + k_A V_0 f_1(t) - \frac{P}{\Gamma} f_3(t) k_A V_0 - \\ &\left. - \frac{\Lambda}{\Psi} k_A V_0 f_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_A V_0 f_3(t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2.37)$$

Залежності (2.2.37) можна представити у вигляді:

$$\left. \begin{aligned}
YV_0(k_A - k_B)\Delta_A &= \frac{P}{\Gamma} k_B V_0 f_3(t) - k_B V_0 f_1(t) + \frac{\Lambda}{\Psi} k_B V_0 f_2(t) - \\
&- \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_B V_0 f_3(t) - Yh_1\dot{\phi}_1 + V_0\phi_1 Y + \Omega h_2\dot{\phi}_1 + \Omega V_0\phi_1 + \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) - \\
&- \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) + \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) - \dot{f}_1(t); \\
\Omega V_0(k_A - k_B)\Delta_B &= Yh_1\dot{\phi}_1 - V_0\phi_1 Y - \Omega h_2\dot{\phi}_1 - \Omega V_0\phi_1 - \\
&- \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) + \dot{f}_1(t) + k_A V_0 f_1(t) - \\
&- \frac{P}{\Gamma} k_A V_0 f_3(t) - \frac{\Lambda}{\Psi} k_A V_0 f_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_A V_0 f_3(t).
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.38)$$

Продиференціювавши за часом рівняння (2.2.38), одержимо [42]:

$$\left. \begin{aligned}
YV_0(k_A - k_B)(V_0\phi_1 - h_1\dot{\phi}_1) &= \frac{k_A}{Y(k_A - k_B)} \left[ \frac{P}{\Gamma} k_B V_0 f_3(t) - k_B V_0 f_1(t) + \right. \\
&+ \frac{\Lambda}{\Phi} V_0 k_B f_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_B V_0 f_3(t) - Yh_1\dot{\phi}_1 + V_0\phi_1 Y + \Omega h_2\dot{\phi}_1 + \Omega V_0\phi_1 + \\
&+ \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) + \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) - \dot{f}_1(t) \left. \right] + \frac{P}{\Gamma} k_B V_0 \dot{f}_3(t) - k_B V_0 \dot{f}_1(t) + \\
&+ \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 k_B \dot{f}_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_B V_0 \dot{f}_3(t) - Yh_1\ddot{\phi}_1 + V_0\ddot{\phi}_1 Y + \Omega h_2\ddot{\phi}_1 + \Omega V_0\ddot{\phi}_1 + \\
&+ \frac{\Lambda}{\Psi} \ddot{\phi}_2(t) - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \ddot{f}_3(t) + \frac{P}{\Gamma} \ddot{f}_3(t) + \frac{P}{\Gamma} \ddot{f}_3(t) - \ddot{f}_1(t); \\
\Omega V_0(k_A - k_B)(V_0\phi_1 - h_1\dot{\phi}_1) &= \frac{k_B}{\Omega(k_A - k_B)} [Yh_1\dot{\phi}_1 - V_0\phi_1 Y - \Omega h_2\dot{\phi}_1 - \\
&- \Omega V_0\phi_1 - \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{f}_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \dot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \dot{f}_3(t) + \dot{f}_1(t) + k_A V_0 f_1(t) - \\
&- \frac{P}{\Gamma} k_B V_0 f_3(t) - \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 k_A f_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_A V_0 f_3(t) + Yh_1\ddot{\phi}_1 - V_0\ddot{\phi}_1 Y - \\
&- \Omega h_2\ddot{\phi}_1 - \Omega V_0\ddot{\phi}_1 - \frac{\Lambda}{\Psi} \ddot{f}_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} \ddot{f}_3(t) - \frac{P}{\Gamma} \ddot{f}_3(t) + \ddot{f}_1(t) + \\
&+ k_A V_0 \dot{f}_1(t) - \frac{P}{\Gamma} V_0 \dot{f}_3(t) k_A - \frac{\Lambda}{\Psi} k_A V_0 f_2(t) + \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi} k_A V_0 \dot{f}_3(t);
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.39)$$

Після підстановки в рівняння (2.2.39) значень  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  і  $f_3(t)$ , а також їх перших і других похідних за часом  $\dot{f}_1(t)$ ,  $\dot{f}_2(t)$ ,  $\dot{f}_3(t)$ ,  $\ddot{f}_1$ ,  $\ddot{f}_2$  і  $\ddot{f}_3$  й т.п., одержимо два тотожних лінійних рівняння четвертого порядку, тобто, фактично одне рівняння:

$$\begin{aligned}
YV_0(k_A - k_B)(V_0\phi_1 - h_1\dot{\phi}_1) &= \frac{P}{\Gamma} k_B k_A V_0 [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \\
&+ \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - k_B V_0 [\ddot{\phi}_1 V_0(I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_2 V_0(abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \\
&+ \ddot{\phi}_3 adV_0 m_{np} + R_D a V_0 \phi_1 + R_D a^2 \phi_1^2 + R_D a C_R \phi_2 \cos \Theta] + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B [\ddot{\phi}_2 V_0 * \\
&* (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np.}) + \ddot{\phi}_3 ndm_{np} V_0 + \\
&+ R_D C_R \phi_2 \sin \Theta + R_D C_R V_0 \phi_2 \cos \Theta + R_D a^2 \dot{\phi}_1 + R_D a C_R \dot{\phi}_2 \cos \Theta] - \\
&- \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_A k_B V_0 [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - Y h_1 \dot{\phi}_1 + V_0 \phi_1 Y + \\
&+ \Omega h_{2(k_A - k_B)} \dot{\phi}_1 + \frac{\Lambda}{\Psi} [\ddot{\phi}_2 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} b^2 + m_{np} n^2) + \ddot{\phi}_1 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \\
&+ \ddot{\phi}_3 ndm_{np} V_0 + R_D a C_R V_0 \phi_2 \cos \Theta + R_D a^2 \ddot{\phi}_1 + R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta] - \\
&- \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_A [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] + k_A \frac{P}{\Gamma} [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \\
&+ \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - k_A [\ddot{\phi}_1 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} a^2 + m_{np} a^2) + \ddot{\phi}_2 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \\
&+ \ddot{\phi}_3 adm_{np} V_0 + R_D a V_0 \dot{\phi}_1 + R_D a^2 \ddot{\phi}_1 + R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta] + \frac{P}{\Gamma} Y k_B V_0 (k_A - k_B) * \\
&* [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - Y k_B V_0 (k_A - k_B) * \\
&* [\ddot{\phi}_1 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} a^2 + m_{np} a^2) + \ddot{\phi}_2 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 adm_{np} V_0 + R_D a^2 \ddot{\phi}_1 + \\
&+ R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta] + \frac{\Lambda}{\Psi} k_B V_0 (k_A - k_B) [\ddot{\phi}_2 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} b^2 + m_{np} n^2) + \\
&+ \ddot{\phi}_1 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 ndm_{np} V_0 + R_D C_R V_0 \phi_2 \cos \Theta + R_D a^2 \dot{\phi}_1 + \\
&+ R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta] - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_B V_0 (k_A - k_B) [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - \\
&- Y^2 (k_A - k_B) h_1 \ddot{\phi}_1 + V_0 \ddot{\phi}_1 Y^2 (k_A - k_B) + \Omega V_0 \ddot{\phi}_1 Y (k_A - k_B) + \\
&+ \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) [\ddot{\phi}_2 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} b^2 + m_{np} b^2) + \ddot{\phi}_1 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \\
&+ \ddot{\phi}_3 ndm_{np} V_0 + R_D C_R V_0 \ddot{\phi}_2 + R_D a^2 \ddot{\phi}_1 + R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta] - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} Y (k_A - k_B) * \\
&* [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] + \frac{P}{\Gamma} Y (k_A - k_B) * \\
&* [\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + m_{np} d^2) + \ddot{\phi}_1 adm_{np} + \ddot{\phi}_2 ndm_{np}] - Y (k_A - k_B) [\ddot{\phi}_1 V_0(I_{S_1} + m_{y.m.} a^2 + m_{np} a^2) + \\
&+ \ddot{\phi}_2 V_0(abm_{y.m.} + anm_{np}) + \ddot{\phi}_3 a V_0 dm_{np} + R_D a V_0 \dot{\phi}_1 + R_D a^2 \ddot{\phi}_1 + R_D a C_R \ddot{\phi}_2 \cos \Theta]
\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Перетворимо отримане рівняння:

$$\begin{aligned}
& \frac{PY}{\Gamma}(k_A - k_B)adm_{np}\ddot{\phi}_1 - \frac{\Lambda\Phi Y}{\Gamma\Psi}(k_A - k_B)adm_{np}\ddot{\phi}_1 + \frac{\Lambda Y}{\Psi}(k_A - k_B)V_0 * \\
& * (abm_{y..m.} + anm_{np})\ddot{\phi}_1 - Y(k_A - k_B)(I_{S_1} + a^2m_{y..m.} + a^2m_{mp})V_0\ddot{\phi}_1 + \\
& + \frac{PY}{\Gamma}(k_A - k_B)ndm_{np}\ddot{\phi}_2 - \frac{\Lambda\Phi Y}{\Gamma\Psi}(k_A - k_B)ndm_{np}\ddot{\phi}_2 - Y\ddot{\phi}_2(k_A - k_B) * \\
& * V_0(abm_{y..m.} + anm_{y..m.}) + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_2(k_A - k_B)(I_{S_1} + b^2m_{y..m.} + n^2m_{mp})V_0^2 + \\
& + \frac{PY}{\Gamma}\ddot{\phi}_3(k_A - k_B)(I_{S_3} + d^2m_{np}) - Y(k_A - k_B)\ddot{\phi}_3aV_0dm_{np} - \\
& - \frac{\Lambda\Phi Y}{\Gamma\Psi}\ddot{\phi}_3(k_A - k_B)(I_{S_3} + d^2m_{np}) + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_3(k_A - k_B)V_0ndm_{np} - \\
& - Y(k_A - k_B)\ddot{\phi}_1R_Da^2 + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_1(k_A - k_B)V_0^2k_B(abm_{y..m.} + anm_{np}) - \\
& - \frac{\Lambda\Phi Y}{\Gamma\Psi}V_0k_B\ddot{\phi}_1(k_A - k_B)adm_{np} - \ddot{\phi}_1\frac{\Lambda\Phi k_A}{\Gamma\Psi}(adm_{np} - I_{S_1} + am_{y..m.} + a^2m_{mp})V_0k_A - \\
& - YV^2k_B(k_A - k_B)\ddot{\phi}_1(I_{S_1} + a^2m_{y..m.} + a^2m_{mp}) + \frac{PY}{\Lambda}V_0\ddot{\phi}_1k_B(k_A - k_B)adm_{np} + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi}a^2R_D\ddot{\phi}_1(k_A - k_B) + \frac{\Lambda}{\Psi}\ddot{\phi}_2V_0(I_{S_1} + b^2m_{y..m.} + b^2m_{mp}) - \frac{\Lambda\Phi k_A}{\Gamma\Psi}\ddot{\phi}_2ndm_{np} + \\
& + \frac{P}{\Gamma}k_Andm_{np}\ddot{\phi}_2 - V_0k_A(abm_{y..m.} + anm_{y..m.})\ddot{\phi}_2 - YV_0k_B\ddot{\phi}_2(k_A - k_B)(abm_{y..m.} + anm_{y..m.}) + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_2V_0^2k_B(k_A - k_B)(I_{S_1} + b^2m_{y..m.} + n^2m_{mp}) + \frac{PY}{\Psi}\ddot{\phi}_2k_BV_0(k_A - k_B)ndm_{np} - \\
& - \frac{\Lambda\Phi Y}{\Gamma\Psi}\ddot{\phi}_2V_0k_B(k_A - k_B)ndm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_2(k_A - k_B)aC_R \cos \Theta - \\
& - Y(k_A - k_B)R_D\ddot{\phi}_2aC_R \cos \Theta + \frac{\Lambda}{\Psi}V_0\ddot{\phi}_3ndm_{np} + \frac{P}{\Gamma}k_A\ddot{\phi}_1(I_{S_3} + d^2m_{np}) - k_A\ddot{\phi}_3adV_0m_{np} + \\
& + \frac{PY}{\Gamma}k_B\ddot{\phi}_3V_0(k_A - k_B)(I_{S_3} + d^2m_{np}) - Y\ddot{\phi}_3V_0^2adk_B(k_A - k_B)m_{np} - \\
& - \frac{\Lambda\Phi}{\Gamma\Psi}\ddot{\phi}_3(I_{S_3} + d^2m_{np}) + \frac{P}{\Gamma}\ddot{\phi}_1[k_Ak_BV_0adm_{np} - k_BV_0^2\ddot{\phi}_1(I_{S_1} + a^2m_{y..m.} + a^2m_{mp})] - \\
& - \frac{\Lambda\Phi k_A}{\Gamma\Psi}\ddot{\phi}_1k_BV_0adm_{np} + \frac{\Lambda}{\Psi}R_Da^2\ddot{\phi}_1 - R_Da^2k_A\ddot{\phi}_1 - YV_0k_B\ddot{\phi}_1(k_A - k_B)R_Da^2 - \\
& - Y^2\ddot{\phi}_1(k_A - k_B)h_1 + V_0Y^2\ddot{\phi}_1(k_A - k_B) + \Omega\ddot{\phi}_1Y^2(k_A - k_B)h_2 - Y\ddot{\phi}_1(k_A - k_B)aV_0 + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi}k_B\ddot{\phi}_1k_AV_0(abm_{y..m.} + anm_{np}) + \frac{P}{\Gamma}k_A\ddot{\phi}_1adm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi}R_D\ddot{\phi}_1a^2k_B(k_A - k_B) + \\
& + \frac{P}{\Gamma}\ddot{\phi}_2k_Ak_BV_0ndm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi}\ddot{\phi}_2(k_A - k_B)R_D C_R V_0 \cos \Theta - k_B\ddot{\phi}_2V_0^2(abm_{y..m.} + anm_{y..m.}) +
\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} \ddot{\varphi}_2 k_A V_0 k_B n d m_{np} + \frac{\Lambda}{\Psi} \ddot{\varphi}_2 R_D a C_R \cos \Theta - \\
& - Y V_0 k_B \ddot{\varphi}_2 (k_A - k_B) R_D a C_R \ddot{\varphi}_2 \cos \Theta + \frac{\Lambda \Gamma}{\Psi} V_0 a k_B \ddot{\varphi}_2 (k_A - k_B) C_R \cos \Theta + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A \ddot{\varphi}_3 k_B n d m_{np} V_0 + \frac{P}{\Gamma} k_A k_B V_0 \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) - k_B V_0^2 a d \ddot{\varphi}_3 m_{np} - \\
& - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_A \ddot{\varphi}_3 k_B V_0 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \Omega \dot{\varphi}_1 h_2 - Y h_1 \dot{\varphi}_1 - R_D \dot{\varphi}_1 k_B a^2 V_0 - k_A \dot{\varphi}_1 R_D a V_0 + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B a^2 \dot{\varphi}_1 R_D + \Omega V_0 Y \dot{\varphi}_1 (k_A - k_B) + Y V_0 \dot{\varphi}_1 (k_A - k_B) h_1 + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A \dot{\varphi}_2 k_B R_D a C_R \cos \Theta + \frac{\Lambda}{\Psi} \dot{\varphi}_2 V_0 R_D C_R \cos \Theta - k_A a \dot{\varphi}_2 C_R \cos \Theta R_D + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi} \dot{\varphi}_2 V_0^2 C_R k_B (k_A - k_B) \cos \Theta - k_B \dot{\varphi}_2 V_0 R_D a C_R \cos \Theta - \\
& - Y V_0^2 \dot{\varphi}_3 (k_A - k_B)^2 + Y V_0 \dot{\varphi}_3 + R_D a V_0^2 k_B \dot{\varphi}_3 + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B R_D C_R V_0 \cos \Theta \varphi_2 \\
& a_0 \ddot{\varphi}_1 + a_1 \ddot{\varphi}_2 + a_2 \ddot{\varphi}_3 + a_3 \ddot{\varphi}_1 + a_4 \ddot{\varphi}_2 + a_5 \ddot{\varphi}_3 + a_6 \ddot{\varphi}_1 + a_7 \ddot{\varphi}_2 + a_8 \ddot{\varphi}_3 + \\
& + a_9 \dot{\varphi}_1 + a_{10} \dot{\varphi}_2 + a_{11} \dot{\varphi}_3 + a_{12} \varphi_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.2.42}$$

де

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{PY}{\Gamma} (k_A - k_B) a d m_{np} - \frac{\Lambda \Phi Y}{\Gamma \Psi} (k_A - k_B) a d m_{np} + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) V_0 (a b m_{y.m.} + a n m_{np}) - Y (k_A - k_B) (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) V_0; \\
a_1 &= \frac{PY}{\Gamma} (k_A - k_B) n d m_{np} - \frac{\Lambda \Phi Y}{\Gamma \Psi} (k_A - k_B) n d m_{np} - \\
& - Y (k_A - k_B) V_0 (a b m_{y.m.} + a n m_{y.m.}) + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) V_0^2; \\
a_2 &= \frac{PY}{\Gamma} (k_A - k_B) (I_{S_3} + d^2 m_{np}) - Y (k_A - k_B) a V_0 d m_{np} - \\
& - \frac{\Lambda \Phi Y}{\Gamma \Psi} (k_A - k_B) (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) V_0 n d m_{np}; \\
a_3 &= -Y (k_A - k_B) R_D a^2 + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) V_0^2 k_B (a b m_{y.m.} + a n m_{np}) - \\
& - \frac{\Lambda \Phi Y}{\Gamma \Psi} V_0 k_B (k_A - k_B) a d m_{np} - \frac{\Lambda \Phi k_A}{\Gamma \Psi} (a d m_{np} - I_{S_1} + a m_{y.m.} + a^2 m_{np}) V_0 k_A - \\
& - Y V^2 k_B (k_A - k_B) (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{np}) + \frac{PY}{\Lambda} V_0 k_B (k_A - k_B) a d m_{np} + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi} a^2 R_D (k_A - k_B);
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + b^2 m_{mp}) - \frac{\Lambda \Phi k_A}{\Gamma \Psi} ndm_{np} + \frac{P}{\Gamma} k_A ndm_{np} - \\
& - V_0 k_A (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) - YV_0 k_B (k_A - k_B) (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi} V_0^2 k_B (k_A - k_B) (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{mp}) + \frac{PY}{\Psi} k_B V_0 (k_A - k_B) ndm_{np} - \\
& - \frac{\Lambda \Phi Y}{\Gamma \Psi} V_0 k_B (k_A - k_B) ndm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) a C_R \cos \Theta - \\
& - Y(k_A - k_B) R_D a C_R \cos \Theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 = & \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 ndm_{np} + \frac{P}{\Gamma} k_A (I_{S_3} + d^2 m_{np}) - k_A adV_0 m_{np} + \\
& + \frac{PY}{\Gamma} k_B V_0 (k_A - k_B) (I_{S_3} + d^2 m_{np}) - YV_0^2 adk_B (k_A - k_B) m_{np} - \\
& - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} (I_{S_3} + d^2 m_{np});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_6 = & \frac{P}{\Gamma} [k_A k_B V_0 adm_{np} - k_B V_0^2 (I_{S_1} + a^2 m_{y.m.} + a^2 m_{mp})] - \frac{\Lambda \Phi k_A}{\Gamma \Psi} k_B V_0 adm_{np} + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} R_D a^2 - R_D a^2 k_A - YV_0 k_B (k_A - k_B) R_D a^2 - Y^2 (k_A - k_B) h_1 + \\
& + V_0 Y^2 (k_A - k_B) + \Omega Y^2 (k_A - k_B) h_2 - Y(k_A - k_B) a V_0 + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_B k_A V_0 (abm_{y.m.} + anm_{np}) + \frac{P}{\Gamma} k_A adm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi} R_D a^2 k_B (k_A - k_B);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_7 = & \frac{P}{\Gamma} k_A k_B V_0 ndm_{np} + \frac{\Lambda Y}{\Psi} (k_A - k_B) R_D C_R V_0 \cos \Theta - k_B V_0^2 (abm_{y.m.} + anm_{y.m.}) + \\
& + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B V_0 (I_{S_1} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{mp}) - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_A V_0 k_B ndm_{np} + \frac{\Lambda}{\Psi} R_D a C_R \cos \Theta - \\
& - YV_0 k_B (k_A - k_B) R_D a C_R \cos \Theta + \frac{\Lambda \Gamma}{\Psi} V_0 a k_B (k_A - k_B) C_R \cos \Theta;
\end{aligned}$$

$$a_8 = \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B ndm_{np} V_0 + \frac{P}{\Gamma} k_A k_B V_0 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) - k_B V_0^2 adm_{np} - \frac{\Lambda \Phi}{\Gamma \Psi} k_A k_B V_0 (I_{S_3} + d^2 m_{np})$$

$$\begin{aligned}
a_9 = & \Omega h_2 - Y h_1 - R_D k_B a^2 V_0 - k_A R_D a V_0 + \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B a^2 R_D + \\
& + \Omega V_0 Y (k_A - k_B) + YV_0 (k_A - k_B) h_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{10} = & \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B R_D a C_R \cos \Theta + \frac{\Lambda}{\Psi} V_0 R_D C_R \cos \Theta - k_A a C_R \cos \Theta R_D + \\
& + \frac{\Lambda Y}{\Psi} V_0^2 C_R k_B (k_A - k_B) \cos \Theta - k_B V_0 R_D a C_R \cos \Theta;
\end{aligned}$$

$$a_{11} = -YV_0^2(k_A - k_B)^2 + YV_0 + R_D a V_0^2 k_B;$$

$$a_{12} = \frac{\Lambda}{\Psi} k_A k_B R_D C_R V_0 \cos \Theta.$$

Для складання другого диференціального рівняння розглянемо рух збиральної машини. Векторне рівняння швидкості руху центра L «еквівалентного колеса збиральної машини» має вигляд:

$$\bar{V}_L = \bar{V}_0 + \bar{V}_{C_1 S_1} + \bar{V}_{LC_1}, \quad (2.2.44)$$

де  $\bar{V}_{LC_1}$  – лінійна швидкість точки L щодо центра  $C_1$ , її модуль

$$V_{LC_1} = \ell \dot{\phi}_2.$$

Спроеціюємо векторні рівняння (2.2.44) на вісі  $\eta'_M$  й  $z'_M$  (рис. 2.2.2).

$$\left. \begin{aligned} V_L^{\eta'_M} &= V_0 \\ V_L^{z'_M} &= V_0 \phi_2 + \ell \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1 a \end{aligned} \right\} \quad (2.2.45)$$

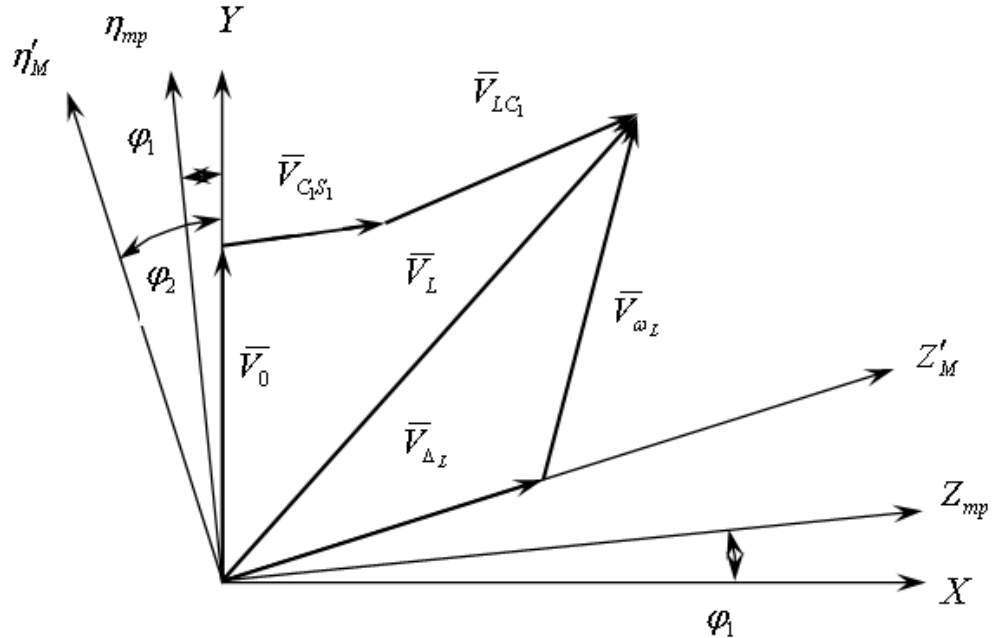


Рис. 2.2.2. Швидкість центра L «еквівалентного» колеса збиральної машини

З іншого боку:



$$\bar{V}_L = \bar{V}_{\Delta_L} + \bar{V}_{\omega_L}, \quad (2.2.46)$$

де  $\bar{V}_{\Delta_L}$  – швидкість поперечної деформації колеса збиральної машини;

$\bar{V}_{\omega_L}$  – швидкість переміщення відбитка шини.

Проекції векторного рівняння (2.2.44) на вісі  $\eta'_M$  й  $z'_M$  будуть дорівнювати:

$$\left. \begin{aligned} V_L^{\eta'_M} &= V_{\omega_L} = V_0 \\ V_L^{z'_M} &= V_{\Delta_L} + V_{\omega_L} \psi_L \end{aligned} \right\}. \quad (2.2.47)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (2.2.45) і (2.2.47), одержимо:

$$V_{\Delta_L} + V_{\omega_L} \psi_L = V_0 \varphi_2 + \ell \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 a \quad (2.2.48)$$

Так як  $V = \frac{d\Delta_L}{dt}$ ,  $V_{\omega_L} \approx V_0$ ,  $a\psi_L = k_L \Delta_L$ , то рівняння (2.2.45) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\Delta_L}{dt} + V_0 k_L \Delta_L = V_0 \varphi_2 + \ell \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 a. \quad (2.2.49)$$

Враховуючи вираз (2.27), маємо:

$$\dot{f}_2(t) - \frac{\Phi}{\Psi\Gamma} \dot{f}_3(t) + \frac{V_0}{\Psi} k_L f_2(t) - \frac{V_0 k_L}{\Psi\Gamma} f_3(t) = V_0 \varphi_2 + \ell \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 a. \quad (2.2.50)$$

Диференціюємо за часом друге та третє рівняння залежностей (2.24):

$$\begin{aligned} \frac{df_2(t)}{dt} &= \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y.m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 V_0 (a^2 m_{y.m.} + a n m_{np}) + \ddot{\varphi}_3 V_0 d m_{np} + \\ &+ C_R R_D V_0 \dot{\varphi}_2 \cos \Theta + \ddot{\varphi}_2 C_R R_D; \\ \frac{df_3(t)}{dt} &= \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 a d m_{np} + \ddot{\varphi}_2 n d m_{np}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Підставимо в рівняння (2.2.50) вираз (2.2.51), в результаті одержимо диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Psi} \left[ \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 V_0 (a^2 m_{y..m.} + an m_{np}) + \right. \\
& + \ddot{\varphi}_3 V_0 dm_{np} + C_R R_D V_0 \dot{\varphi}_2 \cos \Theta + \ddot{\varphi}_2 C_R R_D \left. \right] - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} \left[ \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \right. \\
& + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 C_R R_D \left. \right] - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} \left[ \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} \right] + \\
& + \frac{V_0 k_L}{\Psi} \left[ \ddot{\varphi}_2 V_0 (I_{S_1} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) \right] + \ddot{\varphi}_1 V_0 (abm_{y..m.} + an m_{np}) + \\
& + \ddot{\varphi}_3 V_0 ndm_{np} + C_R R_D V_0 \sin \Theta + \varphi_2 C_R R_D V_0 \cos \Theta + R_D a \dot{\varphi}_1 + \\
& + \dot{\varphi}_2 a C_R R_D \cos \Theta \left. \right] - \frac{V_0 k_L}{\Psi \Gamma} \left[ \ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 adm_{np} + \ddot{\varphi}_2 ndm_{np} \right] = \\
& = V_0 \varphi_2 + \ell \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 a.
\end{aligned} \tag{2.2.52}$$

Перетворимо рівняння (2.2.52):

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{\Psi} V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} ndm_{np} \right] \ddot{\varphi}_2 + \left[ \frac{1}{\Psi} V_0 (abm_{y..m.} + an m_{np}) - \right. \\
& - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} adm_{np} \left. \right] \ddot{\varphi}_1 + \left[ \frac{1}{\Psi} V_0 dm_{np} - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) \right] \ddot{\varphi}_3 + \\
& + \left[ \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} (abm_{y..m.} + an m_{np}) - \frac{V_0 k_L}{\Psi} adm_{np} \right] \dot{\varphi}_1 + \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} (I_{S_1} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) - \\
& - \frac{V_0 k_L}{\Psi \Gamma} ndm_{np} + \frac{1}{\Psi} C_R R_D \left. \right] \dot{\varphi}_2 + \left[ - \frac{V_0 k_L}{\Psi \Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} ndm_{np} \right] \dot{\varphi}_3 + \\
& + \left[ \frac{V_0 k_L}{\Psi} R_D a - a \right] \dot{\varphi}_1 + \left[ \frac{V_0 k_L}{\Psi} R_D a C_R \cos \Theta - \ell + \frac{V_0 k_L}{\Psi} C_R R_D V_0 \cos \Theta \right] \dot{\varphi}_2 + \\
& + \left[ \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} C_R R_D \cos \Theta - V_0 \right] \varphi_2 - \frac{V_0 k_L}{\Psi} C_R R_D V_0 \sin \Theta = 0;
\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Рівняння (2.2.53) можна представити у вигляді:

$$b_0 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \ddot{\varphi}_3 + b_3 \dot{\varphi}_1 + b_4 \dot{\varphi}_2 + b_5 \dot{\varphi}_3 + b_6 \varphi_1 + b_7 \varphi_2 + b_8 \varphi_2 = 0, \tag{2.2.54}$$

$$b_0 = \frac{1}{\Psi} V_0 (a^2 m_{y..m.} + an m_{np}) - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} adm_{np};$$

$$b_1 = \frac{1}{\Psi} V_0 (I_{S_2} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} ndm_{np};$$

де  $b_2 = \frac{1}{\Psi} V_0 dm_{np} - \frac{\Phi}{\Psi \Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np});$

$$b_3 = \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} (abm_{y..m.} + an m_{np}) - \frac{V_0 k_L}{\Psi} adm_{np};$$

$$b_4 = \frac{V_0^2 k_L}{\Psi} (I_{S_1} + b^2 m_{y..m.} + n^2 m_{np}) - \frac{V_0 k_L}{\Psi} ndm_{np} + \frac{1}{\Psi} C_R R_D;$$

$$\begin{aligned}
b_5 &= -\frac{V_0 k_L}{\Psi \Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \frac{V_0 k_L}{\Psi} ndm_{np}; \\
b_6 &= \frac{V_0 k_L}{\Psi} R_D a - a; \quad b_7 = \frac{V_0 k_L}{\Psi} R_D a C_R \cos \Theta - \ell + \frac{V_0 k_L}{\Psi} C_R R_D V_0 \cos \Theta; \quad (2.2.55) \\
b_8 &= \frac{V_0 k_L}{\Psi} C_R R_D \cos \Theta - V_0.
\end{aligned}$$

Аналогічним чином складаємо третє диференціальне рівняння.

Векторне рівняння руху центра «еквівалентного» колеса причепа-візка має вигляд:

$$\bar{V}_N = \bar{V}_0 + \bar{V}_{C_1 S_1} + \bar{V}_{C_2 C_1} + \bar{V}_{NC_2}, \quad (2.2.56)$$

де  $\bar{V}_{C_2 C_1}$  – лінійна швидкість точки причепа  $C_2$  візка до збиральної машини в обертовому русі щодо центра  $C_1$ , її модуль  $V_{C_2 C_1} = \dot{\phi}_2 n$ ;

$\bar{V}_{NC_2}$  – лінійна швидкість центра  $N$  «еквівалентного» колеса візка, в обертовому русі щодо центра  $C_2$ , її модуль  $V_{NC_2} = \dot{\phi}_3 d$ .

План швидкостей точки  $N$  наведений на рис. 2.2.3.

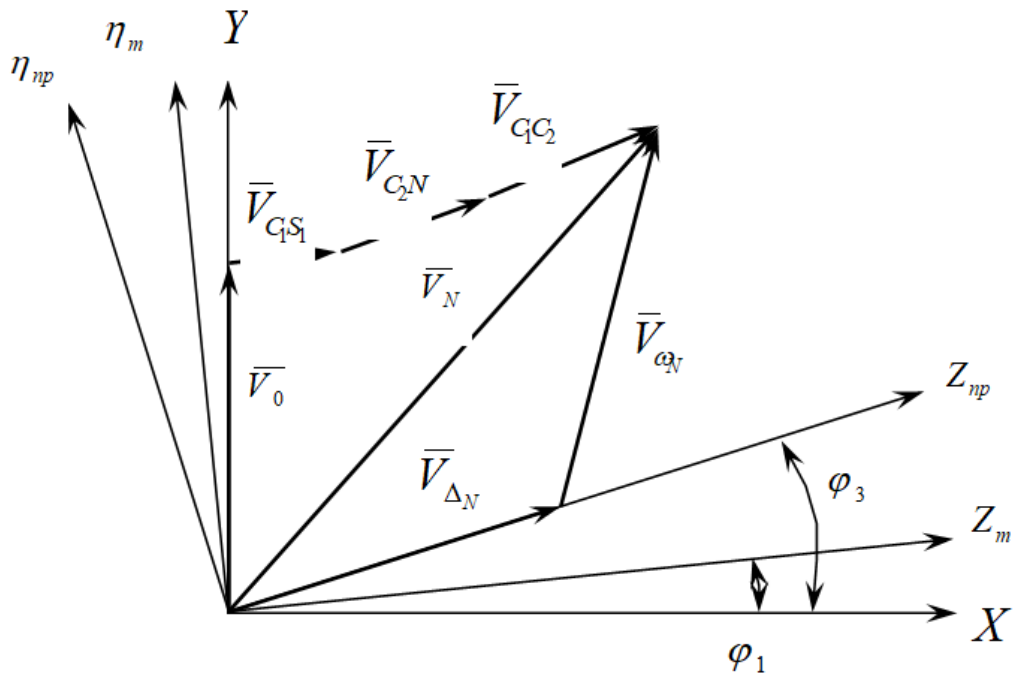


Рис. 2.2.3. Швидкість центра  $N$  «еквівалентного» колеса причепа-візка

Спроеціюємо векторне рівняння (2.2.56) на осі  $Z_{np}$  й  $\eta_{np}$ :

$$\begin{aligned} V_{Z_{np}} &= V_0 \cos(90 - \varphi_3) + \varphi a \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_2 n \cos(\delta + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ &+ \varphi_3 d = V_0 \varphi_3 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_3 d + \dot{\varphi}_2 n; \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

де  $\delta$  – кут відхилення дишла збиральної машини від осі у в робочому положенні ( $\delta = 12^\circ$ , тому що  $\cos 12^\circ = 0,978$ , будемо вважати  $\cos \delta = 1$ ).

$$V_{\eta_{np}} \approx V_0. \quad (2.2.58)$$

З іншої сторони швидкість  $\bar{V}_N$  можна визначити з векторного рівняння:

$$\bar{V}_N = \bar{V}_{\Delta_N} + \bar{V}_{\omega_N}. \quad (2.2.59)$$

Проектуючи векторне рівняння (2.2.59) на осі  $Z_{np}$  й  $\eta_{np}$ :

$$V_{Z_{np}} = V_{\Delta_N} + V_{\omega_N} + V_{\omega_N} \psi_{np}, \quad (2.2.60)$$

$$V_{\eta_{np}} = V_{\omega_{np}} \quad (2.2.61)$$

Дорівнюємо праві частини виражень (2.2.59) і (2.2.60) одержимо диференціальне рівняння:

$$\frac{d\Delta_{np}}{dt} + V_0 k_{np} \Delta_{np} = V_0 \varphi_3 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_3 d + \dot{\varphi}_2 n. \quad (2.2.62)$$

Диференціюємо за часом вираз (2.2.26):

$$\frac{d\Delta_{np}}{dt} = \frac{1}{\Gamma} [\ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 a d m_{np} + \ddot{\varphi}_2 n d m_{np}], \quad (2.2.63)$$

Підставимо вирази (2.2.63) і (2.2.26) у рівняння (2.2.62):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma} [\ddot{\varphi}_3 (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \ddot{\varphi}_1 a d m_{np} + \ddot{\varphi}_2 n d m_{np}] + \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) + \\ + \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} (\ddot{\varphi}_1 a d m_{np} + \ddot{\varphi}_2 n d m_{np}) = V_0 \varphi_3 + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_3 d + \dot{\varphi}_2 n. \end{aligned} \quad (2.2.64)$$

Після перетворень рівняння (2.2.64) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma} adm_{np} \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{\Gamma} ndm_{np} \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{\Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) \ddot{\varphi}_3 + \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}) \dot{\varphi}_3 + \\ & + \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} adm_{np} \dot{\varphi}_1 + \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} ndm_{np} \dot{\varphi}_2 - a \dot{\varphi}_1 + n \dot{\varphi}_2 + d \dot{\varphi}_3 - V_0 \varphi_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

Рівняння (2.2.65) можна представити у вигляді:

$$c_0 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \ddot{\varphi}_3 + c_3 \dot{\varphi}_1 + c_4 \dot{\varphi}_2 + c_5 \dot{\varphi}_3 + c_6 \varphi_1 + c_7 \varphi_2 + c_8 \varphi_3 + c_9 \varphi_3 = 0, \quad (2.2.66)$$

$$\text{де } c_0 = \frac{1}{\Gamma} adm_{np}; \quad c_1 = \frac{1}{\Gamma} ndm_{np}; \quad c_2 = \frac{1}{\Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}); \quad c_3 = \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} adm_{np};$$

$$c_4 = \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} ndm_{np}; \quad c_5 = \frac{V_0 k_{np}}{\Gamma} (I_{S_3} + d^2 m_{np}); \quad c_6 = -a; \quad c_7 = -n; \quad (2.2.67)$$

$$c_8 = -d; \quad c_9 = -V_0$$

Таким чином, отримана система диференціальних рівнянь руху збирального агрегату [91]:

$$\left. \begin{aligned} & a_0 \ddot{\varphi}_1 + a_1 \ddot{\varphi}_2 + a_2 \ddot{\varphi}_3 + a_3 \dot{\varphi}_1 + a_4 \dot{\varphi}_2 + a_5 \dot{\varphi}_3 + a_6 \varphi_1 + a_7 \varphi_2 + a_8 \varphi_3 + \\ & + a_9 \dot{\varphi}_1 + a_{10} \dot{\varphi}_2 + a_{11} \dot{\varphi}_3 + a_{12} \varphi_2 = 0; \\ & b_0 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \ddot{\varphi}_3 + b_3 \dot{\varphi}_1 + b_4 \dot{\varphi}_2 + b_5 \dot{\varphi}_3 + b_6 \varphi_1 + b_7 \varphi_2 + b_8 \varphi_2 = 0; \\ & c_0 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \ddot{\varphi}_3 + c_3 \dot{\varphi}_1 + c_4 \dot{\varphi}_2 + c_5 \dot{\varphi}_3 + c_6 \varphi_1 + c_7 \varphi_2 + \\ & + c_8 \varphi_3 + c_9 \varphi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.68)$$

Коефіцієнтами рівнянь (2.2.68) є вирази (2.2.43), (2.2.55) і (2.2.67).

## РОЗДІЛ ІІІ. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ ЛАНОК ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ

### 2.3.1. Диференціальні рівняння руху трактора при агрегуванні збирального агрегату

Для спрощення аналізу стійкості руху агрегату, а також виявлення області припустимих значень факторів, що впливає на стійку роботу збирального агрегату, розглянемо рух трактора, збиральної машини та візка-причепи окремо, замінивши при цьому в'язі їх реакціями.

На першому етапі розглянемо рух трактора. Нехай трактор рухається по полю зі швидкістю  $V_0 = const$ . У відносному русі трактор робить плоско-паралельний рух із двома ступенями вільності. На трактор діють наступні сили та моменти сил (рис.2.3.1) [44].

$\bar{T}_A$  і  $\bar{T}_B$  – сили пружності шин передніх і задніх коліс трактора;

$M_A$  й  $M_B$  – моменти сил пружності передніх і задніх коліс трактора;

$\bar{S}_A$  – сила опору передніх коліс трактора;

$\bar{F}_B$  – рушійна сила трактора;

$\bar{R}_{C_1}$  – реакція в'язі зі збиральною машиною.

Для складання диференціальних рівнянь руху трактора використаємо рівняння Лагранжа II роду в узагальнених координатах [1].

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{S_1}} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_{S_1}} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

Кінетична енергія трактора у відносному русі визначається зі співвідношення:

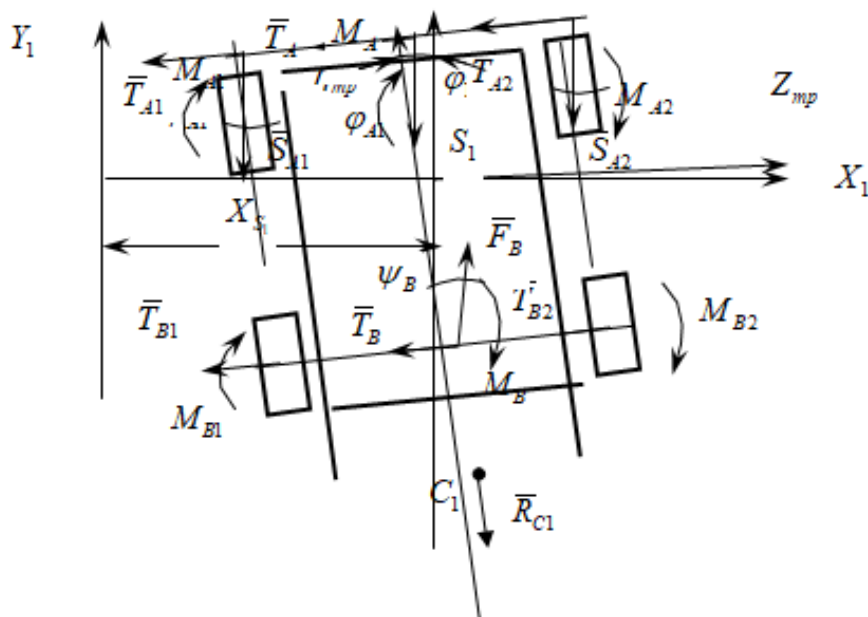


Рис. 2.3.1. Схема сил і моментів сил, що діють на трактор

$$T = \frac{1}{2} (I_{s_1} \dot{\phi}_1^2 + m_{mp} \dot{x}_{s_1}^2), \quad (2.3.2)$$

де  $m_{mp}$  – маса трактора.

Знаходимо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах і швидкостям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} &= I_{s_1} \dot{\phi}_1; & \frac{\partial T}{\partial \phi_1} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{s_1}} &= m_{mp} \dot{x}_{s_1}; & \frac{\partial T}{\partial x_{s_1}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Диференціюємо за часом вираз (2.3.3):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} \right] = I_{s_1} \ddot{\phi}_1, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{s_1}} \right] = m_{mp} \ddot{x}_{s_1}. \quad (2.3.4)$$

Підставимо вирази (2.3.3) і (2.3.4) у рівняння (2.3.1)

$$\left. \begin{aligned} I_{s_1} \ddot{\phi}_1 &= Q_1 \\ m_{mp} \ddot{x}_{s_1} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

Визначаємо узагальнені сили  $Q_1$  і  $Q_2$  для чого знаходимо суми

елементарних робіт:

$$\begin{aligned}
& \sum \delta A_{\varphi_1} = \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_A) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_B) + \delta A_{\varphi_1}(M_A) + \delta A_{\varphi_1}(M_B) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_A) + \\
& + \delta A_{\varphi_1}(\bar{F}_B) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{R}_{C_1}) = T_A \cdot h_1 \cdot \delta \varphi_1 - T_B \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 - M_A \cdot \delta \varphi_1 - \\
& - M_B \cdot \delta \varphi_1 + F_B \cdot \psi_B \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 + R_{C_1} \sin \Theta \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 + S_A \cdot \psi_A \cdot \delta \varphi_1 \cdot h_1; \\
& \sum \delta A_{x_{S_1}} = \delta A_{x_{S_1}}(\bar{T}_A) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{T}_B) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{S}_A) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{F}_B) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{R}_{C_1}) = \\
& = -T_A \cdot \delta x_{S_1} - T_B \cdot \delta x_{S_1} - S_A \cdot \psi_A \cdot \delta x_{S_1} + F_B \cdot \psi_B \cdot \delta x_{S_1} - R_{C_1} \cdot \sin \Theta \cdot \delta x_{S_1}; \\
& Q_1 = T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + F_B \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \sin \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \\
& Q_2 = -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + F_B \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \sin \Theta
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

де  $\Theta$ —кут між віссю в і вектором  $\bar{R}_{C_1}$ , для спрощення подальшого аналізу стійкості руху приймемо  $R_{C_1} \sin(\Theta) = R_{C_1} \cdot \Theta = const$ .

Виходячи з того, що  $\bar{F}_B = \bar{S}_A + \bar{R}_{C_1}$ , узагальнені сили  $Q_1$  і  $Q_2$  приймають вид:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + S_A \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot \psi_B \cdot h_2 + \\
& + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \\
Q_2 &= -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + S_A \cdot \psi_B + R_{C_1} \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \Theta
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Підставляємо значення узагальнених сил (2.3.7) у рівняння (2.3.5)

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 &= T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + S_A \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot \psi_B \cdot h_2 + \\
& + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \\
m_{mp} \cdot \ddot{x}_{S_1} &= -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + S_A \cdot \psi_B + R_{C_1} \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \Theta
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

З огляду на сили деформацій шин, кути закручування шин, а також моменти сил деформацій шин рівняння (2.3.8) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 &= -C_A \cdot h_1 \cdot \Delta_A + C_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + f_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + f_B \cdot k_B \cdot \Delta_B + \\
& + S_A \cdot k_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + \\
& + R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B \cdot \Delta_B; \\
m_{mp} \cdot \ddot{x}_{S_1} &= C_A \cdot \Delta_A + C_B \cdot \Delta_B - S_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + S_A \cdot k_B \cdot \Delta_B + \\
& + R_{C_1} \cdot k_B \cdot \Delta_B - R_{C_1} \cdot \Theta;
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Перетворимо отримані рівняння (2.3.9):



$$\begin{aligned}
I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 &= \Delta_A \cdot (-C_A \cdot h_1 + f_A \cdot k_A + S_A \cdot k_A) + \Delta_B (C_B \cdot h_2 + f_B \cdot k_B + \\
&+ S_A \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B) + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2; \\
m_{mp} \cdot \ddot{x}_{S_1} &= \Delta_A (C_A - S_A \cdot k_A) + \Delta_B (C_B + S_A \cdot k_B + R_{C_1} \cdot k_B) + R_{C_1} \cdot \Theta;
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
A &= -C_A \cdot h_1 + f_A \cdot k_A + S_A \cdot k_A; \\
B &= C_B \cdot h_2 + f_B \cdot k_B + S_A \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B; \\
C &= C_A - S_A \cdot k_A; \\
D &= C_B + S_A \cdot k_B + R_{C_1} \cdot k_B; \\
E &= R_{C_1} \cdot \Theta.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 &= \Delta_A \cdot A + \Delta_B \cdot B + E \cdot h_2; \\
m_{mp} \cdot \ddot{x}_{S_1} &= \Delta_A \cdot C + \Delta_B \cdot D + E.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Замінімо ліві частини рівнянь (2.3.12) змінними  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ .

Тоді система рівнянь (2.3.12) приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \Delta_A \cdot A + \Delta_B \cdot B + E \cdot h_2; \\
f_2(t) &= \Delta_A \cdot C + \Delta_B \cdot D + E.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Вирішимо отриману систему рівнянь (2.3.13) відносно  $\Delta_A$  і  $\Delta_B$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= \frac{I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 D - m_{mp} \ddot{x}_{S_1} B + E(B - Dh_2)}{AD - CB}; \\
\Delta_B &= \frac{I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 C - m_{mp} \ddot{x}_{S_1} A + E(A - Ch_2)}{BC - AD}
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Диференціюємо за часом вираз (2.3.14):

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta_A}{dt} &= \frac{I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 D - m_{mp} \ddot{x}_{S_1} B}{AD - CB}; \\
\frac{d\Delta_B}{dt} &= \frac{I_{S_1} \ddot{\varphi}_1 C - m_{mp} \ddot{x}_{S_1} A}{BC - AD}
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Складемо диференціальні рівняння деформацій шин коліс трактора, для чого використаємо векторні рівняння швидкостей центрів еквівалентних коліс:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_A &= \vec{V}_0 + \vec{V}_{S_1} + \vec{V}_{AS_1}, \\
\vec{V}_B &= \vec{V}_0 + \vec{V}_{S_1} + \vec{V}_{BS_1}
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

По модулю  $V_{S_1} = \dot{x}_{S_1}$ ,  $V_{AS_1} = h_1 \dot{\phi}_1$ ,  $V_{BS_1} = h_2 \dot{\phi}_1$ .

З іншого боку, швидкість центра кожного колеса дорівнює сумі двох векторів: швидкості поперечної деформації  $\bar{V}_\Delta$  та швидкості переміщення відбитка шини по опорній поверхні  $\bar{V}_\omega$ .

Отже, для швидкостей  $\bar{V}_A$  і  $\bar{V}_B$  одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_A &= \bar{V}_{\Delta A} + \bar{V}_{\omega A} \\ \bar{V}_B &= \bar{V}_{\Delta B} + \bar{V}_{\omega B} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.17)$$

З рівностей (2.3.16) і (2.3.17) випливає:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{\Delta A} + \bar{V}_{\omega A} &= \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{AS_1} \\ \bar{V}_{\Delta B} + \bar{V}_{\omega B} &= \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{BS_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.18)$$

Зобразимо векторні рівняння (2.3.18) графічно (рис. 2.3.2) [44].

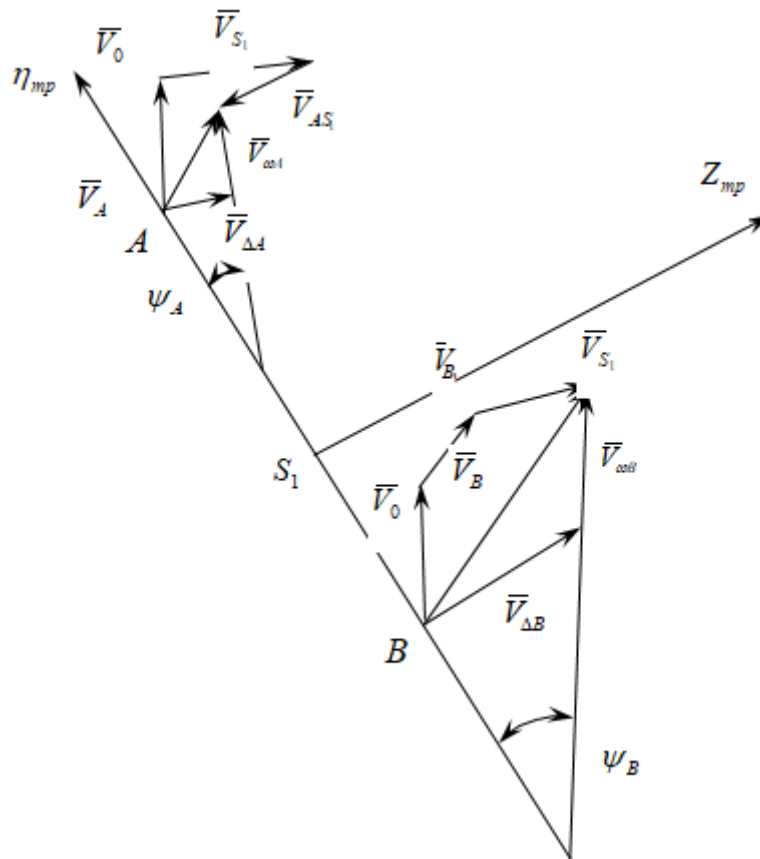


Рис. 2.3.2. Графічне визначення швидкостей центрів А і В «еквівалентних» коліс

Спроекціюємо векторні рівняння (2.3.18) на осі  $Z_{\text{ТР}}$  і  $\eta_{\text{ТР}}$ :

$$\begin{aligned} V_{\Delta A} + V_{\omega A} \cdot \sin \psi_A &= V_0 \sin \varphi_1 + V_{S_1} \cos \varphi_1 - V_{AS_1}; \\ V_{\Delta B} + V_{\omega B} \cdot \sin \psi_B &= V_0 \sin \varphi_1 + V_{S_1} \cos \varphi_1 + V_{BS_1}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

на вісь  $\eta_{\text{ТР}}$ :

$$\begin{aligned} V_{\omega A} \cdot \cos \psi_A &= V_0 \cos \varphi_1 - V_{S_1} \sin \varphi_1; \\ V_{\omega B} \cdot \cos \psi_B &= V_0 \cos \varphi_1 - V_{S_1} \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

З огляду на то, що кути  $\varphi_1$ ,  $\psi_A$ ,  $\psi_B$  – малі кути, можемо рівняння (2.3.19) і (2.3.20) представити у вигляді:

$$\begin{aligned} V_{\Delta A} + V_{\omega A} \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} \varphi_1 - V_{AS_1}; \\ V_{\Delta B} + V_{\omega B} \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} \varphi_1 + V_{BS_1}; \\ V_{\omega A} &= V_0 - V_{S_1} \varphi_1; \\ V_{\omega B} &= V_0 - V_{S_1} \varphi_1. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Через те, що  $V_{S_1}$  й  $\varphi_1$  малі величини, їх добутком можна зневажити, тоді:

$$V_{\omega A} \approx V_{\omega B} \approx V_0. \quad (2.3.22)$$

Швидкість поперечної деформації шин передніх  $V_{\Delta A}$  і задніх  $V_{\Delta B}$  коліс трактора можна визначити зі співвідношень:

$$\left. \begin{aligned} V_{\Delta A} &= \frac{d\Delta_A}{dt} \\ V_{\Delta B} &= \frac{d\Delta_B}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.23)$$

Підставимо в перше та друге рівняння (2.3.21) значення швидкості поперечної деформації шин передніх і задніх коліс трактора:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_A}{dt} + V_{\omega A} \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} \varphi_1 - V_{AS_1}; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_{\omega B} \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} \varphi_1 + V_{BS_1}. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Так як  $V_{\omega A} \approx V_{\omega B} \approx V_0$ , то рівняння (2.3.24) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} - V_{AS_1}; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} + V_{BS_1}.\end{aligned}\quad (2.3.25)$$

Підставимо чисельні значення швидкостей  $\bar{V}_{S_1}$ ,  $\bar{V}_{AS_1}$  і  $\bar{V}_{BS_1}$  в рівняння (2.3.25):

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + \dot{x}_{S_1} - \dot{\varphi}_1 h_1 \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + \dot{x}_{S_1} + \dot{\varphi}_1 h_2\end{aligned}\right\} \quad (2.3.26)$$

Кути закручування шин передніх  $\psi_A$  й задніх  $\psi_B$  коліс визначаємо із залежностей:

$$\psi_A = k_A \cdot \Delta_A; \quad (2.3.27)$$

$$\psi_B = k_B \cdot \Delta_B.$$

Тоді диференціальні рівняння (2.3.26) приймуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot k_A \cdot \Delta_A &= V_0 \varphi_1 + \dot{x}_{S_1} - \dot{\varphi}_1 h_1 \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot k_B \cdot \Delta_B &= V_0 \varphi_1 + \dot{x}_{S_1} + \dot{\varphi}_1 h_2\end{aligned}\right\} \quad (2.3.28)$$

Підставляємо в систему диференціальних рівнянь (2.3.28) значення деформацій шин коліс (2.3.14), а також їх похідних (2.3.15).

$$\begin{aligned}I_{S_1} D \ddot{\varphi}_1 - m_{mp} B \ddot{x}_{S_1} + I_{S_1} D \ddot{\varphi}_1 k_A V_0 - m_{mp} \dot{x}_{S_1} B k_A V_0 + E(B - Dh_2) V_0 k_A &= \\ = \dot{x}_{S_1} (AD - CB) + V_0 \varphi_1 (AD - CB) - \dot{\varphi}_1 (AD - CB) h_1; \\ I_{S_1} C \ddot{\varphi}_1 - m_{mp} A \ddot{x}_{S_1} + I_{S_1} C \ddot{\varphi}_1 k_A V_0 - m_{mp} \dot{x}_{S_1} A k_A V_0 + E(A - Ch_2) V_0 k_A &= \\ = \dot{x}_{S_1} (BC - AD) + V_0 k_A \varphi_1 (BC - AD) - \dot{\varphi}_1 (BC - AD) h_2.\end{aligned}\quad (2.3.29)$$

Диференціальні рівняння (2.3.29) можна представити у вигляді [97]:

$$\left. \begin{aligned}a_0 \ddot{\varphi}_1 + a_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \varphi_1 + a_3 \varphi_1 + a_4 \ddot{x}_{S_1} + a_5 \dot{x}_{S_1} + a_6 x_{S_1} + a_7 &= 0 \\ b_0 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 + b_2 \varphi_1 + b_3 \varphi_1 + b_4 \ddot{x}_{S_1} + b_5 \dot{x}_{S_1} + b_6 x_{S_1} + b_7 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (2.3.30)$$

де

$$\begin{aligned}
a_0 &= I_{S_1} D; & b_0 &= I_{S_1} C; \\
a_1 &= I_{S_1} D k_A V_0; & b_1 &= I_{S_1} D k_A V_0; \\
a_2 &= (AD - CB) h_1; & b_2 &= -h_2 \cdot (BC - AD); \\
a_3 &= (CB - AD) \cdot V_0; & b_3 &= -V_0 \cdot k_A (BC - AD); \\
a_4 &= -m_{mp} \cdot B; & b_4 &= -m_{mp} \cdot A; \\
a_5 &= -m_{mp} \cdot B \cdot k_A \cdot V_0; & b_5 &= -m_{mp} \cdot A \cdot k_A \cdot V_0; \\
a_6 &= CB - AD; & b_6 &= AD - BC; \\
a_7 &= E(B - Dh_2) V_0 k_A; & b_7 &= E(A - C \cdot h_2) V_0 \cdot k_A.
\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

### 2.3.2. Диференціальні рівняння руху збиральної машини обчислюючого типу

Розглянемо рух причіпної збиральної машини обчислюючого типу по плоскій горизонтальній поверхні поля зі швидкістю  $v_0 = \text{const}$ , замінивши при цьому в'язі із трактором і причепом їх реакціями. У відносному русі збиральна машина здійснює плоскопаралельний рух з одним ступенем вільності. На збиральну машину діють наступні сили й моменти сил (рис.2.3.3) [45, 46]:

$\bar{T}_{L_1}$  і  $\bar{T}_{L_2}$  – сили пружності шин лівого та правого коліс збиральної машини;

$M_{L_1}$  і  $M_{L_2}$  – моменти сил пружності шин лівого та правого коліс збиральної машини;

$\bar{S}_{L_1}$  і  $\bar{S}_{L_2}$  – сили опору лівого та правого коліс збиральної машини;

$\bar{R}'_{C_1}$  – реакція в'язі із трактором;

$\bar{R}_{C_2}$  – реакція в'язі із причепом-візком для збирання обчесаного вороху;

$\bar{R}_D$  – головний вектор сил опору очосу.

Для складання диференціального рівняння руху збиральної машини використаємо рівняння Лагранжа II роду в узагальнених координатах [1]. В якості узагальненої координати приймаємо кут  $\varphi_2$

(рис. 2.3.3).

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_3. \quad (2.3.32)$$

Визначаємо кінетичну енергію збиральної машини:

$$T_{y.m.} = \frac{1}{2} \cdot (I_{C_1} \cdot \dot{\varphi}_2)^2, \quad (2.3.33)$$

де  $I_{C_1}$  – момент інерції збиральної машини щодо вертикальної осі, що проходить через точку причепа  $C_1$ .

Знаходимо узагальнену силу  $Q_3$ , для чого повернемо збиральну машину на кут  $\delta\varphi_2$  і визначимо суму елементарних робіт.

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\varphi_2} = & \delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_1}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{T}_{L_2}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_1}) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{S}_{L_2}) + \\ & + \delta A_{\varphi_2}(M_{L_1}) + \delta A_{\varphi_2}(M_{L_2}) + \delta A_{\varphi_2}(R_D) + \delta A_{\varphi_2}(\bar{R}_{C_2}), \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

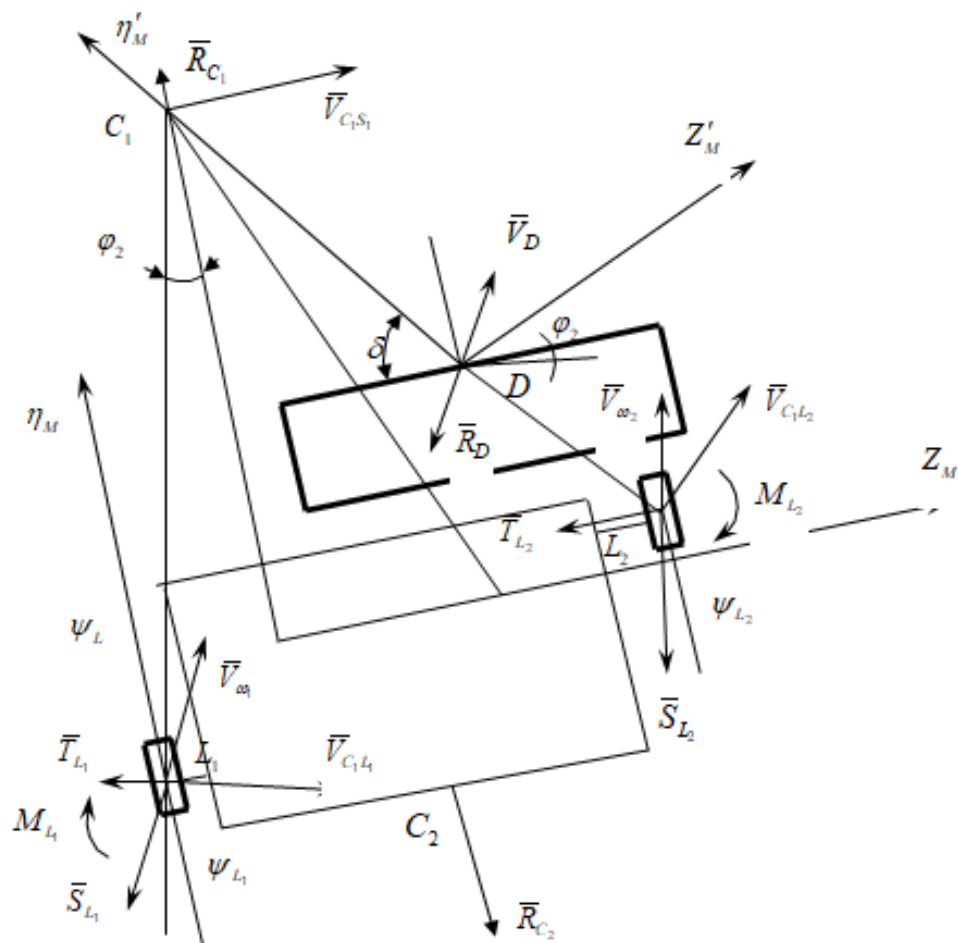


Рис. 2.3.3. Схема сил і моментів сил, прикладених до збиральної машини при заміні в'язів їх реакціями

де  $\delta A_{\varphi_2}(\bar{R}_{C_2})$  – елементарна робота сили реакції в'язі із причепом-візком при повороті збиральної машини на кут  $\delta\varphi_2$ .

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\varphi_2} = & -T_L \cdot \ell \cdot \delta\varphi_2 - T_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} - 2M_L \cdot \delta\varphi_2 - S_L \cdot \ell \cdot \psi_L \cdot \delta\varphi_2 - \\ & - S_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} \cdot \psi_L \cdot \delta\varphi_2 - S_L \cdot (p + \ell \cdot \delta\varphi_2) \cdot \delta\varphi_2 - R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M \cdot \delta\varphi_2 + (2.3.35) \\ & + R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n \cdot \delta\varphi_2. \end{aligned}$$

Розділимо почленно вираз (2.3.35) на  $\delta\varphi_2$  та отримаємо значення узагальненої сили  $Q_2$ .

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\varphi_2} = & -T_L \cdot \ell - T_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} - 2M_L - S_L \cdot \ell \cdot \psi_L - S_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} \cdot \psi_L - (2.3.36) \\ & - S_L \cdot (p + \ell \cdot \delta\varphi_2) - R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M + R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n. \end{aligned}$$

Для складання диференціального рівняння (3.32) необхідно знайти частинні похідні від кінетичної енергії збиральної машини по узагальнених координатах і по узагальнених швидкостях.

Знаходимо частинну похідну від кінетичної енергії збиральної машини по узагальненій координаті:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (2.3.37)$$

Визначаємо частинну похідну від кінетичної енергії по узагальненій швидкості:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_{C_1} \cdot \dot{\varphi}_2. \quad (2.3.38)$$

Диференціюємо за часом вираз (2.3.38)

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right] = I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2. \quad (2.3.39)$$

Підставляємо вирази (2.3.39), (2.3.37) і (2.3.36) у рівняння (2.3.32):

$$I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 = -T_L \cdot \ell - T_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} - 2M_L - S_L \cdot \ell \cdot \psi_L - S_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} \cdot \psi_L - R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M - R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n. \quad (2.3.40)$$

Використовуючи вираження для визначення деформацій, кутів закручування, а також моментів сил деформацій рівняння (2.3.40) можна представити у вигляді:

$$I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 = -C_L \cdot \ell \cdot \Delta_L - C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} \cdot \Delta_L - 2 \cdot k_L \cdot f_L \cdot \Delta_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \Delta_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \Delta_L \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} - R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M - R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n. \quad (2.3.41)$$

Перетворимо отримане рівняння (3.41):

$$I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 = \Delta_L \left( -C_L \cdot \ell - C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} - 2 \cdot k_L \cdot f_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} \right) - R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M - R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n. \quad (2.3.42)$$

Введемо позначення:

$$L = -C_L \cdot \ell - C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}} - 2 \cdot k_L \cdot f_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{P^2}{\ell^2}}. \quad (2.3.43)$$

В результаті одержимо:

$$I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M + R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n = \Delta_L \cdot L. \quad (2.3.44)$$

Вирішимо отримане рівняння (2.3.44) відносно  $\Delta_L$ :

$$\Delta_L = \frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + R_D \cdot C_R \cdot \gamma_M + R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n}{L}, \quad (2.3.45)$$

де  $\gamma_M$  – кут між вектором швидкості точки D (центра опору очісуючих барабанів збиральної машини) і віссю  $O_1Y_1$ , визначається з виразу  $\gamma_M = -\frac{1}{V_0} [V_0 \varphi_2 + \dot{x}_{S_1} + \dot{\varphi}_1 a + \dot{\varphi}_2 C_R]$ .

Підставимо значення кута  $\gamma_M$  в рівняння (2.3.42):

$$\Delta_L = \frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot C_R) + R_{C_2} \cdot \varphi_2 \cdot n}{L}. \quad (2.3.46)$$



Диференціюємо за часом вираз (2.3.46)

$$\frac{d\Delta_L}{dt} = \frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2 \cdot C_R) + R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n}{L}. \quad (2.3.47)$$

У той же час, виходячи із залежності:

$$\frac{d\Delta_L}{dt} = -V_0 \cdot k_L \cdot \Delta_L + V_0 \cdot \varphi_2 + a \cdot \dot{\varphi}_1 + \ddot{X}_{S_1} + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell.$$

Якщо зневажити узагальненими швидкостями  $\dot{\varphi}_1$  й  $\dot{X}_{S_1}$ , то отримаємо:

$$\frac{d\Delta_L}{dt} = -V_0 \cdot k_L \cdot \Delta_L + V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell. \quad (2.3.48)$$

Дорівнюємо праві частини виражень (2.3.47) і (2.3.48)

$$\frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2 \cdot C_R) + R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n}{L} = -V_0 \cdot k_L \cdot \Delta_L + V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell. \quad (2.3.49)$$

Підставимо в рівняння (2.3.49) значення деформацій шин коліс збиральної машини  $\Delta_L$ .

$$\begin{aligned} \frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2 \cdot C_R) + R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n}{L} &= V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell - \\ -V_0 \cdot k_L \cdot \frac{I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot C_R) - R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n}{L}. \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

Перетворимо рівняння (2.3.50):

$$\begin{aligned} I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2 \cdot C_R) + R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n &= V_0 \cdot \varphi_2 \cdot L + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell \cdot L - \\ -V_0 \cdot k_L \cdot \left( I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R}{V_0} (V_0 \cdot \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \cdot C_R) - R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n \right). \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \frac{R_D \cdot C_R^2}{V_0} \ddot{\varphi}_2 + R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n + R_D \cdot C_R \cdot \dot{\varphi}_2 &= V_0 \cdot \varphi_2 \cdot L + \dot{\varphi}_2 \cdot \ell \cdot L - \\ -V_0 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_2 + V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot n - R_D \cdot C_R \cdot V_0 \cdot k_L \cdot \varphi_2 - R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L \cdot \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

Остаточно одержуємо диференціальне рівняння виду [45]:

$$C_0 \cdot \ddot{\varphi}_2 + C_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + C_2 \cdot \varphi_2 + C_3 \cdot \varphi_2 = 0; \quad (2.3.51)$$

де

$$\begin{aligned} C_0 &= I_{C_1}; \\ C_1 &= \frac{R_D \cdot C_R^2}{V_0} + V_0 \cdot k_L \cdot I_{C_1}; \\ C_2 &= R_D \cdot C_R + R_{C_2} \cdot n - \ell \cdot L + R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L; \\ C_3 &= -V_0 \cdot L + V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} \cdot n + R_D \cdot C_R \cdot V_0 \cdot k_L \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Вирази (2.3.52) є коефіцієнтами диференціального рівняння (2.3.51).

### 2.3.3. Диференціальні рівняння руху двоосного причепа-візка для збору обчісаного вороху

Розглянемо рух причепа-візка по плоскій горизонтальній поверхні з переносною швидкістю  $v_0 = \text{const}$ . В'язь зі збиральною машиною замінимо її реакцією. У відносному русі двоосний причіп-візок здійснює плоскопаралельний рух із двома ступенями вільності.

На причеп-возик діють наступні сили й моменти сил (рис. 2.3.3):

$\bar{T}_N$  – головний вектор сил пружності шин, що виникає при поперечному зсуві передніх коліс причепа-візка;

$M_N$  – головний момент сил пружності шин передніх коліс причепа-візка, що виникає при скручуванні шин щодо осі, перпендикулярної поверхні поля;

$\bar{S}_N$  – головний момент сил опору перекочуванню передніх коліс причепа-візка;

$\bar{T}_K$  – головний вектор сил пружності шин, що виникає при поперечному зсуві задніх коліс причепа-візка;

$M_K$  – головний момент сил пружності шин задніх коліс причіпа-візка;

$\bar{S}_K$  – головний вектор сил опору перекочуванню задніх коліс

причепа-візка;

$\bar{R}'_{C_2}$  – реакція в'язі причіпа-візка зі збиральною машиною.

Для складання диференціальних рівнянь руху причепа-візка використаємо рівняння Лагранжа II роду в узагальнених координатах [1]. Як узагальнені координати приймаємо кути  $\varphi_3$  й  $\varphi_4$  (рис. 2.3.3).

Тоді система диференціальних рівнянь приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} &= Q_4; \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= Q_5. \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

Кінетична енергія причепа у відносному русі визначається зі співвідношення:

$$T_{np} = \frac{1}{2} [I_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_3^2 + I_N \cdot \dot{\varphi}_4^2 + m_{np} \cdot V_{S_4C_2}^2]. \quad (2.3.54)$$

Абсолютна швидкість центра мас причепа щодо точки  $C_2$  буде дорівнювати сумі швидкостей:

$$\bar{V}_{S_4C_2} = \bar{V}_{NC_2} + \bar{V}_{S_4N}. \quad (2.3.55)$$

Модуль швидкості центра мас причепа щодо центра  $O_1$ .

$$V_{S_4C_2} = \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot r_2. \quad (2.3.56)$$

Підставимо у вираз (2.3.54) значення абсолютної швидкості центра мас причепа-візка щодо точки  $C_2$ .

$$T_{np} = \frac{1}{2} [I_{C_2} \cdot \dot{\varphi}_3^2 + I_N \cdot \dot{\varphi}_4^2 + m_{np} \cdot (\dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot r_2)^2]. \quad (2.3.57)$$

Визначаємо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах:

$$\frac{\partial T_{np}}{\partial \varphi_3} = 0; \quad \frac{\partial T_{np}}{\partial \varphi_4} = 0. \quad (2.3.58)$$

Знаходимо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальненій швидкості:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{np}}{\partial \dot{\phi}_3} &= I_{C_2} \cdot \dot{\phi}_3 + m_{np} \cdot (\dot{\phi}_3 \cdot d_1 + \dot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1); \\ \frac{\partial T_{np}}{\partial \dot{\phi}_4} &= I_N \cdot \dot{\phi}_4 + m_{np} \cdot (\dot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + \dot{\phi}_4 \cdot r_2).\end{aligned}\tag{2.3.59}$$

Продиференціюємо за часом вираз (2.3.59)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T_{np}}{\partial \dot{\phi}_3} \right] &= I_{C_2} \cdot \ddot{\phi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1; \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T_{np}}{\partial \dot{\phi}_4} \right] &= I_N \cdot \ddot{\phi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2^2.\end{aligned}\tag{2.3.60}$$

Після підстановки виражень (2.3.58) і (2.3.60) у рівняння (2.3.53) отримаємо:

$$\begin{aligned}I_{C_2} \cdot \ddot{\phi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 &= Q_4; \\ I_N \cdot \ddot{\phi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2^2 &= Q_5.\end{aligned}\tag{2.3.61}$$

Узагальнені сили  $Q_3$  та  $Q_4$ , визначені раніше в п. п. 2.3.2, (вирази 2.3.47 і 2.3.51), підставляємо ці вирази в рівняння (2.3.61).

$$\begin{aligned}I_{C_2} \cdot \ddot{\phi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 &= -T_N d_1 - S_N d_1 \psi_N - T_K d_1 - \\ &- M_N - S_K d_1 \psi_K; \\ I_N \cdot \ddot{\phi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2^2 &= -T_K d_2 - S_K d_2 \psi_K - M_K.\end{aligned}\tag{2.3.62}$$

Підставимо в рівняння (2.3.62) значення сил пружності, моментів сил пружності і кутів закручування шин.

$$\begin{aligned}I_{C_2} \cdot \ddot{\phi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 &= -C_N \Delta_N d_1 - S_N d_1 k_N \Delta_N - C_K \Delta_K d_1 - \\ &- f_N k_N \Delta_N - S_K d_1 k_K \Delta_K; \\ I_N \cdot \ddot{\phi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2^2 &= -C_K d_2 \Delta_K - S_K d_2 k_K \Delta_K - f_K k_K \Delta_K.\end{aligned}\tag{2.3.63}$$

Перетворимо отримані рівняння (2.3.63):

$$\begin{aligned}I_{C_2} \cdot \ddot{\phi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 &= \Delta_N (-C_N d_1 - S_N d_1 k_N - f_N k_N) - \\ &- \Delta_K (C_K d_1 - S_K d_1 k_K); \\ I_N \cdot \ddot{\phi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\phi}_4 \cdot r_2^2 &= \Delta_K (-C_K d_2 - S_K d_2 k_K - f_K k_K).\end{aligned}\tag{2.3.64}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
N &= -C_N d_1 - S_N d_1 k_N - f_N k_N; \\
K &= C_K d_1 - S_K d_1 k_K; \\
M &= -C_K d_2 - S_K d_2 k_K - f_K k_K.
\end{aligned}
\tag{2.3.65}$$

В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 &= \Delta_N N - \Delta_K K; \\
I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2 &= \Delta_K M.
\end{aligned}
\tag{2.3.66}$$

Якщо ліві частини системи диференціальних рівнянь замінити функціями  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ , то система (2.3.66) приймає вид:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \Delta_N N - \Delta_K K; \\
f_2(t) &= \Delta_K M.
\end{aligned}
\tag{2.3.67}$$

Вирішимо отриману систему рівнянь (2.3.67) відносно  $\Delta_N$  й  $\Delta_K$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_K &= \frac{f_2(t)}{M}; \\
\Delta_N &= \frac{M \cdot f_1(t) - f_2(t) \cdot K}{N}.
\end{aligned}
\tag{2.3.68}$$

Після підстановки функцій  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  у вираження (2.3.68) одержимо:

$$\begin{aligned}
\Delta_N &= \frac{M \cdot (I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1)}{N} - \\
&\quad - \frac{K (I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2)}{N}; \\
\Delta_K &= \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2}{M};
\end{aligned}
\tag{2.3.69}$$

Продиференціюємо за часом вираз:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta_N}{dt} &= \frac{M \cdot (I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1)}{N} - \\
&\quad - \frac{K (I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2)}{N}; \\
\frac{d\Delta_K}{dt} &= \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2}{M};
\end{aligned}
\tag{2.3.70}$$

Складемо векторні рівняння швидкості руху центрів переднього і заднього «еквівалентних» коліс причепа-візка. При цьому, зробимо

наступні допущення:

1. точка з'єднання  $C_2$  візка зі збиральною машиною рухається зі швидкістю  $V_0$ ;
2. відносними швидкостями  $\bar{V}_{S_1}$  й  $\bar{V}_{C_1S_1}$  зневажити;
3. відносною швидкістю  $\bar{V}_{C_2C_1}$  зневажаємо.

Тоді, з урахуванням допущень, векторні рівняння швидкості руху центрів переднього і заднього «еквівалентних» коліс візка мають вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{V}_N &= \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{NC_2}; \\ \bar{V}_K &= \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{NC_2} + \bar{V}_{KN}.\end{aligned}\tag{2.3.71}$$

Якщо розглядати швидкість центрів «еквівалентних» коліс як суму швидкостей поперечної деформації  $\bar{V}_\Delta$  і переміщення відбитка шини по опорній поверхні  $\bar{V}_\omega$ , то одержимо векторні рівняння швидкостей центрів «еквівалентних» коліс причепа-візка.

$$\begin{aligned}\bar{V}_N &= \bar{V}_{\Delta N} + \bar{V}_{\omega N}; \\ \bar{V}_K &= \bar{V}_{\Delta K} + \bar{V}_{\omega K}.\end{aligned}\tag{2.3.72}$$

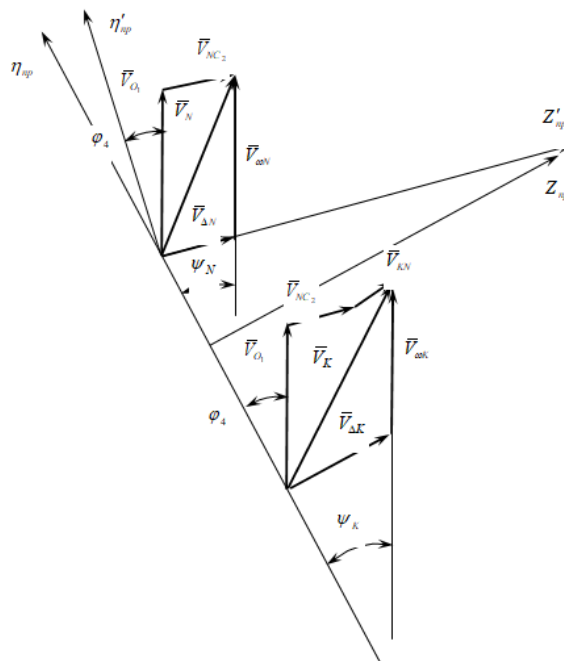


Рис.2.3.4. Графічне визначення швидкостей центрів N і K «еквівалентного» коліс

Дорівнюючи праві частини векторних рівнянь (2.3.71) і (2.3.72), одержимо:

$$\bar{V}_{\Delta N} + \bar{V}_{\omega N} = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{NC_2}; \quad (2.3.73)$$

$$\bar{V}_{\Delta K} + \bar{V}_{\omega K} = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{NC_2} + \bar{V}_{KN}. \quad (2.3.74)$$

Побудуємо плани швидкостей точок N і K.

Спроектуємо векторне рівняння (2.3.73) на осі  $z'_{np}$  й  $\eta'_{np}$ :

$$V_{\Delta N} + V_{\omega N} \cdot \sin \psi_N = V_{O_1} \cdot \sin \varphi_3 + V_{NC_2}; \quad (2.3.75)$$

$$V_{\omega N} \cdot \cos \psi_N = V_{O_1} \cdot \cos \varphi_3.$$

Так як кути  $\psi_N$  й  $\varphi_3$  малі, то їх косинуси дорівнюють одиниці, тобто  $\cos \psi_N \approx 1$  й  $\cos \varphi_3 \approx 1$ , а синуси дорівнюють самим кутам, тобто  $\sin \psi_N \approx \psi_N$ ,  $\sin \varphi_3 \approx \varphi_3$ , тоді вираз (2.3.75) приймає вигляд:

$$V_{\Delta N} + V_{\omega N} \cdot \psi_N = V_{O_1} \cdot \varphi_3 + V_{NC_2}; \quad (2.3.76)$$

$$V_{\omega N} \approx V_{O_1}.$$

Аналогічним чином спроектуємо на вісі  $z'_{np}$  й  $\eta'_{np}$  векторне рівняння (2.3.74).

$$V_{\Delta K} + V_{\omega K} \cdot \sin \psi_K = V_{O_1} \cdot \sin \varphi_4 + V_{NC_2} \cdot \cos \varphi_4 + V_{KN}; \quad (2.3.77)$$

$$V_{\omega K} \cdot \cos \psi_K = V_{O_1} \cdot \cos \varphi_4 + V_{NC_2} \cdot \sin \varphi_4.$$

або

$$V_{\Delta K} + V_{\omega K} \cdot \psi_K = V_{O_1} \cdot \varphi_4 + V_{NC_2} + V_{KN}; \quad (2.3.78)$$

$$V_{\omega K} = V_{O_1} + V_{NC_2} \cdot \varphi_4.$$

Підставимо у вирази (2.3.76) і (2.3.78) значення швидкостей  $V_{NC_2}$  і  $V_{KN}$ .

$$\begin{aligned}
V_{\Delta N} + V_{\omega N} \cdot \psi_N &= V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1; \\
V_{\Delta K} + V_{\omega K} \cdot \psi_K &= V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2; \\
V_{\omega K} &= V_{O_1} + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot \varphi_4. \\
V_{\omega N} &\approx V_{O_1}.
\end{aligned} \tag{2.3.79}$$

Якщо прийняти добуток  $\dot{\varphi}_3 \cdot \varphi_4 \cdot d_1 \approx 0$ , то вираз (2.3.79) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
V_{\Delta N} + V_{\omega N} \cdot \psi_N &= V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1; \\
V_{\Delta K} + V_{\omega K} \cdot \psi_K &= V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2; \\
V_{\omega K} &\approx V_{\omega N} \approx V_{O_1}.
\end{aligned} \tag{2.3.80}$$

З огляду на те, що  $\psi_N = \Delta_N \cdot k_N$  й  $\psi_K = \Delta_K \cdot k_K$ , а також  $V_{\Delta_N} = \frac{d\Delta_N}{dt}$  і  $V_{\Delta_K} = \frac{d\Delta_K}{dt}$  одержимо:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta_N}{dt} + V_{O_1} \cdot \Delta_N \cdot k_N &= V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1; \\
\frac{d\Delta_K}{dt} + V_{O_1} \cdot \Delta_K \cdot k_K &= V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2.
\end{aligned} \tag{2.3.81}$$

або

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta_N}{dt} &= V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 - V_{O_1} \cdot \Delta_N \cdot k_N; \\
\frac{d\Delta_K}{dt} &= V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2 - V_{O_1} \cdot \Delta_K \cdot k_K.
\end{aligned} \tag{2.3.82}$$

Дорівнюємо праві частини виражень (3.70) і (3.82)



$$\begin{aligned}
& V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 - V_{O_1} \cdot \Delta_N \cdot k_N = \\
& = \frac{M \cdot (I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1)}{N} - \\
& \frac{K(I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2)}{N} \quad (2.3.83) \\
& V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2 - V_{O_1} \cdot \Delta_K \cdot k_K = \\
& = \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2}{M}.
\end{aligned}$$

Підставимо в рівності (2.3.83) значення деформацій шин переднього  $\Delta_N$  і заднього  $\Delta_K$  «еквівалентних» коліс візка.

$$\begin{aligned}
& V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 - V_{O_1} \cdot \frac{I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot M}{N} \cdot k_N - V_{O_1} \cdot \frac{m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 \cdot M}{N} \cdot k_N - \\
& - V_{O_1} \cdot \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K}{N} \cdot k_N + V_{O_1} \cdot \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K}{N} \cdot k_N + V_{O_1} \cdot \frac{m_{np} \cdot d_1 \cdot r_2 \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot K}{N} \cdot k_N + \\
& + V_{O_1} \cdot \frac{m_{np} \cdot r_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K}{N} \cdot k_N = \frac{1}{N} (M \cdot I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + M \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + \\
& + M \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 - K \cdot I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 - K \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 - K \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2); \\
& V_{O_1} \cdot \varphi_4 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + \dot{\varphi}_4 \cdot d_2 - V_{O_1} \cdot \frac{I_N \cdot \ddot{\varphi}_4}{M} \cdot k_K - V_{O_1} \cdot \frac{m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2}{M} \cdot k_K - \\
& - V_{O_1} \cdot \frac{m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2}{M} \cdot k_K = \frac{1}{M} (I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2).
\end{aligned} \quad (2.3.84)$$

Виконаємо алгебраїчні перетворення:

$$\begin{aligned}
& N \cdot V_{O_1} \cdot \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 - V_{O_1} \cdot I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot M \cdot k_N - V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 \cdot M \cdot k_N - \\
& - V_{O_1} \cdot I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K \cdot k_N + V_{O_1} \cdot I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K \cdot k_N + V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot d_1 \cdot r_2 \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot K \cdot k_N + \\
& + V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot r_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot K \cdot k_N = M \cdot I_{C_2} \cdot \ddot{\varphi}_3 + M \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1^2 + \\
& + M \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2 \cdot d_1 - K \cdot I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 - K \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 - K \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2; \\
& M \cdot V_{O_1} \cdot \varphi_4 + M \cdot \dot{\varphi}_3 \cdot d_1 + M \cdot \dot{\varphi}_4 \cdot d_2 - V_{O_1} \cdot I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot k_K - \\
& - V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 \cdot k_K - V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2 \cdot k_K = I_N \cdot \ddot{\varphi}_4 + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_3 \cdot d_1 \cdot r_2 + \\
& + m_{np} \cdot \ddot{\varphi}_4 \cdot r_2^2.
\end{aligned} \quad (2.3.85)$$

В остаточному виді рівняння (2.3.85) являють собою систему диференціальних рівнянь [47]:

$$\begin{aligned} d_0\ddot{\varphi}_3 + d_1\dot{\varphi}_3 + d_2\dot{\varphi}_3 + d_3\varphi_3 + d_4\ddot{\varphi}_4 + d_5\dot{\varphi}_4 &= 0; \\ \ell_0\ddot{\varphi}_3 + \ell_1\dot{\varphi}_3 + \ell_2\dot{\varphi}_3 + \ell_3\ddot{\varphi}_4 + \ell_4\dot{\varphi}_4 + \ell_5\dot{\varphi}_4 + \ell_6\varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

де:

$$\begin{aligned} d_0 &= I_{C_2} \cdot M + m_{np} \cdot d_1^2 \cdot M - d_1 \cdot r_2 \cdot K \cdot m_{np}; \\ d_1 &= V_{O_1} \cdot I_{C_2} \cdot M \cdot k_N + V_{O_1} \cdot m_{np} \cdot d_1^2 \cdot M \cdot k_N + V_{O_1} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot m_{np} \cdot M \cdot k_N - \\ &\quad - V_{O_1} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot K \cdot k_N - V_{O_1} \cdot d_1 \cdot r_2 \cdot K \cdot k_N \cdot m_{np}; \\ d_2 &= -N \cdot d_1; \\ d_3 &= -N \cdot V_0; \\ d_4 &= m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot K - I_N \cdot K - m_{np} \cdot r_2^2 \cdot K; \\ d_5 &= -V_{O_1} \cdot k_N \cdot K \cdot I_N - m_{np} \cdot r_2^2 \cdot K \cdot V_0 \cdot k_N; \\ \ell_0 &= m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1; \\ \ell_1 &= V_0 \cdot k_N \cdot m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1; \\ \ell_2 &= -M \cdot d_1; \\ \ell_3 &= I_N + m_{np} \cdot r_2^2; \\ \ell_4 &= V_{O_1} \cdot k_N \cdot I_N + V_0 \cdot k_N \cdot m_{np} \cdot r_2^2; \\ \ell_5 &= -d_2 \cdot M; \\ \ell_6 &= -V_{O_1} \cdot M. \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

## РОЗДІЛ ІV. СТІЙКІСТЬ РУХУ ЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ

### 2.4.1. Умови стійкості руху збирального агрегату при прямолінійному русі центра мас трактора

Складемо характеристичне рівняння для системи диференціальних рівнянь (2.2.68), для чого приймемо  $\varphi_1 = \alpha e^{\lambda t}$ ;  $\varphi_2 = \beta e^{\lambda t}$ ;  $\varphi_3 = \delta e^{\lambda t}$  і підставимо їх значення, а також їх похідні в рівняння (2.2.68). Після підстановки отримаємо [48]:

$$\begin{aligned} & (a_0\lambda^4 + a_9\lambda^3 + a_6\lambda^2 + a_9\lambda) e^{\lambda t} \alpha + (a_1\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_7\lambda^2 + a_{10}\lambda + a_{12}) e^{\lambda t} \beta + \\ & + (a_2\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_8\lambda^2) e^{\lambda t} \delta = 0; \\ & (b_0\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_6\lambda) e^{\lambda t} \alpha + (b_1\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_7\lambda + b_8) e^{\lambda t} \beta + (b_2\lambda^3 + b_5\lambda^2) e^{\lambda t} \delta = 0; \\ & (c_0\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_6\lambda) e^{\lambda t} \alpha + (c_1\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_7\lambda) e^{\lambda t} \beta + (c_2\lambda^3 + c_5\lambda^2 + c_8\lambda + c_9\lambda) e^{\lambda t} \delta = 0. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Так як  $e^{\lambda t} \neq 0$ , то розділимо ліву й праву частини системи рівнянь (2.4.1) на  $e^{\lambda t}$ .

$$\begin{aligned} & (a_0\lambda^4 + a_9\lambda^3 + a_6\lambda^2 + a_9\lambda) \alpha + (a_1\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_7\lambda^2 + a_{10}\lambda + a_{12}) \beta + \\ & + (a_2\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_8\lambda^2) \delta = 0; \\ & (b_0\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_6\lambda) \alpha + (b_1\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_7\lambda + b_8) \beta + (b_2\lambda^3 + b_5\lambda^2) \delta = 0; \\ & (c_0\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_6\lambda) \alpha + (c_1\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_7\lambda) \beta + (c_2\lambda^3 + c_5\lambda^2 + c_8\lambda + c_9\lambda) \delta = 0 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_0\lambda^4 + a_9\lambda^3 + a_6\lambda^2 + a_9\lambda; \quad m_{12} = a_1\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_7\lambda^2 + a_{10}\lambda + a_{12}; \\ m_{13} &= a_2\lambda^4 + a_5\lambda^3 + a_8\lambda^2; \\ m_{21} &= b_0\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_6\lambda; \quad m_{22} = b_1\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_7\lambda + b_8; \\ m_{23} &= b_2\lambda^3 + b_5\lambda^2; \\ m_{31} &= c_0\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_6\lambda; \quad m_{32} = c_1\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_7\lambda; \\ m_{33} &= c_2\lambda^3 + c_5\lambda^2 + c_8\lambda + c_9\lambda \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Характеристичне рівняння системи має вигляд визначника

третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.4)$$

Розкриємо визначник (2.4.4):

$$\begin{aligned} & m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{11}m_{22}m_{31} - \\ & - m_{11}m_{23}m_{32} - m_{12}m_{21}m_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Підставимо позначення (2.4.3) у вираз (2.4.4) і одержимо характеристичне рівняння у вигляді багаточлена десятого ступеня [48]:

$$\begin{aligned} & n_0\lambda^{10} + n_1\lambda^9 + n_2\lambda^8 + n_3\lambda^7 + n_4\lambda^6 + n_5\lambda^5 + \\ & + n_6\lambda^4 + n_7\lambda^3 + n_8\lambda^2 + n_9\lambda + n_{10} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

де

$$\begin{aligned} n_0 &= a_0b_1c_2 - a_1b_2c_0 + a_1b_0c_2 + a_2b_6c_1 - a_2b_1c_0 - a_0b_2c_1 - a_1b_0c_2; \\ n_1 &= a_0b_4c_2 + a_3b_2c_1 + a_0b_1c_5 + a_1b_3c_0 + a_4b_2c_0 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + \\ & + a_5b_6c_1 + a_2b_6c_3 - a_2b_4c_0 - a_5b_1c_0 - a_2b_1c_3 - a_5b_1c_3 - a_0b_5c_1 - \\ & - a_3b_2c_1 - a_0b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_1b_0c_5; \\ n_2 &= a_0b_7c_2 + a_3b_4c_2 + a_6b_1c_2 + a_0b_4c_5 + a_3b_1c_5 + a_0b_1c_8 + a_4b_5c_0 + \\ & + a_7b_2c_2 + a_1b_3c_3 + a_4b_2c_3 + a_1b_2c_6 + a_2b_6c_1 + a_5b_3c_1 + a_8b_0c_1 + \\ & + a_2b_3c_3 + a_5b_0c_3 + a_2b_0c_7 - a_2b_7c_0 - a_5b_4c_0 - a_8b_1c_0 - a_2b_4c_3 - \\ & - a_2b_7c_3 - a_2b_1c_6 - a_3b_5c_1 - a_6b_2c_1 - a_0b_5c_3 - a_3b_2c_3 - a_0b_2c_7 - \\ & - a_1b_6c_2 - a_4b_0c_5 - a_4b_3c_2 - a_7b_0c_2 - a_1b_3c_5 - a_1b_0c_8; \\ n_3 &= a_0b_8c_2 + a_3b_7c_2 + a_6b_4c_2 + a_9b_1c_2 + a_0b_7c_5 + a_3b_4c_5 + a_6b_1c_5 + \\ & + a_0b_4c_8 + a_3b_4c_8 + a_0b_1c_9 + a_7b_5c_0 + a_4b_5c_3 + a_7b_2c_3 + a_1b_5c_6 + \\ & + a_4b_2c_6 + a_5b_6c_1 + a_8b_3c_1 + a_2b_6c_3 + a_5b_3c_3 + a_8b_8c_3 + a_8b_3c_3 + \\ & + a_2b_3c_7 + a_5b_0c_7 - a_2b_8c_0 - a_5b_7c_0 - a_8b_4c_0 - a_5b_4c_3 - a_8b_1c_3 - \\ & - a_2b_4c_6 - a_5b_1c_6 - a_6b_5c_1 - a_9b_2c_1 - a_3b_5c_3 - a_6b_2c_3 - a_0b_5c_7 - \\ & - a_3b_2c_7 - a_4b_4c_2 - a_7b_3c_2 - a_{10}b_0c_2 - a_1b_6c_8 - a_4b_0c_8 - a_1b_0c_9; \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned}
n_4 = & a_6 b_7 c_2 + a_9 b_4 c_2 + a_0 b_8 c_5 + a_3 b_7 c_5 + a_3 b_8 c_2 + a_6 b_4 c_5 + a_9 b_1 c_5 + \\
& + a_0 b_7 c_8 + a_3 b_4 c_8 + a_6 b_1 c_8 + a_0 b_4 c_9 + a_3 b_1 c_9 + a_{10} b_2 c_0 + a_{10} b_5 c_0 + \\
& + a_{12} b_2 c_0 + a_7 b_5 c_3 + a_2 b_6 c_7 + a_5 b_3 c_7 + a_8 b_0 c_7 - a_8 b_7 c_0 - a_2 b_8 c_3 - \\
& - a_5 b_8 c_0 - a_5 b_7 c_3 - a_8 b_4 c_3 - a_2 b_7 c_6 - a_5 b_4 c_6 - a_8 b_1 c_6 - a_6 b_5 c_3 - \\
& - a_9 b_5 c_1 - a_9 b_2 c_3 - a_3 b_5 c_7 - a_6 b_2 c_7 - a_4 b_4 c_5 - a_{10} b_3 c_2 - a_7 b_6 c_2 - \\
& - a_{12} b_0 c_2 - a_7 b_3 c_5 - a_{10} b_0 c_5 - a_4 b_3 c_8 - a_1 b_6 c_8 - a_7 b_0 c_8 - a_1 b_3 c_9 - \\
& - a_1 b_0 c_9 - a_4 b_0 c_9;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_5 = & a_6 b_8 c_2 + a_9 b_7 c_2 + a_3 b_8 c_5 + a_6 b_7 c_5 + a_9 b_4 c_5 + a_0 b_8 c_8 + a_3 b_7 c_8 + a_6 b_4 c_8 + a_9 b_1 c_8 + \\
& + a_0 b_7 c_9 + a_3 b_4 c_9 + a_6 b_1 c_9 + a_{12} b_5 c_0 + a_{10} b_2 c_3 + a_{10} b_5 c_3 + a_{12} b_2 c_3 + \\
& + a_7 b_5 c_6 + a_8 b_6 c_3 + a_5 b_6 c_7 + a_8 b_3 c_7 - a_8 b_8 c_0 - a_5 b_8 c_3 - a_8 b_7 c_3 - a_2 b_8 c_6 - \\
& - a_5 b_7 c_6 - a_8 b_4 c_6 - a_9 b_5 c_3 - a_6 b_5 c_7 - a_9 b_2 c_7 - a_{10} b_6 c_2 - a_{12} b_3 c_2 - a_7 b_6 c_5 - \\
& - a_{10} b_3 c_5 - a_4 b_4 c_8 - a_7 b_3 c_8 - a_1 b_6 c_9 - a_1 b_6 c_9 - a_4 b_3 c_9 - a_7 b_0 c_9;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_6 = & a_9 b_8 c_2 + a_6 b_8 c_5 + a_9 b_7 c_5 + a_3 b_8 c_8 + a_6 b_7 c_8 + a_9 b_4 c_8 + a_0 b_8 c_9 + \\
& + a_3 b_7 c_9 + a_6 b_4 c_9 + a_9 b_1 c_3 + a_{12} b_5 c_3 + a_{10} b_2 c_6 + a_{10} b_5 c_6 + a_{12} b_2 c_6 + \\
& + a_8 b_6 c_7 - a_5 b_8 c_6 - a_9 b_5 c_7 - a_{12} b_6 c_2 - a_{10} b_6 c_5 - a_{12} b_3 c_5 - a_7 b_0 c_8 - \\
& - a_{10} b_0 c_8 - a_{10} b_3 c_8 - a_{12} b_0 c_8 - a_4 b_4 c_9 - a_7 b_3 c_9 - a_7 b_6 c_9 - a_{10} b_0 c_9;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_7 = & a_0 b_8 c_8 + a_6 b_8 c_8 + a_9 b_7 c_8 + a_3 b_8 c_9 + a_6 b_7 c_9 + a_9 b_4 c_9 + a_{12} b_5 c_6 - \\
& - a_8 b_7 c_6 - a_8 b_8 c_6 - a_{12} b_6 c_5 - a_{10} b_6 c_8 - a_{12} b_3 c_8 - a_7 b_6 c_9 - a_{10} b_3 c_9 - a_{12} b_0 c_9;
\end{aligned}$$

$$n_8 = a_9 b_8 c_8 + a_6 b_8 c_9 + a_9 b_7 c_9 - a_{10} b_6 c_9 - a_{12} b_3 c_9 - a_{12} b_6 c_8;$$

$$n_9 = a_9 b_8 c_9 - a_{12} b_6 c_9.$$

За теоремою Гурвіца [49, 50] для забезпечення стійкості руху збирального агрегату необхідне виконання умов:

$$\begin{aligned}
n_1 > 0; n_2 > 0; n_3 > 0; n_4 > 0; n_5 > 0; n_6 > 0; \\
n_7 > 0; n_8 > 0; n_9 > 0;
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

а також:

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} n_1 & n_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & n_2 & n_1 & n_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_5 & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ n_7 & n_6 & n_5 & n_4 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & n_8 & n_7 & n_6 & n_5 & n_4 & n_3 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_8 & n_7 & n_6 & n_5 & n_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_8 & n_7 & n_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_8 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.4.9}$$

Так як коефіцієнти (2.4.7) характеристичного рівняння (2.4.6) мають досить складний вигляд, то аналіз стійкості збирального агрегату ускладнений.

В цьому випадку можливі два варіанти:

1. Визначити чисельні значення коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь, використовуючи вирази (2.2.44, 2.2.56 і 2.2.68) і підставивши їх значення в залежність (2.4.7), після чого розкрити визначник (2.4.9) і проаналізувати отримані результати.

2. Розглянути окремо стійкість руху трактора, збиральної машини й причепа.

## 2.4.2. Обґрунтування швидкості руху трактора, що забезпечує стійкість його руху при агрегуванні збирального агрегату

Для аналізу стійкості руху трактора необхідно скласти характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь (2.3.30), для чого приймемо  $\varphi_1 = \alpha e^{\lambda t}$  й  $x_{S_1} = \beta e^{\lambda t}$ , підставимо їх значення в рівняння (2.3.30).

$$\begin{aligned} & a_0 \alpha \cdot \lambda^3 e^{\lambda t} + a_1 \alpha \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + a_2 \alpha \cdot \lambda e^{\lambda t} + a_3 \alpha e^{\lambda t} + a_4 \lambda^3 \beta e^{\lambda t} + a_5 \lambda^2 \beta e^{\lambda t} + a_6 \lambda \beta e^{\lambda t} = \\ & = \alpha e^{\lambda t} (a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \cdot \lambda + a_3) + \beta e^{\lambda t} (a_4 \lambda^3 + a_5 \lambda^2 + a_6 \lambda) = 0; \\ & b_0 \alpha \cdot \lambda^3 e^{\lambda t} + b_1 \alpha \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + b_2 \alpha \cdot \lambda e^{\lambda t} + b_3 \alpha e^{\lambda t} + b_4 \lambda^3 \beta e^{\lambda t} + b_5 \lambda^2 \beta e^{\lambda t} + \\ & + b_6 \lambda \beta e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} (b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \cdot \lambda + b_3) + \beta e^{\lambda t} (b_4 \lambda^3 + b_5 \lambda^2 + b_6 \lambda) = 0; \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} m_{11} &= a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \cdot \lambda + a_3; \\ m_{12} &= a_4 \lambda^3 + a_5 \lambda^2 + a_6 \lambda; \\ m_{21} &= b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \cdot \lambda + b_3; \\ m_{22} &= b_4 \lambda^3 + b_5 \lambda^2 + b_6 \lambda. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Характеристичне рівняння має вигляд визначника другого

порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.12)$$

Розкриємо визначник (2.4.12):

$$m_{11} \cdot m_{22} - m_{21} \cdot m_{12} = 0. \quad (2.4.13)$$

Підставимо значення  $m_{ij}$  у вираз (2.4.13):

$$\begin{aligned} & a_0 b_4 \lambda^6 + a_1 b_4 \lambda^5 + a_2 b_4 \lambda^4 + a_3 b_4 \lambda^3 + a_0 b_5 \lambda^5 + a_1 b_5 \lambda^4 + a_2 b_5 \lambda^3 + \\ & + a_3 b_5 \lambda^2 + a_0 b_6 \lambda^4 + a_1 b_6 \lambda^3 + a_2 b_6 \lambda^2 + a_3 b_6 \lambda - a_4 b_0 \lambda^6 - a_4 b_1 \lambda^5 - \\ & - a_4 b_2 \lambda^4 - a_4 b_3 \lambda^3 - a_5 b_0 \lambda^5 - a_5 b_1 \lambda^4 - a_5 b_2 \lambda^3 - a_6 b_0 \lambda^4 - a_6 b_1 \lambda^3 - \\ & - a_6 b_2 \lambda^2 - a_6 b_3 \lambda = \lambda^6 (a_0 b_4 - a_4 b_0) + \lambda^5 (a_1 b_4 + a_0 b_5 - a_4 b_1 - a_5 b_0) + \\ & + \lambda^4 (a_2 b_4 + a_1 b_5 + a_0 b_6 - a_4 b_2 - a_5 b_1 - a_6 b_0) + \\ & + \lambda^3 (a_3 b_4 + a_2 b_5 + a_1 b_6 - a_4 b_3 - a_5 b_2 - a_6 b_1) + \\ & + \lambda^2 (a_3 b_5 + a_2 b_6 - a_5 b_3 - a_6 b_2) + \lambda (a_3 b_6 - a_6 b_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Характеристичне рівняння має вигляд [44]:

$$\begin{aligned} & \lambda^6 n_0 + \lambda^5 n_1 + \lambda^4 n_2 + \lambda^3 n_3 + \lambda^2 n_4 + \lambda n_5 = \\ & = \lambda (\lambda^5 n_0 + \lambda^4 n_1 + \lambda^3 n_2 + \lambda^2 n_3 + \lambda n_4 + n_5) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

де

$$\begin{aligned} n_0 &= (a_0 b_4 - a_4 b_0); \\ n_1 &= (a_1 b_4 + a_0 b_5 - a_4 b_1 - a_5 b_0); \\ n_2 &= (a_2 b_4 + a_1 b_5 + a_0 b_6 - a_4 b_2 - a_5 b_1 - a_6 b_0); \\ n_3 &= (a_3 b_4 + a_2 b_5 + a_1 b_6 - a_4 b_3 - a_5 b_2 - a_6 b_1); \\ n_4 &= (a_3 b_5 + a_2 b_6 - a_5 b_3 - a_6 b_2); \\ n_5 &= (a_3 b_6 - a_6 b_3). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Коефіцієнт  $n_0 > 0$ , при будь-яких швидкостях руху трактора.

Для стійкого руху трактора необхідно дотримання вимог:

$$n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0, n_4 > 0, n_5 > 0.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} n_1 & n_0 & 0 & 0 \\ n_3 & n_2 & n_1 & n_0 \\ n_5 & n_4 & n_3 & n_2 \\ 0 & 0 & n_5 & n_4 \end{vmatrix} > 0 \quad (2.4.17)$$

Для подальшого аналізу стійкості руху трактора введемо коефіцієнти [44]:

$$\begin{aligned} A_0 &= I_{S_1} D; & B_0 &= I_{S_1} C; \\ A_1 &= I_{S_1} Dk_A; & B_1 &= I_{S_1} Dk_A; \\ A_2 &= (AD - CB)h_1; & B_2 &= -h_2 \cdot (BC - AD); \\ A_3 &= (CB - AD); & B_3 &= -k_A (BC - AD); \\ A_4 &= -m_{mp} \cdot B; & B_4 &= -m_{mp} \cdot A; \\ A_5 &= -m_{mp} \cdot B \cdot k_A; & B_5 &= -m_{mp} \cdot A \cdot k_A; \\ A_6 &= CB - AD; & B_6 &= AD - BC; \\ A_7 &= E(B - Dh_2)k_A; & B_7 &= E(A - C \cdot h_2) \cdot k_A. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Тоді вираз (2.3.31) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0; & b_0 &= B_1; \\ a_1 &= A_1 V_0; & b_1 &= B_1 V_0; \\ a_2 &= A_2; & b_2 &= B_2; \\ a_3 &= A_3 \cdot V_0; & b_3 &= V_0 \cdot B_3; \\ a_4 &= A_4; & b_4 &= B_4; \\ a_5 &= A_5 \cdot V_0; & b_5 &= B_5 \cdot V_0; \\ a_6 &= A_6; & b_6 &= B_6; \\ a_7 &= A_7 V_0; & b_7 &= B_7 V_0. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Підставимо у вираз  $n_i$  значення коефіцієнтів  $a_i$  і  $b_i$

$$\begin{aligned} N_1 &= V_0 \cdot A_1 \cdot B_4 + V_0 \cdot A_0 \cdot B_5 - V_0 \cdot A_4 \cdot B_1 - V_0 \cdot A_5 \cdot B_0 > 0; \\ N_2 &= A_2 B_4 + V_0^2 A_1 B_5 + A_0 B_6 - A_4 B_2 - V_0^2 A_5 B_1 - A_6 B_0 > 0; \\ N_3 &= V_0 \cdot A_3 \cdot B_4 + V_0 \cdot A_2 \cdot B_5 + V_0 \cdot A_1 \cdot B_6 - V_0 \cdot A_4 \cdot B_3 - \\ &- V_0 \cdot A_5 \cdot B_2 - V_0 \cdot A_6 \cdot B_1 > 0; \\ N_4 &= V_0^2 \cdot A_3 \cdot B_5 + A_2 B_6 - A_5 B_3 - A_6 B_2 > 0; \\ N_5 &= V_0 \cdot A_3 \cdot B_6 - V_0 \cdot A_6 \cdot B_3 > 0. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$



Знайдемо межі області стійкості руху трактора, для чого виділимо в коефіцієнтах  $A_i$  і  $B_i$  складові, які включають  $R_{C1}$ . Тоді коефіцієнти  $A_i$  і  $B_i$  можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= M_i R_{C1} + L_i \\ B_i &= T_i R_{C1} + S_i \end{aligned} \right\} \quad (2.4.21)$$

Виходячи з виразу (2.4.21) одержимо:

$$\begin{aligned} A_0 &= M_0 R_{C1} + L_0; & B_0 &= T_0; \\ A_1 &= M_1 R_{C1} + L_1; & B_1 &= T_1; \\ A_2 &= M_2 R_{C1} + L_2; & B_2 &= T_2 + S_2; \\ A_3 &= M_3 R_{C1} + L_3; & B_3 &= T_3 + S_3; \\ A_4 &= M_4 R_{C1} + L_4; & B_4 &= T_4; \\ A_5 &= M_5 R_{C1} + L_5; & B_5 &= T_5; \\ A_6 &= M_6 R_{C1} + L_6; & B_6 &= T_6 + S_6; \\ A_7 &= M_7 R_{C1}; & B_7 &= T_7 R_{C1}. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

З огляду на той факт, що сила  $R_{C1}$  не перебуває в явному виді у виразі (2.4.20), виразимо її зі співвідношень (2.3.11):

$$\begin{aligned} B &= k_B \cdot h_2 \cdot R_{C1} + H_1; \\ D &= k_B \cdot R_{C1} + H_2, \end{aligned}$$

$$\text{де } H_1 = C_B h_2 + f_B k_B; \quad H_2 = C_B + S_A k_B.$$

Коефіцієнти  $M_i$ ;  $T_i$ ;  $L_i$  й  $S_i$  мають вигляд:

$$\begin{aligned}
M_0 &= -I_{S_1} k_B; & L_0 &= I_{S_1} H_1; \\
M_1 &= I_{S_1} k_B k_A; & L_1 &= I_{S_1} k_A H_2; \\
M_2 &= A k_B h_1 - C k_B h_2; & L_2 &= H_1 C; \\
M_3 &= C k_B h_2 - A k_B; & L_3 &= -H_1 C - A H_2; \\
M_4 &= -m_{mp} k_B h_2; & L_4 &= H_1 m_{mp}; \\
M_5 &= -m_{mp} k_B k_A h_2; & L_5 &= H_1 m_{mp}; \\
M_6 &= C k_B h_2 - A k_B; & L_6 &= -H_1 C - A H_2; \\
M_7 &= -H_1 k_A \chi - H_2 k_A \chi. & & \\
T_0 &= I_{S_1} C; & S_0 &= 0; \\
T_1 &= -I_{S_1} C k_A; & S_1 &= 0; \\
T_2 &= A k_B h_2 - h_2 k_B C; & S_2 &= H_1 C h_2 + A H_2 h_2; \\
T_3 &= A h_2 k_B - h_2 C k_B; & S_3 &= C h_2 H_1 + A H_2 h_2; \\
T_4 &= -m_{mp} A; & S_4 &= 0; \\
T_5 &= -m_{mp} k_A A; & S_5 &= 0; \\
T_6 &= A k_B - C k_B h_2; & S_6 &= H_2 - C H_1; \\
T_7 &= \chi k_A (A - C h_2); & S_7 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Проаналізуємо систему нерівностей (2.4.21). Перша, третя й п'ята нерівності можна поділити почленно на  $V_0$ , тому що  $V_0 > 0$ ; знак нерівностей не зміниться [51]:

$$\begin{aligned}
A_1 \cdot B_4 + A_0 \cdot B_5 - A_4 \cdot B_1 - A_5 \cdot B_0 &> 0; \\
A_3 B_4 + A_2 B_5 + A_1 B_6 - A_4 B_3 - A_5 B_2 - A_6 B_1 &> 0; \\
A_3 \cdot B_6 - A_6 \cdot B_3 &> 0.
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

Складемо почленно нерівності (2.4.24):

$$\begin{aligned}
A_1 \cdot B_4 + A_0 \cdot B_5 - A_4 \cdot B_1 - A_5 \cdot B_0 + A_3 B_4 + A_2 B_5 + A_1 B_6 - \\
- A_4 B_3 - A_5 B_2 - A_6 B_1 + A_3 \cdot B_6 - A_6 \cdot B_3 &> 0.
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Підставимо в нерівність (2.4.25) вираз (2.4.23)

$$\begin{aligned}
& (M_1R_{C_1} + L_1)T_4 + (M_0R_{C_1} + L_0)T_5 - (M_4R_{C_1} + L_4)T_1 + \\
& + (M_3R_{C_1} + L_3)T_4 + (M_2R_{C_1} + L_2)T_5 + (M_1R_{C_1} + L_1)(T_6 + S_6) - \\
& - (M_4R_{C_1} + L_4)(T_3 + S_3) - (M_5R_{C_1} + L_5)(T_2 + S_2) - \\
& - (M_6R_{C_1} + L_6)T_1 + (M_3R_{C_1} + L_3)(T_6 + S_6) - (M_6R_{C_1} + L_6)T_1 > 0;
\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

$$\begin{aligned}
& M_1R_{C_1}T_4 + L_1T_4 + M_0R_{C_1}T_5 + L_0T_5 - M_4R_{C_1}T_1 - L_4T_1 + \\
& + M_3R_{C_1}T_4 + L_3T_4 + M_2R_{C_1}T_5 + L_2T_5 + M_1R_{C_1}T_6 + L_1T_6 + \\
& + M_1R_{C_1}S_6 + L_1S_6 - M_4R_{C_1}T_3 - L_4T_3 - M_4R_{C_1}S_3 - L_4S_3 - \\
& - M_5R_{C_1}T_2 - L_5T_2 - M_5R_{C_1}S_2 - L_5S_2 - M_6R_{C_1}T_1 - L_6T_1 + \\
& + M_3R_{C_1}T_6 + L_3T_6 + M_3R_{C_1}S_6 + L_3S_6 - M_6R_{C_1}T_1 - L_6T_1 > 0;
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

Виразимо реакцію  $R_{C_1}$  з нерівності (2.4.27):

$$\begin{aligned}
& L_1T_4 + L_0T_5 - L_4T_1 + L_3T_4 + L_2T_5 + L_1T_6 + L_1S_6 - L_4T_3 - \\
& - L_4S_3 - L_5T_2 - L_5S_2 - L_6T_1 + L_3T_6 + L_3S_6 - \\
& - L_6T_1 \triangleright -M_1R_{C_1}T_4 - M_0R_{C_1}T_5 + M_4R_{C_1}T_1 - M_3R_{C_1}T_4 - \\
& - M_2R_{C_1}T_5 - M_1R_{C_1}T_6 - M_1R_{C_1}S_6 + M_4R_{C_1}T_3 + M_4R_{C_1}S_3 + \\
& + M_5R_{C_1}T_2 + M_5R_{C_1}S_2 + M_6R_{C_1}T_1 - M_3R_{C_1}T_6 - M_3R_{C_1}S_6 + M_6R_{C_1}T_1.
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
& L_1T_4 + L_0T_5 - L_4T_1 + L_3T_4 + L_2T_5 + L_1T_6 + L_1S_6 - L_4T_3 - \\
& - L_4S_3 - L_5T_2 - L_5S_2 - L_6T_1 + L_3T_6 + L_3S_6 - L_6T_1 = \Gamma; \\
& -M_1R_{C_1}T_4 - M_0R_{C_1}T_5 + M_4R_{C_1}T_1 - M_3R_{C_1}T_4 - \\
& - M_2R_{C_1}T_5 - M_1R_{C_1}T_6 - M_1R_{C_1}S_6 + M_4R_{C_1}T_3 + M_4R_{C_1}S_3 + \\
& + M_5R_{C_1}T_2 + M_5R_{C_1}S_2 + M_6R_{C_1}T_1 - M_3R_{C_1}T_6 - M_3R_{C_1}S_6 + M_6R_{C_1}T_1 = \mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Тоді

$$R_{C_1} < \frac{\Gamma}{\mathcal{L}}. \tag{2.4.30}$$

Друга та четверта нерівності системи (2.4.21) накладають обмеження на швидкість руху трактора. Виразимо з цих нерівностей критичне значення швидкості руху, при якій зберігається стійкий рух трактора [44].

$$A_2B_4 + V_0^2 A_1B_5 + A_0B_6 - A_4B_2 - V_0^2 A_5B_1 - A_6B_0 + V_0^2 A_3B_5 + A_2B_6 - A_5B_3 - A_6B_2 > 0; \quad (2.4.31)$$

$$A_2B_4 + A_0B_6 - A_4B_2 - A_6B_0 + A_2 \cdot B_6 - A_5 \cdot B_3 - A_6 \cdot B_2 > V_0^2 \cdot A_5 \cdot B_1 - V_0^2 A_1B_5 - V_0^2 A_3B_5.$$

$$V_0 < \sqrt{\frac{A_2B_4 + A_0B_6 - A_4B_2 - A_6B_0 + A_2B_6 - A_5B_3 - A_6B_2}{A_5B_1 - A_1B_5 - A_3B_5}}. \quad (2.4.32)$$

Основним керуючим параметром, що впливає на стійкість руху трактора, при агрегуванні збирального агрегату є його швидкість. В результаті аналітичних досліджень отримано вираз для визначення критичної швидкості трактора [44].

### 2.4.3. Аналіз стійкості руху збиральної машини

Складемо характеристичне рівняння для диференціального рівняння. Для складання характеристичного рівняння приймемо  $\varphi_2 = \gamma \cdot e^{\lambda t}$  та підставимо його в рівняння (2.3.51).

$$\begin{aligned} C_0 \cdot \gamma \cdot \lambda^3 \cdot e^{\lambda t} + C_1 \cdot \gamma \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + C_2 \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + C_3 \cdot \gamma \cdot e^{\lambda t} = \\ = \gamma \cdot e^{\lambda t} (C_0 \cdot \lambda^3 + C_1 \cdot \lambda^2 + C_2 \cdot \lambda + C_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Так як  $\gamma \cdot e^{\lambda t} \neq 0$ , то розділимо рівняння (2.4.33) на  $\gamma \cdot e^{\lambda t}$ , в результаті одержимо:

$$C_0 \cdot \lambda^3 + C_1 \cdot \lambda^2 + C_2 \cdot \lambda + C_3 = 0. \quad (2.4.34)$$

Рівняння (2.4.34) є характеристичним рівнянням диференціального рівняння (2.3.51). Значення коефіцієнтів характеристичного рівняння  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  збігаються зі значеннями коефіцієнтів диференціального рівняння (2.3.51).

Відповідно до теореми Гурвіца [49, 50] стійкість машини забезпечується, якщо:

$$C_0 > 0; C_1 > 0; C_2 > 0; C_3 > 0, \text{ а також } C_1C_2 - C_3C_0 > 0. \quad (2.4.35)$$

Стосовно до розглянутого випадку для стійкого руху збиральної

машини повинні виконуватися наступні нерівності:

$$I_{C_1} > 0;$$

$$\frac{R_D \cdot C_R^2}{V_0} + V_0 \cdot k_L \cdot I_{C_1} > 0; \quad (2.4.36)$$

$$R_D \cdot C_R + R_{C_2} \cdot n - \ell \cdot L + R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L > 0;$$

$$-V_0 \cdot L + V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} \cdot n + R_D \cdot C_R \cdot V_0 \cdot k_L > 0.$$

$$R_D^2 \cdot C_R^3 + R_D^2 \cdot C_R^4 \cdot k_L + R_D \cdot C_R^2 \cdot R_C \cdot n - R_D \cdot C_R^2 \cdot \ell \cdot L + V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot R_D \cdot C_R +$$

$$+ V_0^2 \cdot k_L^2 \cdot I_{C_1} \cdot R_D \cdot C_R^2 + V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot R_{C_2} \cdot n - V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot \ell \cdot L -$$

$$- V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot R_D \cdot C_R - V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot R_{C_2} \cdot n - V_0 \cdot L \cdot I_{C_1} > 0$$

Проаналізуємо нерівності (2.4.36). Перші дві нерівності виконуються при будь-яких умовах, тому що величини в них позитивні. Третя нерівність містить позитивні та негативні доданки. Якщо підставити значення  $L$  (вираз (2.3.43)) одержимо:

$$R_D \cdot C_R + R_{C_2} \cdot n + R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L + C_L \cdot \ell^2 + C_L \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} +$$

$$+ 2 \cdot k_L \cdot f_L \cdot \ell + S_L \cdot \ell^2 \cdot k_L + S_L \cdot \ell^2 \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} > 0. \quad (2.4.37)$$

Як видно з виразу (2.4.37) всі величини, що входять у нього позитивні, отже, воно виконується при будь-яких умовах і не накладає ніяких обмежень на механічні параметри та режими руху збиральної машини.

Аналогічним чином можна проаналізувати четверту нерівність системи (2.4.36). Так як  $V_0 \neq 0$ , то розділимо почленно ліву і праву частини нерівності на  $V_0$ , в результаті одержимо:

$$R_D \cdot C_R \cdot k_L - L + R_{C_2} \cdot n \cdot k_L > 0. \quad (2.4.38)$$

Якщо в нерівність (2.4.38) підставити значення  $L$ , то в результаті виходить, що всі нерівності (2.4.36) мають позитивні знаки, тобто

$$\begin{aligned}
& R_D \cdot C_R \cdot k_L + C_L \cdot \ell + C_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} + 2 \cdot k_L \cdot f_L + S_L \cdot \ell \cdot k_L + \\
& + S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} + R_{C_2} \cdot n \cdot k_L > 0.
\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Таким чином, як видно із проведеного аналізу перші чотири нерівності системи (2.4.38) виконуються при будь-яких умовах і не накладають ніяких обмежень, тобто  $C_0 > 0$ ;  $C_1 > 0$ ;  $C_2 > 0$  й  $C_3 > 0$ .

Найбільш складний вигляд має остання нерівність системи (2.4.39). Вона містить доданки з позитивними та негативними знаками й, отже, виконується за певних умов. Як видно з нерівності, швидкість руху машини буде накладати обмеження на стійкість руху машини, тобто, дана нерівність буде виконуватися при певних значеннях швидкості руху збиральної машини.

$$V_0 < \sqrt{\frac{R_D C_R^2 (R_D C_R + R_D C_R^2 k_L - \ell L)}{I_{C_1} k_L (\ell L + R_D C_R + R_{C_2} n - R_D C_R - k_L R_D C_R^2 - R_{C_1} n)}}. \tag{2.4.40}$$

Якщо ввести позначення:

$$\begin{aligned}
\Psi &= R_D C_R + R_D C_R^2 k_L - \ell L; \\
\Omega &= \ell L + R_D C_R + R_{C_2} n - R_D C_R - k_L R_D C_R^2 - R_{C_1} n.
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

Тоді, з урахуванням позначень (2.4.41) критична швидкість руху збиральної машини визначиться з нерівності [46]:

$$V_0 < C_R \cdot \sqrt{\frac{R_D \cdot \Psi}{I_{C_1} \cdot k_L \cdot \Omega}}. \tag{2.4.42}$$

Таким чином, в результаті аналітичних досліджень отримано вираз для визначення критичної швидкості збиральної машини.

#### 2.4.4. Стійкість руху причепа-візка

Складемо характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь (2.3.86), для цього підставимо в рівняння (2.3.86)  $\varphi_3 = \delta e^{\lambda t}$  і

$$\varphi_4 = \varepsilon e^{\lambda t} :$$

$$\begin{aligned} & d_0 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda^3 + d_1 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 + d_2 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda + d_3 \cdot \delta e^{\lambda t} + d_4 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} \cdot \lambda^3 + d_5 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} \cdot \lambda^3 = \\ & = \delta e^{\lambda t} (d_0 \cdot \lambda^3 + d_1 \cdot \lambda^2 + d_2 \cdot \lambda + d_3) + \varepsilon e^{\lambda t} \cdot (d_4 \cdot \lambda^3 + d_5 \cdot \lambda^3) = 0; \\ & \ell_0 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda^3 + \ell_1 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 + \ell_2 \cdot \delta e^{\lambda t} \cdot \lambda + \ell_3 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} \cdot \lambda^3 + \ell_4 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 + \\ & + \ell_5 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} \cdot \lambda + \ell_6 \cdot \varepsilon e^{\lambda t} = \delta e^{\lambda t} (\ell_0 \cdot \lambda^3 + \ell_1 \cdot \lambda^2 + \ell_2 \cdot \lambda) + \\ & + \varepsilon e^{\lambda t} (\ell_3 \cdot \lambda^3 + \ell_4 \cdot \lambda^2 + \ell_5 \cdot \lambda + \ell_6) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Позначимо через:

$$\begin{aligned} r_{11} &= d_0 \cdot \lambda^3 + d_1 \cdot \lambda^2 + d_2 \cdot \lambda + d_3; \\ r_{12} &= d_4 \cdot \lambda^3 + d_5 \cdot \lambda^3; \\ r_{21} &= \ell_0 \cdot \lambda^3 + \ell_1 \cdot \lambda^2 + \ell_2 \cdot \lambda; \\ r_{22} &= \ell_3 \cdot \lambda^3 + \ell_4 \cdot \lambda^2 + \ell_5 \cdot \lambda + \ell_6. \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Характеристичні рівняння системи (2.3.86) можна представити у вигляді визначника другого порядку:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4.45)$$

Розкриємо визначник (2.4.45).

$$r_{11} \cdot r_{22} - r_{21} \cdot r_{12} = 0. \quad (2.4.46)$$

Підставимо значення  $r_{ij}$  в формулу (2.4.45):

$$\begin{aligned} & (d_0 \cdot \lambda^3 + d_1 \cdot \lambda^2 + d_2 \cdot \lambda + d_3) \cdot (\ell_3 \cdot \lambda^3 + \ell_4 \cdot \lambda^2 + \ell_5 \cdot \lambda + \ell_6) - \\ & - (d_4 \cdot \lambda^3 + d_5 \cdot \lambda^3) \cdot (\ell_0 \cdot \lambda^3 + \ell_1 \cdot \lambda^2 + \ell_2 \cdot \lambda) = \lambda^6 (d_0 \ell_3 - d_4 \ell_0) + \\ & + \lambda^5 (d_0 \ell_4 + d_1 \ell_3 - d_4 \ell_1 - d_5 \ell_0) + \lambda^4 (d_0 \ell_5 + d_1 \ell_4 + d_2 \ell_3 - d_2 \ell_2 - d_5 \ell_1) + \\ & + \lambda^3 (d_0 \ell_6 + d_1 \ell_5 + d_2 \ell_4 + d_3 \ell_3 - d_5 \ell_2) + \lambda^2 (d_1 \ell_6 + d_2 \ell_5 + d_3 \ell_4) + \\ & + \lambda (d_2 \ell_6 + d_3 \ell_5) + d_3 \ell_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

Характеристичне рівняння системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\lambda^6 \cdot p_0 + \lambda^5 \cdot p_1 + \lambda^4 \cdot p_2 + \lambda^3 \cdot p_3 + \lambda^2 \cdot p_4 + \lambda \cdot p_5 + p_6 = 0. \quad (2.4.48)$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння (2.4.48) мають

значення:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= d_0 \ell_3 - d_4 \ell_0; \\ p_1 &= d_0 \ell_4 + d_1 \ell_3 - d_4 \ell_1 - d_5 \ell_0; \\ p_2 &= d_0 \ell_5 + d_1 \ell_4 + d_2 \ell_3 - d_2 \ell_2 - d_5 \ell_1; \\ p_3 &= d_0 \ell_6 + d_1 \ell_5 + d_2 \ell_4 + d_3 \ell_3 - d_5 \ell_2; \\ p_4 &= d_1 \ell_6 + d_2 \ell_5 + d_3 \ell_4; \\ p_5 &= d_2 \ell_6 + d_3 \ell_5; \\ p_6 &= d_3 \ell_6. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.49)$$

Таким чином, характеристичне рівняння не має нульових значень. Рух причепа-візка є асимптотично стійким, якщо виконуються умови стійкості:

$$\begin{aligned} p_0 > 0; \quad p_1 > 0; \quad p_2 > 0; \quad p_3 > 0; \quad p_4 > 0; \\ p_5 > 0; \quad p_6 > 0. \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_5 & p_4 \end{vmatrix} > 0$$

Проаналізуємо нерівності (2.4.50), для чого введемо коефіцієнти:

$$D_0 = I_{C_2} \cdot M + m_{np} \cdot d_1^2 \cdot M - d_1 \cdot r_2 \cdot K \cdot m_{np};$$

$$D_1 = I_{C_2} \cdot M \cdot k_N + m_{np} \cdot d_1^2 \cdot M \cdot k_N + r_2 \cdot d_1 \cdot m_{np} \cdot M \cdot k_N - d_1 \cdot r_2 \cdot K \cdot k_N \cdot m_{np};$$



$$\begin{aligned}
D_2 &= N \cdot d_1; \\
D_3 &= N; \\
D_4 &= m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1 \cdot K - I_N \cdot K - m_{np} \cdot r_2^2 \cdot K; \\
D_5 &= k_N \cdot K \cdot I_N + m_{np} \cdot r_2^2 \cdot K \cdot k_N; \\
L_0 &= m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1; \\
L_1 &= k_N \cdot m_{np} \cdot r_2 \cdot d_1; \\
L_2 &= M \cdot d_1; \\
L_3 &= I_N + m_{np} \cdot r_2^2; \\
L_4 &= k_N \cdot I_N + k_N \cdot m_{np} \cdot r_2^2; \\
L_5 &= d_2 \cdot M; \\
L_6 &= M.
\end{aligned} \tag{2.4.51}$$

Тоді коефіцієнти (2.3.87) системи диференціальних рівнянь (2.3.86) руху причепа-візка приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
d_0 &= D_0; & \ell_0 &= L_0; \\
d_1 &= D_1 \cdot V_{O_1}; & \ell_1 &= V_0 \cdot L_1; \\
d_2 &= -D_2; & \ell_2 &= -L_2; \\
d_3 &= -V_{O_1} \cdot D_3; & \ell_3 &= L_3; \\
d_4 &= D_4; & \ell_4 &= V_0 \cdot L_4; \\
d_5 &= -V_{O_1} \cdot D_5; & \ell_5 &= -L_5; \\
& & \ell_6 &= -V_{O_1} \cdot L_6.
\end{aligned} \tag{2.4.52}$$

Підставимо у вираз (2.4.52) значення коефіцієнтів  $d_i$  і  $\ell_i$ .

$$\begin{aligned}
P_0 &= D_0 L_3 - D_4 L_0 > 0; \\
P_1 &= D_0 \cdot V_0 \cdot L_4 + D_1 \cdot V_{O_1} \cdot L_3 - D_4 \cdot V_{O_1} \cdot L_1 + V_0 \cdot D_5 L_0 > 0; \\
P_2 &= -D_0 L_5 + D_1 \cdot V_{O_1} \cdot V_0 \cdot L_4 - D_2 L_3 - D_2 L_2 + D_5 \cdot V_0 \cdot V_0 \cdot L_1 > 0; \\
P_3 &= -D_0 \cdot V_0 \cdot L_6 - D_1 \cdot V_{O_1} \cdot L_5 - D_2 \cdot L_4 \cdot V_0 - D_3 \cdot V_{O_1} \cdot L_3 - D_5 \cdot V_0 \cdot L_2 > 0; \\
P_4 &= -D_1 \cdot V_{O_1} \cdot V_{O_1} \cdot L_6 + D_2 L_5 - D_3 \cdot V_0 \cdot V_0 \cdot L_4 > 0; \\
P_5 &= D_2 \cdot V_0 \cdot L_6 + D_3 \cdot V_0 \cdot L_5 > 0; \\
P_6 &= D_3 \cdot V_0 \cdot V_0 \cdot L_6 > 0.
\end{aligned} \tag{2.4.53}$$

Проаналізуємо отримані нерівності. З огляду на те, що  $v_{O_1} \neq 0$  можна другу, четверту, шосту й сьому нерівності розділити на  $v_{O_1}$ , тоді тільки третя й п'ята нерівності будуть містити швидкість.

Виразимо критичне значення швидкості руху, при якій причіп-візок буде зберігати стійкий рух, для чого складемо третє й п'яте нерівності.

$$\begin{aligned}
 -D_0 \cdot L_5 + D_1 \cdot V_{O_1}^2 \cdot L_4 - D_2 \cdot L_3 - D_2 \cdot L_2 + V_0^2 \cdot D_5 \cdot L_1 - D_1 \cdot V_{O_1}^2 \cdot L_6 + D_2 \cdot L_5 + V_{O_1}^2 \cdot L_4 \cdot D_3 > 0; \\
 D_2 \cdot L_5 - D_0 \cdot L_5 - D_2 \cdot L_3 - D_2 \cdot L_2 > D_1 \cdot V_{O_1}^2 \cdot L_6 - D_1 \cdot V_{O_1}^2 \cdot L_4 - V_0^2 \cdot D_5 \cdot L_1 - V_{O_1}^2 \cdot L_4 \cdot D_3;
 \end{aligned}$$

$$V_{O_1} < \sqrt{\frac{D_2 \cdot L_5 - D_0 \cdot L_5 - D_2 \cdot L_3 - D_2 \cdot L_2}{D_1 \cdot L_6 - D_1 \cdot L_4 - D_5 \cdot L_1 - L_4 \cdot D_3}} \quad (2.4.54)$$

### 2.4.5. Швидкість збирального агрегату за умови збереження стійкості його руху

В результаті аналітичних досліджень були отримані вирази, що визначають критичну швидкість трактора (2.4.32), при агрегуванні збирального агрегату, збиральної машини (2.4.43) і причепа-візка для збору обчесаного вороху (2.4.54), при яких забезпечується стійкий рух кожного з них окремо. Визначимо швидкість збирального агрегату, при якій в цілому, зберігається його стійкий рух.

Отже, критична швидкість збирального агрегату визначається із системи нерівностей:

$$\left. \begin{aligned}
 V_0 < \sqrt{\frac{A_2 B_4 + A_0 B_6 - A_4 B_2 - A_6 B_0 + A_2 B_6 - A_5 B_3 - A_6 B_2}{A_5 B_1 - A_1 B_5 - A_3 B_5}}; \\
 V_0 < C_R \cdot \sqrt{\frac{R_D \cdot \Psi}{I_{C_1} \cdot k_L \cdot \Omega}}; \\
 V_{O_1} < \sqrt{\frac{D_2 \cdot L_5 - D_0 \cdot L_5 - D_2 \cdot L_3 - D_2 \cdot L_2}{D_1 \cdot L_6 - D_1 \cdot L_4 - D_5 \cdot L_1 - L_4 \cdot D_3}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.55)$$

## 2.4.6. Визначення конструктивних параметрів збиральної машини, що забезпечують стійкість її руху

Для визначення конструктивних параметрів збиральної машини (рис. 2.4.1) використаємо систему нерівностей (2.4.36).

Проаналізуємо нерівності (2.4.36). Перші дві нерівності виконуються при будь-яких умовах, так як величини, що входять у них, позитивні. З четвертої нерівності виражаємо область значень відстані  $n$  між точками з'єднання збиральної машини та причепа-візка.

$$n > \frac{L - R_D \cdot C_R \cdot k_L}{k_L \cdot R_{C_2}}. \quad (2.4.56)$$

Підставляємо значення  $L$  в третю нерівність:

$$\begin{aligned} R_D \cdot C_R + R_{C_2} \cdot n + R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L > -C_L \cdot \ell^2 - C_L \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} - \\ - 2 \cdot k_L \cdot f_L \cdot \ell - S_L \cdot \ell^2 \cdot k_L - S_L \cdot \ell^2 \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}}. \end{aligned} \quad (2.4.57)$$

Вирішимо нерівність (2.4.57) відносно  $p^2$ :

$$\begin{aligned} p^2 < \ell^2 - \left[ \frac{1}{\left( C_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 + R_{C_2} \cdot V_0 \cdot S_L \cdot k_L - C_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - S_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} \right)^2} \right]^* \\ * \left( R_D \cdot C_R \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - C_L \cdot V_0 \cdot \ell \cdot R_{C_2} - 2 \cdot f_L \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - S_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - \right. \\ \left. - R_D \cdot C_R \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - R_D \cdot C_R^2 \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} + \ell \cdot \ell \cdot C_L \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} + \right. \\ \left. + 2 \cdot f_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} + S_L \cdot \ell^2 \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

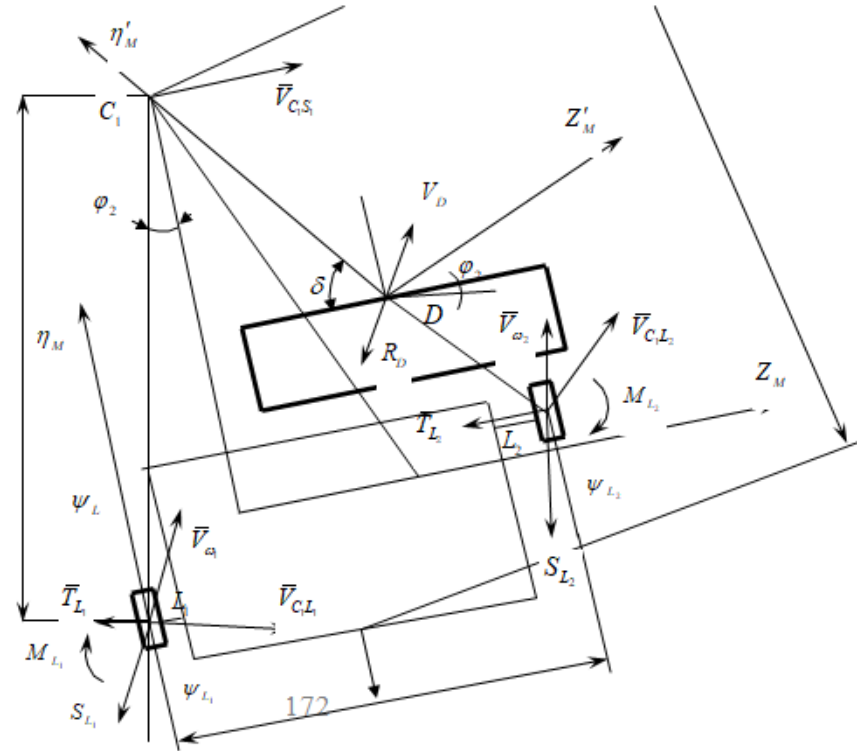


Рис. 2.4.1. Схема сил і моментів сил, прикладених до збиральної машини при заміні в'язів їх реакціями

В п'яту нерівність також входить  $L$ , після її підстановки, нерівність прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
 & R_D^2 \cdot C_R^3 + R_D^2 \cdot C_R^4 \cdot k_L + R_D \cdot C_R^2 \cdot R_C \cdot n - R_D \cdot C_R^2 \cdot \ell \cdot (C_L \cdot \ell + \\
 & + C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} + 2 \cdot k_L \cdot f_L + S_L \cdot \ell \cdot k_L + S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}}) + \\
 & + V_0^2 \cdot k_L^2 \cdot I_{C_1} \cdot R_D \cdot C_R^2 - V_0^2 \cdot k_L \cdot I_{C_1} \cdot \ell \cdot (C_L \cdot \ell + C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} + \\
 & + 2 \cdot k_L \cdot f_L + S_L \cdot \ell \cdot k_L + S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} + V_0^2 \cdot I_{C_1} \cdot (-C_L \cdot \ell - \\
 & - C_L \cdot \ell \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}} - 2 \cdot k_L \cdot f_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{\ell^2}}) > 0.
 \end{aligned} \tag{2.4.59}$$

Так як у нерівності (2.4.59) пошукова величина  $\ell$  знаходиться

під коренем, то перетворимо вираз  $\sqrt{1 - \frac{p^2}{l^2}}$  використовуючи при цьому нерівність (2.4.59):

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{p^2}{l^2}} = & \left( R_D \cdot C_R \cdot k_L \cdot V_0 \cdot R_{C_2} - R_{C_2} \cdot V_0 \cdot C_L \cdot \ell - 2 \cdot k_L \cdot f_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 - \right. \\ & - S_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 - R_D \cdot C_R \cdot k_L \cdot V_0 \cdot R_{C_2} - R_D \cdot C_R^2 \cdot k_L^2 \cdot V_0 \cdot R_{C_2} + \\ & + \ell^2 \cdot C_L \cdot k_L \cdot V_0 \cdot R_{C_2} + 2 \cdot k_L^2 \cdot f_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 \cdot \ell + \\ & + S_L \cdot \ell^2 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} \cdot V_0 / \ell \cdot \left( C_L \cdot V_0 \cdot R_{C_2} + R_{C_2} \cdot V_0 \cdot S_L \cdot k_L - \right. \\ & \left. - C_L \cdot \ell \cdot k_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 - S_L \cdot \ell \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} \cdot V_0 \right) \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

Після підстановки виразу (2.4.60) у нерівність (2.4.59) отримаємо нерівність, яку розв'язуємо відносно  $\ell$ :

$$\ell > \frac{C_R^2 \cdot R_D}{k_L \cdot (k_L \cdot I_{C_1} \cdot V_0^2 + C_R^2 \cdot R_D)} \quad (2.4.61)$$

Тоді можна визначити область значень  $p$ :

$$\begin{aligned} p < \left\{ \ell^2 - \left[ \frac{1}{\left( C_L \cdot R_{C_2} \cdot V_0 + R_{C_2} \cdot V_0 \cdot S_L \cdot k_L - C_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - S_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} \right)^2} \right]^* \right. \\ & * \left( - C_L \cdot V_0 \cdot \ell \cdot R_{C_2} - 2 \cdot f_L \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - S_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} - R_D \cdot C_R^2 \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} + \right. \\ & \left. \left. + \ell^2 \cdot C_L \cdot V_0 \cdot k_L \cdot R_{C_2} + 2 \cdot f_L \cdot \ell \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} + S_L \cdot \ell^2 \cdot V_0 \cdot k_L^2 \cdot R_{C_2} \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4.62)$$

### 2.4.7. Експериментальні дослідження стійкості руху збирального агрегату

Для експериментальної перевірки теоретичних досліджень стійкості руху причіпного триланкового збирального агрегату (рис. 2.4.2), були проведені польові дослідження в 2006 році на полях ТОВ «Фрідом Фарм Терра» Мелітопольського району Запорізької області.

Програма досліджень включала одержання статистичних характеристик амплітуд горизонтальних коливань ланок збирального агрегату в діапазоні швидкостей 1,2...2,8 м/с. В якості оціночних

критеріїв зони стійкості руху агрегату були прийняті мінімальні значення статистичних характеристик амплітуд горизонтальних коливань гака трактора (точки причіпа збиральної машини до трактора), центра мас збиральної машини і центра мас візка-причепи.

Дослідження проводилися у два етапи.

На першому етапі досліджувалася стійкість руху збирального агрегату на холостому ході з не завантаженим візком. Дані експерименти проводилися з метою одержання інформації про процеси зміни горизонтальних коливань ланок збирального агрегату на холостому ході та наступному порівнянні з аналогічними процесами при виконанні технологічного процесу збирання.

На другому етапі дослідження проводилися при роботі агрегату на збиранні сої, при цьому причеп-визок був завантажений баластом, маса якого становила 4000 кг.

Перед проведенням дослідних проходів, виділена ділянка поля поділялась на залікові ділянки, довжиною 50 м кожна. Для розгону та виходу агрегату з ділянки додатково виділялися ділянки довжиною 10 м.

Дослідження проводилися таким чином: за командою агрегат проходив залікову ділянку на певній передачі з фіксованою поступальною швидкістю. Поступальна швидкість агрегату визначалася зі співвідношення:

$$V = \frac{\ell_y}{t}, \quad (2.4.63)$$

де  $\ell_y$  – довжина залікової ділянки, м,  $\ell_y = 50$  м;

$t$  – час проходження ділянки, с.

Реєстрація траєкторії відносного руху ланок агрегату здійснювалася за допомогою жорстко закріплених у відповідних точках маркерів.

Для одержання числових оцінок відхилень ланок агрегату щодо нерухомої вісі проводилися їх заміри із кроком  $\Delta \ell = 1$  м, при цьому обсяг реалізації кожного досліді становив 50 значень.

В результаті обробки первинної інформації, отриманої в результаті експерименту були визначені оцінки статистичних характеристик амплітуд горизонтальних коливань ланок збирального агрегату з рівнем ймовірності  $P = 0,90$ .

Так, у таблиці 2.4.1 наведені статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань гака трактора при переміщенні агрегату на холостому й робочому ходах.

Як видно з наведених у табл. 2.4.1 даних, середні значення амплітуд горизонтальних коливань гака трактора становлять на холостому ході агрегату  $4,176 \cdot 10^{-2} \dots 10,838 \cdot 10^{-2}$  м, а на робочому ході  $4,341 \cdot 10^{-2} \dots 10,388 \cdot 10^{-2}$  м.

Таблиця 2.4.1

Статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань гака трактора, при агрегуванні збирального агрегату

№ п/п	Швидкість руху, м/с	Середнє значення, $10^{-2}$ м	Середнє- квадратичне відхилення, $10^{-2}$ м	Коефіцієнт варіації, %	Статистична помилка	Довірчий інтервал		
						Нижня границя, $10^{-2}$ м	Верхня границя, $10^{-2}$ м	
1	холостий хід	1,2	+4.176	+0.583	+13.9643	+0.08247	+4.0378	+4.3142
2		1,46	+4.234	+0.636	+15.0139	+0.08989	+4.0830	+4.3842
3		1,8	+4.981	+0.650	+13.0444	+0.09189	+4.8270	+5.1350
4		2,0	+5.571	+0.682	+12.2359	+0.09640	+5.4093	+5.7323
5		2,5	+7.521	+0.844	+11.2228	+0.11938	+7.3214	+7.7214
6		2,87	+10.838	+2.272	+20.9608	+0.32127	+10.2997	+11.3763
7	робочий хід	1,2	+4.341	+0.716	+16.4809	+0.10119	+4.1719	+4.5109
8		1,46	+4.600	+0.739	+16.0592	+0.10447	+4.4250	+4.7750
9		1,8	+5.492	+0.825	+15.0232	+0.11668	+5.2965	+5.6875
10		2,0	+6.084	+0.905	+14.8779	+0.12801	+5.8695	+6.2985
11		2,5	+8.438	+1.110	+13.1564	+0.15700	+8.1750	+8.7010
12		2,87	+10.388	+1.329	+12.7889	+0.18788	+10.0732	+10.7028



Порівнюючи середні значення амплітуд коливань гака трактора на холостому та на робочому ходах збирального агрегату слід зазначити, що вони відрізняються незначно. Так, наприклад, при швидкості руху агрегату 1,2 м/с ця різниця становить  $0,165 \cdot 10^{-2}$  м, а при швидкості руху 2,5 м/с –  $0,917 \cdot 10^{-2}$  м. Отже, навантаження не робить істотного впливу на середні значення амплітуд горизонтальних коливань гака трактора, основним фактором, що впливає на величину середніх значень амплітуд горизонтальних коливань гака трактора, є поступальна швидкість агрегату.

Середньоквадратичне відхилення амплітуд горизонтальних коливань гака трактора при холостому ході агрегату коливаються в діапазоні  $0,583 \cdot 10^{-2} \dots 2,727 \cdot 10^{-2}$  м, а при робочому –  $0,716 \cdot 10^{-2} \dots 1,329 \cdot 10^{-2}$  м. Значення коефіцієнта варіації менше при робочому ході (12,79...16,48%), чим при холостому ході 11,22...20,96%, що свідчить про менший розкид значень амплітуд коливань щодо середнього значення.

В таблиці 2.4.2 наведені статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань центра мас збиральної машини. Середні значення амплітуд горизонтальних коливань центра мас збиральної машини на холостому ходу перебувають у діапазоні  $4,7 \cdot 10^{-2} \dots 14,1 \cdot 10^{-2}$  м, а при виконанні технологічного процесу збирання вони склали  $4,995 \cdot 10^{-2} \dots 14,808 \cdot 10^{-2}$  м.

Як видно з наведених даних, навантаження не впливає на процес зміни середніх значень амплітуд горизонтальних коливань центра мас збиральної машини. Середньоквадратичне відхилення амплітуд горизонтальних коливань центра мас збиральної машини при холостому ході агрегату склали  $0,522 \cdot 10^{-2} \dots 2,79 \cdot 10^{-2}$  м, а в процесі збирання –  $0,652 \cdot 10^{-2} \dots 1,704 \cdot 10^{-2}$  м, при цьому коефіцієнт варіації склав на холостому ході 11,09...20,27%, а при робочому ході – 11,5...13,17%. Наведені дані свідчать про те, що коливання амплітуд щодо середніх значень при русі збиральної машини в загонці менше, ніж при русі на холостому ході.

Таблиця 2.4.2

Статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань центра мас збиральної машини

№ п/п	Швидкість руху, м/с	Середнє значення, $10^{-2}$ м	Середнє- квадратичне відхилення, $10^{-2}$ м	Коефіцієнт варіації, %	Статистична помилка	Довірчий інтервал		
						Нижня границя, $10^{-2}$ м	Верхня границя, $10^{-2}$ м	
1	холостий хід	1,2	+4.702	+0.522	+11.0930	+0.07376	+4.5780	+4.8252
2		1,46	+4.497	+0.650	+14.4563	+0.09195	+4.3434	+4.6515
3		1,8	+5.333	+1.081	+20.2724	+0.15289	+5.0768	+5.5892
4		2,0	+6.260	+0.883	+14.0982	+0.12481	+6.0511	+6.4693
5		2,5	+10.370	+1.846	+17.7985	+0.26102	+9.9327	+10.8073
6		2,87	+14.098	+2.792	+19.8053	+0.39487	+13.4364	+14.7596
7	робочий хід	1,2	+4.995	+0.652	+13.0427	+0.09214	+4.8408	+5.1496
8		1,46	+5.399	+0.712	+13.1797	+0.10063	+5.2302	+5.5674
9		1,8	+6.153	+0.746	+12.1248	+0.10551	+5.9762	+6.3298
10		2,0	+6.430	+0.780	+12.1323	+0.11032	+6.2452	+6.6148
11		2,5	+10.000	+1.169	+11.6871	+0.16528	+9.7231	+10.2769
12		2,87	+14.808	+1.704	+11.5097	+0.24103	+14.4042	+15.2118

Аналогічним образом були визначені статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань центра мас причепа-візка для збору обчесаного вороху (таблиця 2.4.3). Експеримент проводився з порожнім причепом і із завантаженим.

На холостому ході агрегату середні значення амплітуд коливань центра мас причепа склали  $4,9 \cdot 10^{-2} \dots 16,2 \cdot 10^{-2}$  м, а на робочому ході із завантаженим причепом  $4,45 \cdot 10^{-2} \dots 12,51 \cdot 10^{-2}$  м. Середньоквадратичні відхилення амплітуд горизонтальних коливань агрегату на холостому ході склали  $0,615 \cdot 10^{-2} \dots 1,542 \cdot 10^{-2}$  м, а на робочому ході –  $0,749 \cdot 10^{-2} \dots 1,229 \cdot 10^{-2}$  м, при цьому коефіцієнт варіації склав – 9,52...14,5 % і 9,82...16,81 % відповідно.

Графічною інтерпретацією наведеного аналізу є графіки, представлені на рис. 2.4.2...2.4.5.

На рис. 2.4.2 і рис. 2.4.3 наведені графіки зміни середніх значень амплітуд коливань ланок збирального агрегату на робочому й холостому ходах.

Як видно із графіків, мінімальні середні значення амплітуд коливань спостерігаються в діапазоні швидкостей 1,2...2,0 м/с. При збільшенні швидкості руху амплітуда коливань значно зростає.

Так, при швидкості руху агрегату 2,0 м/с середнє значення амплітуди коливань центра мас збиральної машини становить  $6,43 \cdot 10^{-2}$  м, а при швидкості 2,87 м/с –  $14,8 \cdot 10^{-2}$  м, тобто, середнє значення амплітуди коливань зростає більш ніж у два рази. Це приводить до збільшення втрат зерна неочосом.

Для оцінки ступеня розсіювання значень амплітуд щодо математичних очікувань були обчислені їх середньоквадратичні відхилення.

Зміни середньоквадратичних відхилень амплітуд коливань, залежно від швидкості поступального руху агрегату наведені на рис. 2.4.4 і рис. 2.4.5.

Аналіз наведених графіків показує, що середньоквадратичні відхилення амплітуд коливань гака трактора (крива 1), центра мас збиральної машини (крива 2) і центра мас причепа-візка для

збирання обчесаного вороху (крива 3) істотно залежать від швидкості руху.

Мінімальні значення середньоквадратичних відхилень амплітуд коливань ланок збирального агрегату отримані при швидкостях його руху 1,2...2,0 м/с.

При подальшому збільшенні поступального руху спостерігається значний ріст середньоквадратичних відхилень амплітуд коливань. З цього можна зробити такий висновок, що рух агрегату при цих швидкостях буде нестійким.

Таблиця 2.4.3

Статистичні характеристики амплітуд горизонтальних коливань центра мас причепа-візка

№ п/п	Швидкість руху, м/с	Середнє значення, $10^{-2}$ м	Середнє- квадратичне відхилення, $10^{-2}$ м	Коефіцієнт варіації, %	Статистична помилка	Довірчий інтервал		
						Нижня границя, $10^{-2}$ м	Верхня границя, $10^{-2}$ м	
1	холостий хід	1,2	+4.901	+0.615	+12.5533	+0.08701	+4.7556	+5.0472
2		1,46	+5.013	+0.727	+14.5042	+0.10283	+4.8407	+5.1853
3		1,8	+5.424	+0.793	+14.6148	+0.11210	+5.2358	+5.6114
4		2,0	+6.570	+0.806	+12.2750	+0.11405	+6.3791	+6.7613
5		2,5	+10.369	+0.954	+9.1981	+0.13489	+10.1434	+10.5954
6		2,87	+16.200	+1.542	+9.5205	+0.21812	+15.8346	+16.5654
7	робочий хід	1,2	+4.454	+0.749	+16.8133	+0.10591	+4.2766	+4.6314
8		1,46	+4.800	+0.678	+14.1314	+0.09593	+4.6393	+4.9607
9		1,8	+5.500	+0.728	+13.2289	+0.10290	+5.3276	+5.6724
10		2,0	+6.184	+0.776	+12.5491	+0.10976	+6.0005	+6.3683
11		2,5	+8.444	+1.017	+12.0385	+0.14376	+8.2031	+8.6849
12		2,87	+12.517	+1.229	+9.8224	+0.17387	+12.2257	+12.8083

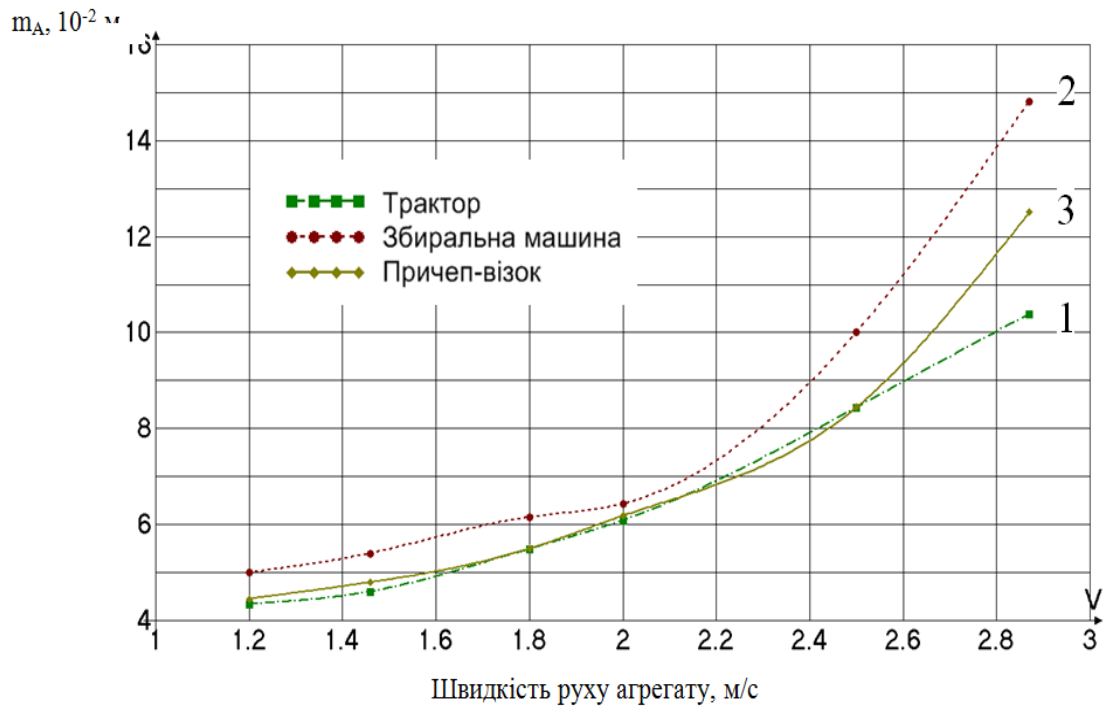


Рис.2.4.2. Графік залежності змін середніх значень амплітуд коливань гака трактора, центра мас збиральної машини, центра мас причепа-візка при виконанні агрегатом збирального процесу

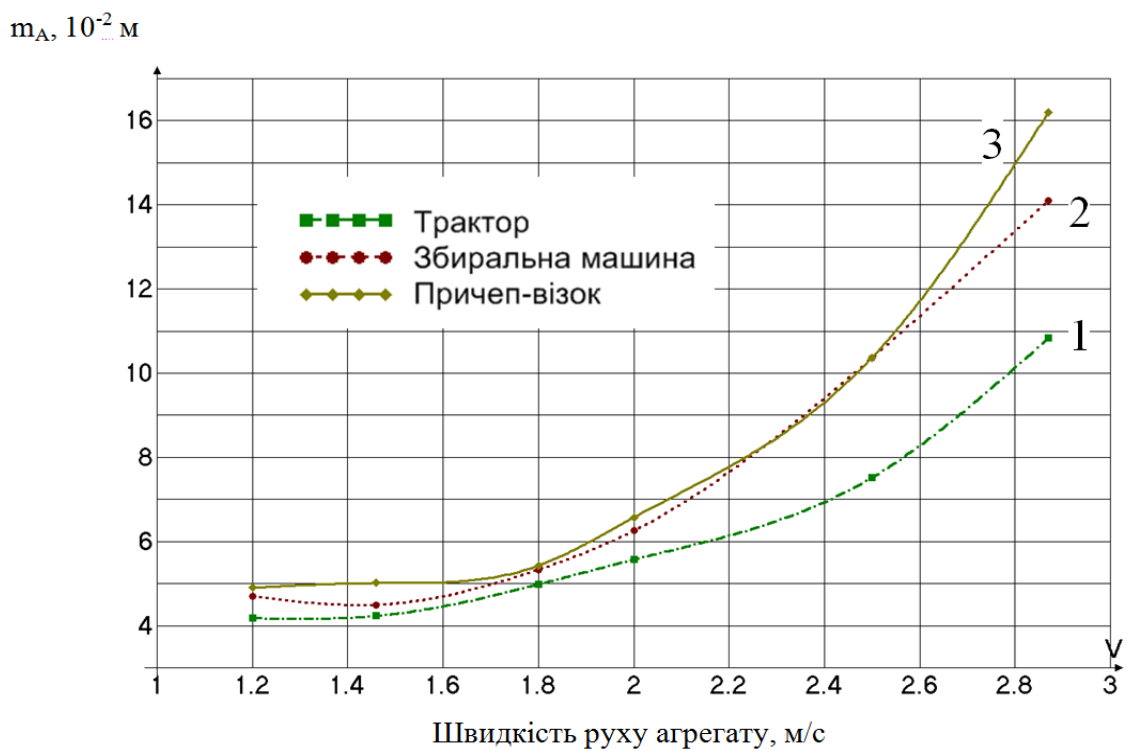


Рис. 2.4.3. Графік залежності змін середніх значень амплітуд коливань гака трактора, центра мас збиральної машини, центра мас причепа-візка на холостому ходу

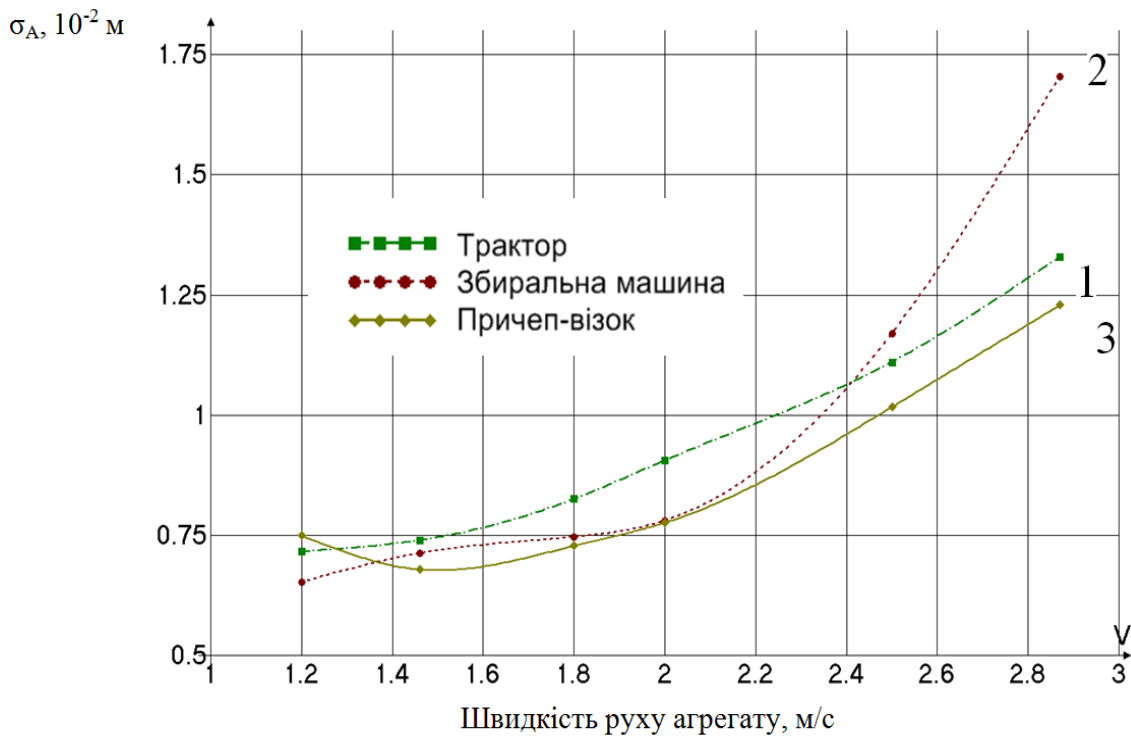


Рис. 2.4.4. Графік залежності змін середньоквадратичних відхилень амплітуд коливань ланок збирального агрегату на холостому ході

Виходячи з наведеного статистичного аналізу амплітуди горизонтальних коливань ланок збирального агрегату, можна зробити такий висновок, що найбільш прийнятним режимом руху, який забезпечує мінімальні відхилення від прямолінійного руху, а також максимальну продуктивність агрегату є швидкість 2,0 м/с.

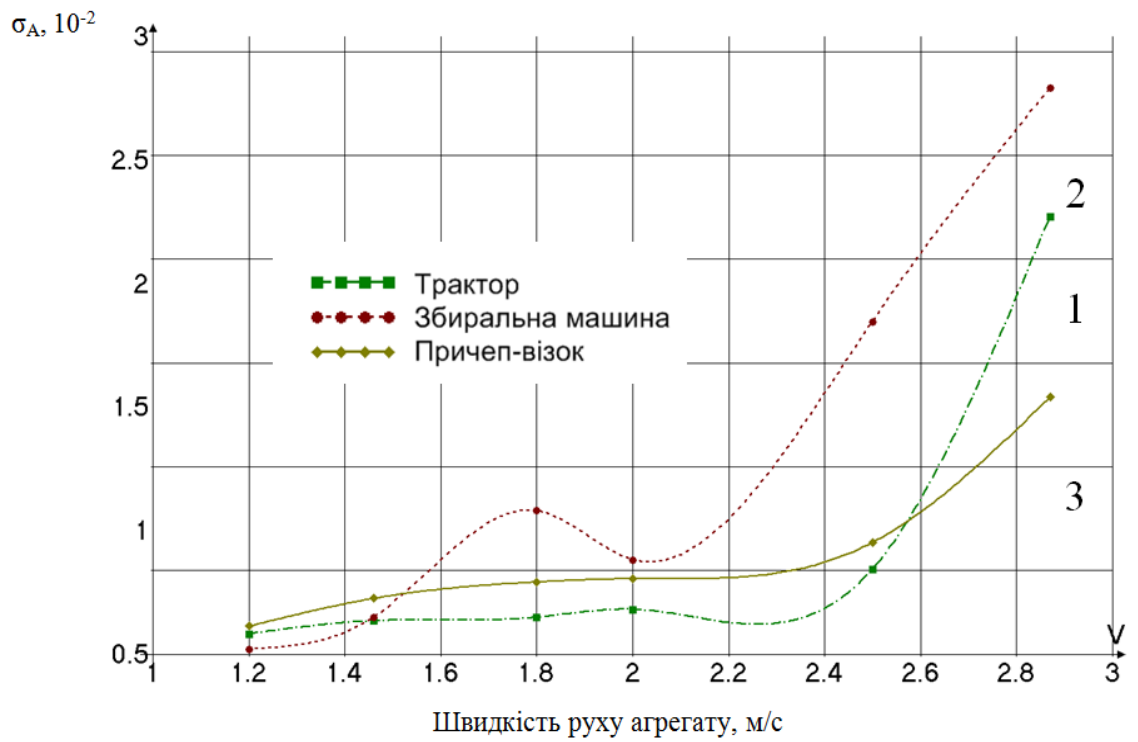


Рис. 2.4.5. Графік залежності змін середньоквадратичних відхилень амплітуд коливань ланок збирального агрегату на робочому ході



## РОЗДІЛ V.

# СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБЧІСАНОГО ВОРОХУ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР

### 2.5.1.Методика розрахунків статистичних характеристик

На першому етапі визначалося середнє значення  $\bar{x}$ , середньоквадратичне відхилення  $\sigma$  і коефіцієнт варіації  $V$  за формулами [54]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}; \quad (2.5.1)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - X_i)^2}{N - 1}}; \quad (2.5.2)$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (2.5.3)$$

Подальша обробка отриманої інформації полягала в знаходженні абсолютної і відносної помилки середнього арифметичного [54]:

$$\Delta X = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \quad \delta X = \frac{\Delta X}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (2.5.4)$$

де  $\Delta X$  – абсолютна помилка визначення середнього арифметичного;

$\delta X$  – відносна помилка (показник точності визначення середнього арифметичного).

Рішення про достовірність визначення середньоарифметичного значення приймалося в тому випадку, якщо ( $\delta X < 5\%$ ).

Для знаходження співвідношення, що встановлює зв'язок між реалізаціями  $x_i$  випадкової величини та можливостями їх появи [55] були побудовані щільності розподілу ймовірності змісту кожного

компонента в обчисаномуворосі, розмірних характеристик і т.д.

Сутність даної методики полягала в наступному. Спочатку визначаємо величину класового інтервалу за формулою [54]:

$$\lambda = \frac{X_{max} - X_{min}}{k}, \quad (2.5.5)$$

де  $X_{max}$  – найбільше значення змісту компонента обчисаного вороху;

$X_{min}$  – найменше значення змісту компонента обчисаного вороху;

$k$  – число класів, вибирається відповідно до рекомендацій [54],  $k = \sqrt{N} = 7$ .

Потім визначаються частоти за формулою [55]:

$$P_i = \frac{n}{N}. \quad (2.5.6)$$

Для виключення впливу класового проміжку на характер кривої розділимо значення частот на класовий проміжок.

Дані розрахунків зводяться в таблицю, де наводиться інформація про межі класів, кількості вимірювань в класі, частоті і стосовно  $P_i/\lambda$ .

За даними таблиці будується експериментальна крива щільності розподілу кожного з компонентів обчисаного вороху.

Після цього будується теоретична крива щільності розподілу кожної фракції, для чого використовується формула [54]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(\bar{X}-x)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.5.7)$$

Для оцінки адекватності отриманого закону розподілу значень змісту кожного компонента використовується критерій Пірсона [56, 57]:

$$\chi^2_{\text{э}} = \sum_{i=1}^n \frac{[P_i(\eta_k) - f_i(\eta_k)]^2}{f(\lambda_k)}, \quad (2.5.8)$$

де  $P_i(\eta_k)$  – частота експериментального ряду, що припадає на класовий проміжок;

$f(\eta_k)$  – точки кривої теоретичної щільності розподілу.

Для оцінки отриманих результатів необхідно порівняти  $\chi_T^2$  та  $\chi_{\Xi}^2$ , якщо виявиться що  $\chi_T^2 > \chi_{\Xi}^2$ , то розподілу отриманих значень компонентів обчисаного вороху підкоряються нормальному закону [56, 57].

## **2.5.2. Фракційний склад обчисаного вороху зернових**

### **2.5.2.1. Програма та методика визначення вмісту окремих компонентів у обчисаному воросі зернових**

Програма визначення вмісту окремих компонентів в обчисаному воросі зернових включала в себе:

- проведення польових досліджень збирального агрегату з метою збору обчисаного вороху;
- обчислення основних статистичних характеристик і встановлення законів розподілу компонентів обчисаного вороху зернових.

Обчисаний ворох виходить в результаті механічної дії гребінок обчисуючого пристрою на суцвіття зернових культур. Обчисуючий пристрій встановлюється на причіпну збиральну машину [41], яка агрегується трактором МТЗ-80. Загальний вигляд збирального агрегату наведено на рис. 2.5.1.



Рис. 2.5.1. Загальний вигляд збирального агрегату

Для отримання первинної інформації про фракційний склад обчисаного вороху зернових були проведені польові дослідження на полях навчально-дослідного господарства «Лазурне» Таврійського державного агротехнологічного університету в збиральний сезон 2012 року. Методика проведення досліджень була наступною. Дослідне поле розбивалося на залікові ділянки довжиною 20 м. Для розгону і виходу збирального агрегату з загонки виділялася ділянка довжиною 10 м. На кордонах залікових ділянок встановлювалися спеціальні віхи.

Збиральний агрегат по сигналу проходив всю залікову ділянку на одній передачі. Після виходу агрегату з залікової ділянки з причепа-візка відбирався в поліетиленовий мішечок обчисаний ворох. Після відбору проби агрегат знову заходив в загонками і все повторювалося спочатку. Таким чином, відбиралося 50 проб. Відібрані проби транспортувалися в лабораторію, де проводився їх розбір.

Розбір проб здійснювався наступним чином. Спочатку кожна проба зважувалася на вагах ВЛТК-500, тобто визначалася її загальна маса, потім на решетах виділялося вільне зерно, інші фракції виділялися методом ручного розбору. Кожна фракція зважувалася.

Результати всіх зважувань заносилися в журнал первинної інформації.

Процентний вміст вільного зерна в обчісаному воросі визначався за формулою:

$$\eta_{\text{в.з.}} = \frac{m_{\text{в.з.}}}{m_0} \cdot 100\%, \quad (2.5.9)$$

де  $\eta_{\text{в.з.}}$  – процентний вміст вільного зерна в обчісаному воросі зернових, %;

$m_{\text{в.з.}}$  – маса вільного зерна, кг;

$m_0$  – загальна маса проби.

Процентний вміст солом'яної фракції розраховувався за формулою:

$$\eta_c = \frac{m_c}{m_0} \cdot 100\%, \quad (2.5.10)$$

де  $\eta_c$  – процентний вміст соломи;

$m_c$  – маса соломи в пробі, кг.

Процентний вміст полови знаходилося зі співвідношення:

$$\eta_n = \frac{m_n}{m_0} \cdot 100\%, \quad (2.5.11)$$

де  $\eta_n$  – процентний вміст полови, %;

$m_n$  – маса полови в пробі, кг.

Процентний вміст обірваних колосків визначався за формулою:

$$\eta_k = \frac{m_k}{m_0} \cdot 100\%, \quad (2.5.12)$$

де  $\eta_k$  – процентний вміст колосової фракції, %;

$m_k$  – маса обірваних колосків в пробі, кг.

Результати розрахунків процентного вмісту кожного компонента заносилися в журнал первинної інформації.

Таким чином, вийшов масив обсягом 50 значень вмісту кожної фракції в обчісаному воросі.

### 2.5.2.2. Статистичні характеристики вмісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці

Розрахунок основних статистичних характеристик вмісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці за формулами (5.1 ... 5.3) показав, що його середнє значення дорівнює  $\bar{X}_3 = 53,77\%$ , при цьому відносна похибка визначення середнього арифметичного дорівнює  $\delta\bar{X}_3 = 2,1\%$ , тобто середнє значення визначено з достатньою точністю, тому що  $\delta\bar{X}_3 < 5\%$ , середньоквадратичне відхилення становить  $\sigma_3 = 7,97\%$ , а коефіцієнт варіації  $V = 14,82\%$ . Невисоке значення коефіцієнта варіації свідчить про незначний розкид значення вмісту вільного зерна в обчисаному воросі щодо середнього.

Використовуючи методику, наведену в п. 2.5.1 будуємо експериментальну криву щільності розподілу змісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці, для чого спочатку обчислюємо вихідні дані і заносимо їх в таблицю А.1 (Додаток А).

Використовуючи дані табл. А.1 (Додаток А), будуємо експериментальну криву щільності розподілу (рис. 2.5.2) [59].

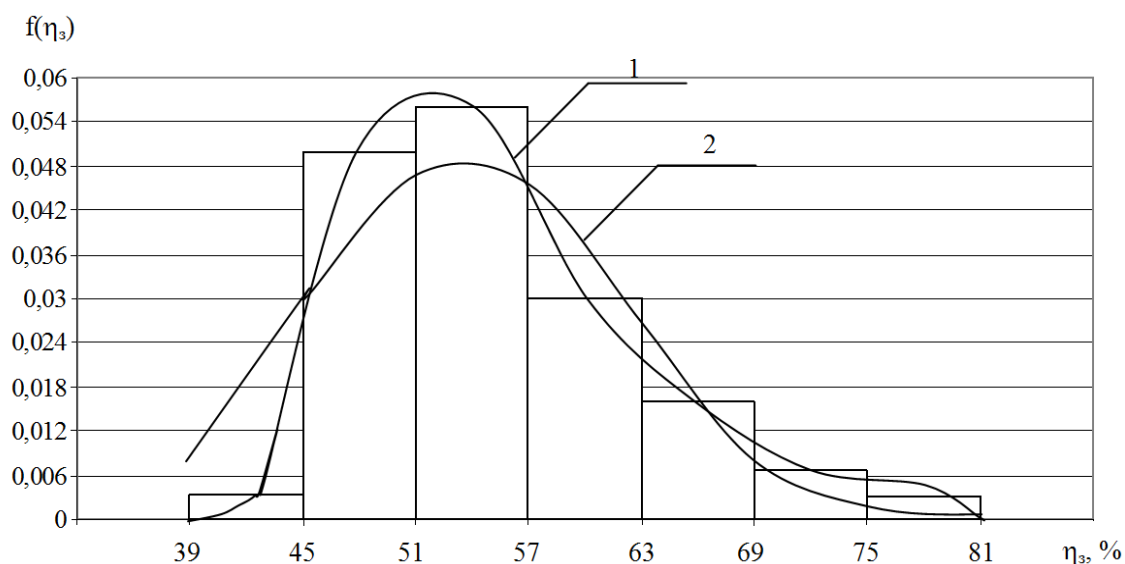


Рис. 2.5.2. Щільність розподілу вмісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці: 1 – експериментальна крива щільності розподілу; 2 – теоретична крива щільності розподілу

Підставляючи значення середнього арифметичного і середньоквадратичного  $\sigma$ , в формулу (2.5.7), отримаємо точки теоретичної кривої табл. А.2 (Додаток А).

Використовуючи дані табл. А.2 (Додаток А), будемо теоретичну криву щільності розподілу вмісту вільного зерна в обчисаномуворосі озимої пшениці. Перевірку адекватності отриманого закону розподілу виконуємо за критерієм Пірсона. Після підставки в формулу 5.12 вихідних даних отримуємо, що  $\chi^2_{\text{э}} = 0,03$ . Згідно [59] значення  $\chi^2_{\text{т}} = 1,145$ . Отже  $\chi^2_{\text{т}} > \chi^2_{\text{э}}$ , значення вмісту вільного зерна в обчисаномуворосі озимої пшениці підпорядковується нормальному закону. Статистична модель вмісту вільного зерна в обчисаному воросі має вигляд [59]:

$$f(\eta_3) = 0,05 \times e^{-\frac{(53,77 - \eta_{3i})^2}{127}}. \quad (2.5.13)$$

### 2.5.2.3. Аналіз вмісту обірваних колосків у обчисаному воросі озимої пшениці

Після розрахунку статистичних характеристик за формулами (2.5.1...2.5.3) були отримані наступні їх значення  $\bar{X} = 4,13\%$ ,  $\sigma = 1,45\%$  і  $V = 35\%$ . Досить високе значення коефіцієнта варіації  $V = 35\%$  свідчить про істотний розкид значень вмісту обірваних колосків щодо середнього значення [60].

Подальша обробка інформації полягала в знаходженні абсолютної і відносної помилки. Підставляємо в формули (2.5.4) вихідні дані і знаходимо значення абсолютної і відносної помилки  $\Delta X_k = 0,205\%$  і  $\delta X_k = 4,95\%$ . Як видно з отриманих розрахунків, середнє арифметичне значення вмісту обірваних колосків ми визначили з достатньою точністю  $\delta X_k < 5\%$ .

За методикою, наведеною в п. 5.1 побудуємо експериментальну криву щільності розподілу ймовірності вмісту обірваних колосків в обчисаномуворосі озимої пшениці (рис. 2.5.3) [60].

Вихідні дані для побудови експериментальної кривої наведені в табл. А.3 (Додаток А).

Побудуємо теоретичну криву щільності розподілу значень вмісту обірваних колосків в обчісаному воросі (рис. 2.5.3) [61], для чого використовуємо формулу 5.7, результати розрахунків наведені в табл. А.4 (Додаток А).

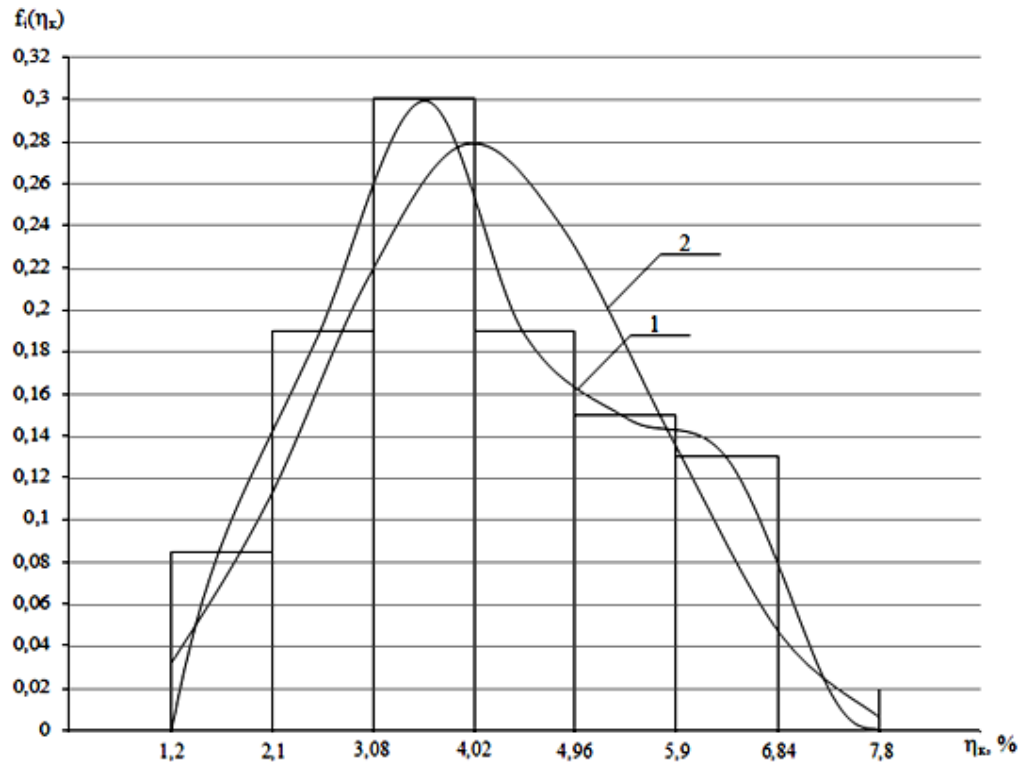


Рис. 2.5.3. Щільність розподілу вмісту обірваних колосків в обчісаному воросі: 1 – експериментальна крива; 2 – теоретична крива

Для оцінки адекватності отриманого закону розподілу значень вмісту обірваних колосків використовуємо критерій Пірсона, розрахунок проводимо за формулою 2.5.8. Розрахункове значення критерію Пірсона  $\chi_{\text{З}}^2 = 0,25$ , а табличне значення становить  $\chi_{\text{T}}^2 = 1,145$  [57].

Як видно з отриманих результатів  $\chi_{\text{T}}^2 > \chi_{\text{З}}^2$ , таким чином, розподіл отриманих значень обірваних колосків підкоряються нормальному закону.



Статистична модель вмісту обірваних колосків в обчисаному воросі озимої пшениці має вигляд [60]:

$$f(\eta_k) = 0,28 \times e^{-\frac{(4,13-\eta_k)^2}{4,2}}. \quad (2.5.14)$$

#### 2.5.2.4. Статистична модель вмісту полови в обчисаному воросі озимої пшениці

Отримані в результаті розбору проб дані підставляємо в формули (2.5.1...2.5.3) і отримуємо, що середнє значення вмісту полови складає  $\bar{X}_n = 8,86\%$ , середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n = 2,1\%$  і коефіцієнт варіації  $V_n = 23,6\%$  [61]. Потім за формулами (2.5.4) визначаємо точність середньоарифметичного значення. В результаті розрахунків отримано, що  $\Delta X_n = 0,297\%$  і  $\delta X_n = 3,34\%$ , тобто отримана похибка, яка не перевищує 5%.

Будуємо експериментальну і теоретичну криву рис. 2.5.4 [61].

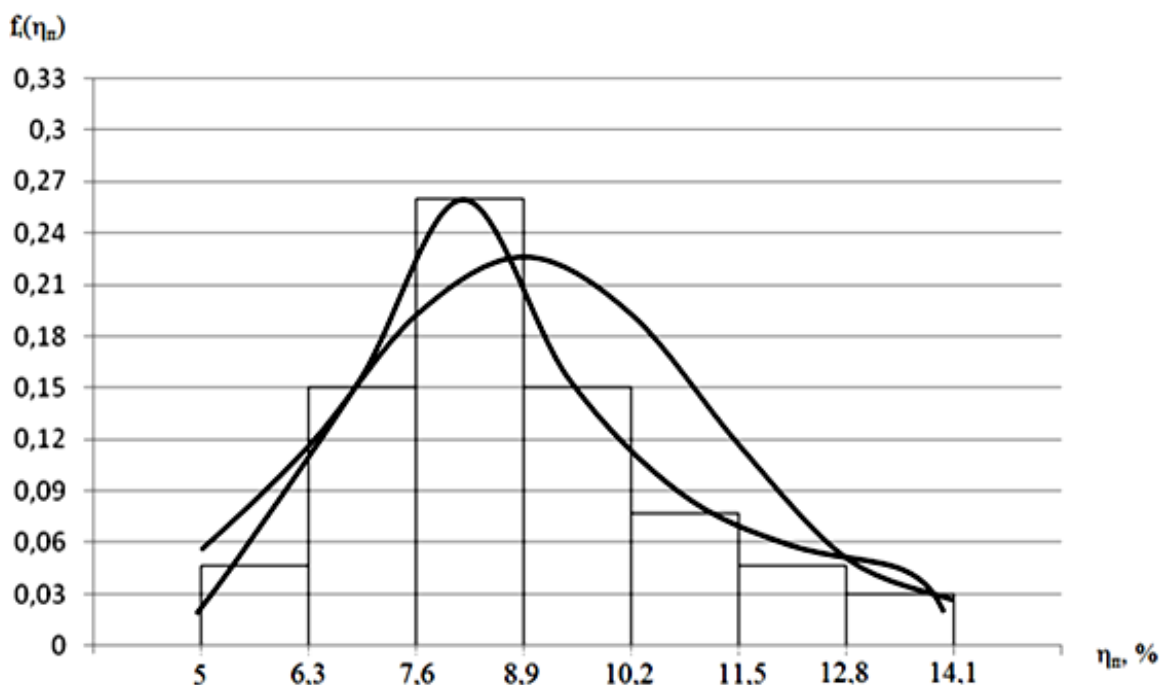


Рис. 2.5.4. Щільність розподілу значень змісту полови в обчисаному воросі озимої пшениці: 1 – експериментальна крива; 2 – теоретична крива

Для побудови експериментальної кривої за формулами (2.5.5...2.5.6) визначаємо величину класового інтервалу і частоту. Щоб виключити величини класового інтервалу на характер кривої щільності розподілу обчислюємо відносини  $P_i/\lambda$ . Результати обчислень наведені в таблиці А.5 (Додаток А).

Теоретичну криву будуємо за даними таблиці А.6 (Додаток А).

Для перевірки адекватності закону розподілу використовуємо критерій Пірсона [57], обчислюємо за формулою (2.5.8)  $\chi^2_{\text{э}}$  і порівнюємо з  $\chi^2_{\text{т}}$ . В результаті розрахунків отримуємо, що розрахункове значення  $\chi^2_{\text{э}} = 0,179$ , а табличне значення  $\chi^2_{\text{т}} = 1,145$  [112]. Таким чином,  $\chi^2_{\text{т}} > \chi^2_{\text{э}}$ , тобто значення вмісту полови в обчісаному воросі озимої пшениці підкоряються нормальному закону. Статистична модель вмісту полови в обчісаному воросі озимої пшениці має вигляд [61]:

$$f(\eta_n) = \frac{1}{5,26} \times e^{-\frac{(8,86-\eta_n)^2}{8,82}}. \quad (2.5.15)$$

### 2.5.2.5. Статистичний аналіз вмісту соломи у обчісаному воросі зернових

Розрахунок основних статистичних характеристик за формулами (2.1...2.3) показав, що соломи у обчісаному воросі в середньому міститься  $\bar{X} = 33,2\%$ , середньоквадратичне відхилення склало  $\sigma = 8,1\%$ , а коефіцієнт варіації дорівнює  $24,4\%$  [62].

Розрахунок коефіцієнта варіації показав, що значення вмісту соломи у обчісаному воросі озимої пшениці мають істотний розкид щодо середньоарифметичного.

Визначимо точність обчислення середньоарифметичного, для чого за формулами (2.5.4) знайдемо абсолютну і відносну помилки. Абсолютна помилка  $\Delta X = 1,15\%$ , а відносна помилка  $\delta X = 3,45\%$ , так як відносна помилка  $\delta X < 5\%$ , то можна зробити висновок про достовірність визначення середньоарифметичного значення вмісту соломи у обчісаному воросі озимої пшениці.

Для оцінки розподілу значень вмістів соломи у обчісаному воросі озимої пшениці будуємо експериментальну і теоретичну криву щільності розподілу (рис. 2.5.5) [62], для чого використовуємо методику, наведену в п. 2.5.1.

Вихідні дані для побудови експериментальної кривої наведені в табл. А.6 (Додаток А).

Для побудови теоретичної кривої необхідно провести розрахунки за формулою (2.5.7), результати розрахунки наведено в табл. А.7 (Додаток А).

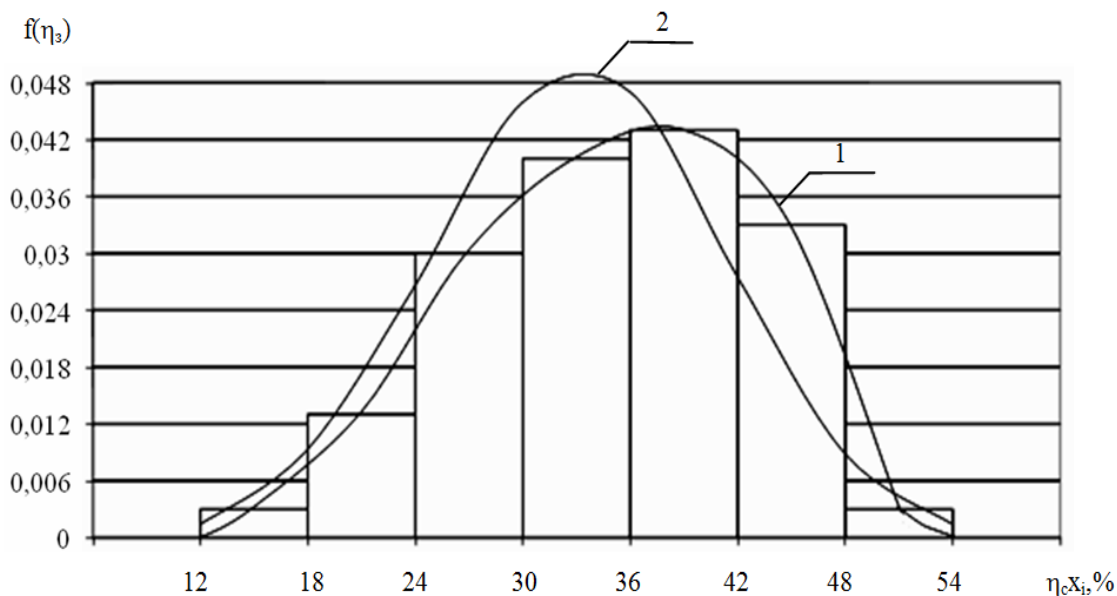


Рис. 2.5.5. Щільність розподілу вмісту соломи у обчісаному воросі озимої пшениці: 1 – експериментальна крива щільності розподілу; 2 – теоретична крива щільності розподілу

Як видно з рис. 2.5.5 мінімальне значення вмісту соломи становить 12%, а максимальне 54%, отже, чисельні значення вмісту соломи знаходяться в діапазоні 12% ... 54%.

Розрахунок адекватності закону розподілу за критерієм Пірсона показав, що розподіл значень вмісту соломи у обчісаному воросі озимої пшениці підкоряються нормальному закону  $\chi^2_{\text{Э}} = 0,011$ , а  $\chi^2_{\text{Т}} = 1,145$ , отже, необхідна умова  $\chi^2_{\text{Т}} > \chi^2_{\text{Э}}$  виконується. Цей висновок

підтверджує характер протікання теоретичних і експериментальних кривих розподілу. З рис. 5.5 видно, що в цілому точки експериментальної кривої незначно відстають від точок теоретичної кривої.

Статистична модель змісту соломи у обчісаному воросі озимої пшениці має вигляд [62]:

$$f(\eta_3) = 0,05 \times e^{-\frac{(35,2 - \eta_{3i})^2}{131}}. \quad (2.5.16)$$

#### **2.5.2.6. Загальний аналіз вмісту різних компонентів у обчісаному воросі озимої пшениці**

Обчісаний ворох озимої пшениці (рис.2.5.6) являє собою чотирьохкомпонентну зерносолом'ясту суміш.



Рис. 2.5.6. Загальний вигляд обчісаного вороху озимої пшениці

Він в середньому містить: вільного зерна 53,77%, соломи і великих домішок 33,2%, полови 8,86% і обірваних колосків 4,13%. Дані результати наведені на діаграмі [63].

Аналізуючи діаграму середньоарифметичних значень

компонентів обчисаного вороху озимої пшениці слід зазначити, що найбільш вагомими фракціями є зернова і солом'яна фракції – на їх частку припадає практично 87%. Дві інші фракції – обірвані колоски і полова набагато менше, їх сумарний вклад не дотягує і до 13%. Ми розглянули середньоарифметичне значення компонентів обчисаного вороху. Статистичні характеристики вмісту кожного компонента в обчисаному воросі наведені на рис. 2.5.8 [63].

Як видно з діаграми (рис. 2.5.8), найбільший розкид значень відносно середнього спостерігається у колосовій фракції, коефіцієнт варіації склав 35%, найменший розкид значень у зерновій фракції, тут коефіцієнт варіації склав 14,82%.

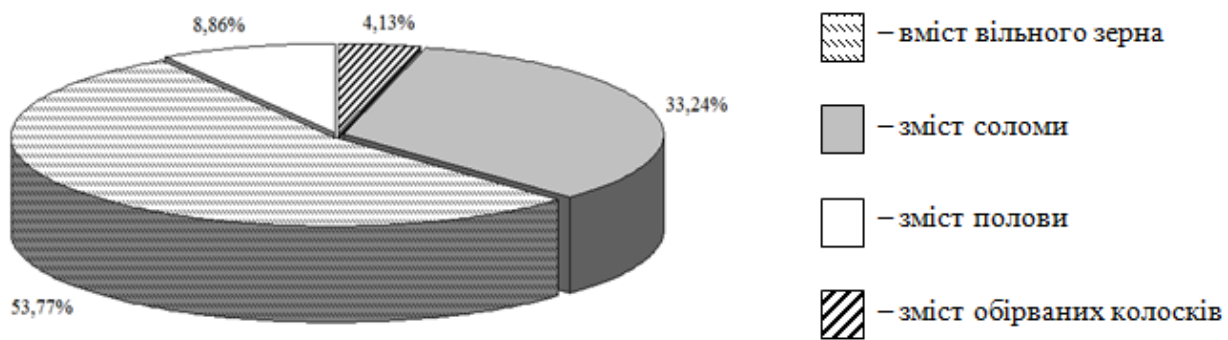


Рис. 2.5.7. Діаграма середньоарифметичних значень компонентів обчисаного вороху пшениці

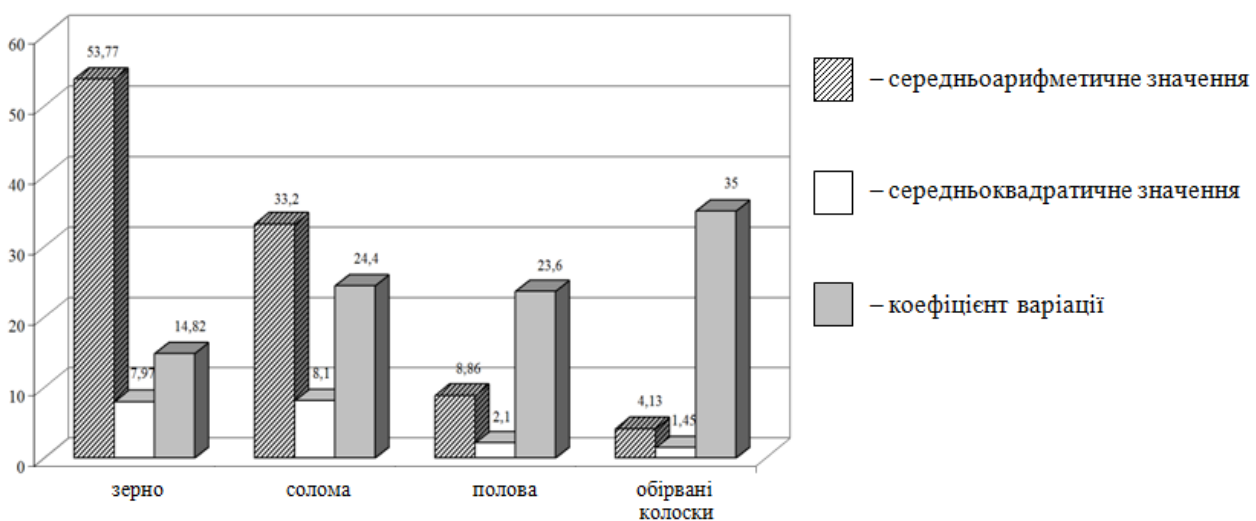


Рис. 2.5.8. Діаграма статистичних характеристик вмісту окремих компонентів в обчисаному воросі

В цілому, якщо розглядати обчесаний ворох зернових з позиції його доопрацювання, то в якості першочергового завдання проглядається відділення великих соломистих домішок і обірваних колосків від вільного зерна.

### **2.5.3. Біометричні характеристики компонентів обчисаного вороху озимої пшениці**

#### **2.5.3.1. Програма та методика дослідження біометрії**

Програма дослідження біометрії компонентів обчисаного вороху включала наступні питання:

- визначення статистичних характеристик і побудова кривих щільності розподілу розмірів зернівки;

- встановлення статистичних оцінок і побудова кривих розподілу біометричних характеристик компонентів солом'яної фракції;

- статистичний аналіз біометрії обірваних колосків.

Для виконання програми вивчення біометрії обчисаного вороху зернових були проведені польові дослідження. Методика отримання вихідного матеріалу наведена раніше (п. 2.5.2.1).

Для визначення біометричних характеристик проводилися вимірювання лінійних розмірів складових кожної фракції. Всі отримані результати заносилися в журнал первинної інформації. Для подальшої обробки первинної інформації були використані методи теорії ймовірностей і математичної статистики [54, 56, 57].

#### **2.5.3.2. Визначення біометричних характеристик зернівок**

Як відомо, зернівка характеризується трьома параметрами – довжиною, товщиною і шириною [64]. Розмірні характеристики окремих зернин на сьогоднішній день вже достатньо вивчені і описані в літературі, наприклад [65, 66, 67, 68]. Однак для вивчення властивостей обчисаного вороху зернових та подальшого

моделювання процесів, які з ним відбуваються, необхідне знання статистичних характеристик біометрії зернівки. Крім того, слід зазначити, що в останні роки селекціонерами виведені нові сорти зернових, у яких геометричні розміри зернівок мають біометричні відмінності. Тому в програму досліджень були включені питання біометричних характеристик окремих зернин.

Отримана в результаті вимірів первинна інформація про біометрію зернівки була оброблена за формулами (2.5.1...2.5.3), отримані результати наведені в таблиці 2.5.1 [63].

Таблиця 2.5.1

Статистичні характеристики біометрії зернівки

Статистичні характеристики	Од. вимір.	Довжина	Товщина	Ширина
Середньоарифметичне значення	мм	6,7	2,33	2,78
Середньоквадратичне відхилення	мм	5,7	0,28	0,286
Коефіцієнт варіації	%	8,45	12,02	10,29
Абсолютна помилка	мм	0,8	0,04	0,04
Відносна помилка	%	1,19	1,71	2,14

Як видно з наведеної таблиці середньоарифметичне значення довжини зернівки озимої пшениці склало 6,7 мм, товщини 2,33 мм і ширини 2,78 мм, при цьому похибка визначення середньоарифметичного дорівнює відповідно для довжини зернівки 1,19%, для товщини 1,71% і для ширини 1,46%. Таким чином, для всіх трьох біометричних параметрів зернівки середньоарифметичне значення визначено з достатньою точністю, тобто  $\delta x < 5\%$ .

Для графічної інтерпретації отриманих результатів була побудована діаграма (рис. 2.5.9).

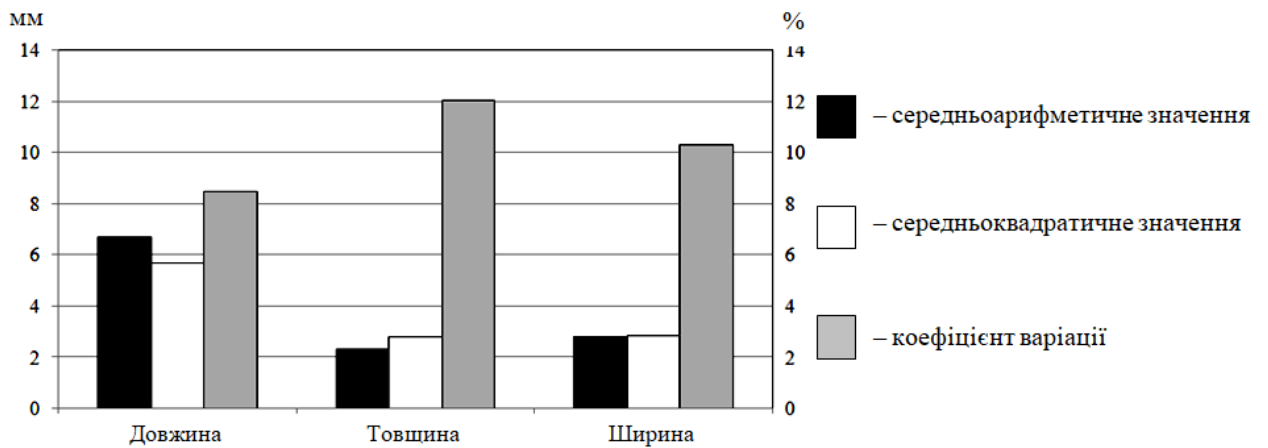


Рис. 2.5.9. Діаграма статистичних характеристик біометрії зернівки озимої пшениці

Для встановлення закону розподілу випадкових величин, які характеризують зміну розмірних характеристик зернівки, були побудовані криві експериментальної і теоретичної щільності розподілу (рис. 2.5.10...2.5.12.), на яких цифрою 1 позначимо експериментальну криву, а цифрою 2 – теоретичну.

Розрахункові дані для побудови кривих розподілу наведені в Додатку А.

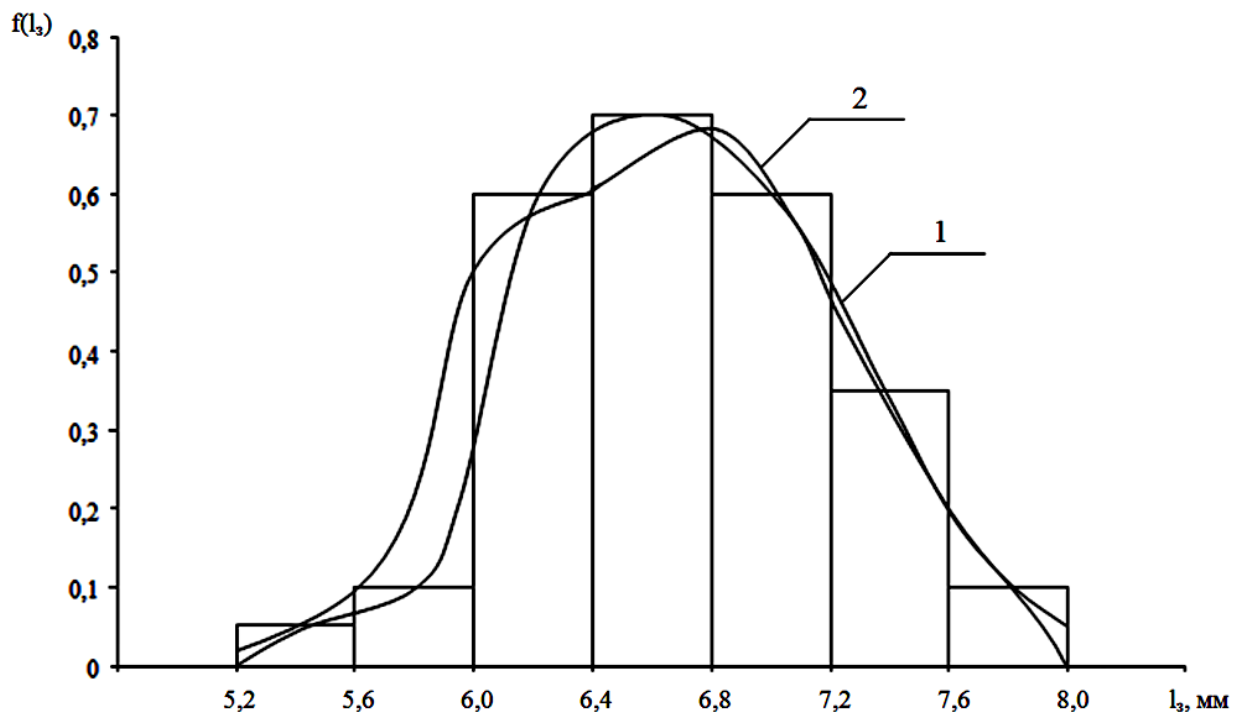


Рис. 2.5.10. Щільність розподілу довжини зернівки



Як видно з рис. 2.5.10 довжина зернівки змінюється в діапазоні 5,2...8,0 мм. Найбільша кількість значень знаходиться в межах 6,0...7,2. Оцінка адекватності закону розподілу довжини зернівки проводилася за критерієм Пірсона, розрахункове значення критерію Пірсона склало  $\chi_e^2 = 0,21$ , а табличне рівно відповідно  $\chi_T^2 = 1,145$ . Враховуючи, що  $\chi_T^2 > \chi_e^2$ , можна зробити висновок про адекватність отриманого закону розподілу; цей факт підтверджує близькість точок експериментальної кривої (крива 1) рис. 2.5.10 і теоретичної (крива 2) рис. 2.5.10.

Таким чином, закон розподілу довжин зернівок озимої пшениці описується виразом [63].

$$f(l_3) = 0,7 \cdot e^{-\frac{(6,7-l_3)^2}{0,65}} \quad (2.5.17)$$

Розподіл отриманих значень довжин зернівок підпорядковується нормальному закону розподілу.

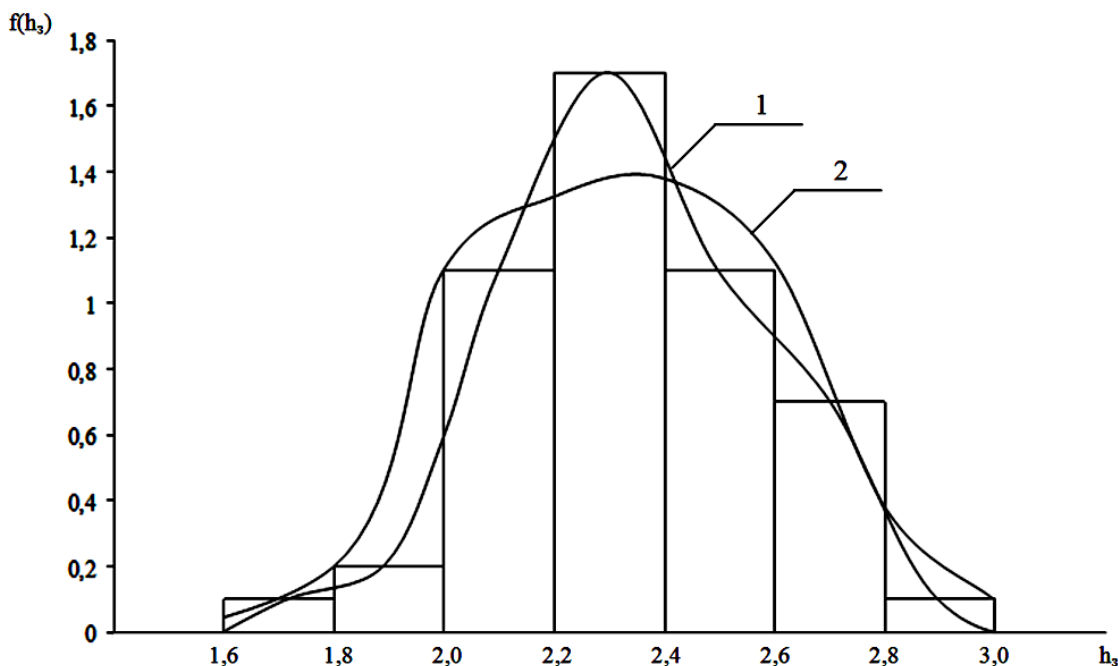


Рис. 2.5.11. Щільність розподілу товщини зернівки

Товщина зернівки змінюється в межах 1,6 ... 3,0 мм. Перевірка адекватності закону розподілу значень товщини зернівки показала, що  $\chi_T^2 > \chi_e^2$ , тобто  $\chi_e^2 = 0,915$ ,  $\chi_T^2 = 1,145$ . Виходячи з цього

впливає, що статистична модель, яка описує розподіл товщини зернівки, адекватна і розподіл значень товщини зернівки підкоряються нормальному закону:

$$f(h_3) = 1,43 \cdot e^{-\frac{(2,33-h_3)^2}{0,16}} \quad (2.5.18)$$

Аналогічним чином розраховані параметри закону розподілу ширини зернівки, графічна інтерпретація наведена на рис. 2.5.11, а аналітично закон розподілу описується виразом (2.5.19) [63].

$$f(a_3) = 1,4 \cdot e^{-\frac{(2,78-a_3)^2}{0,163}} \quad (2.5.19)$$

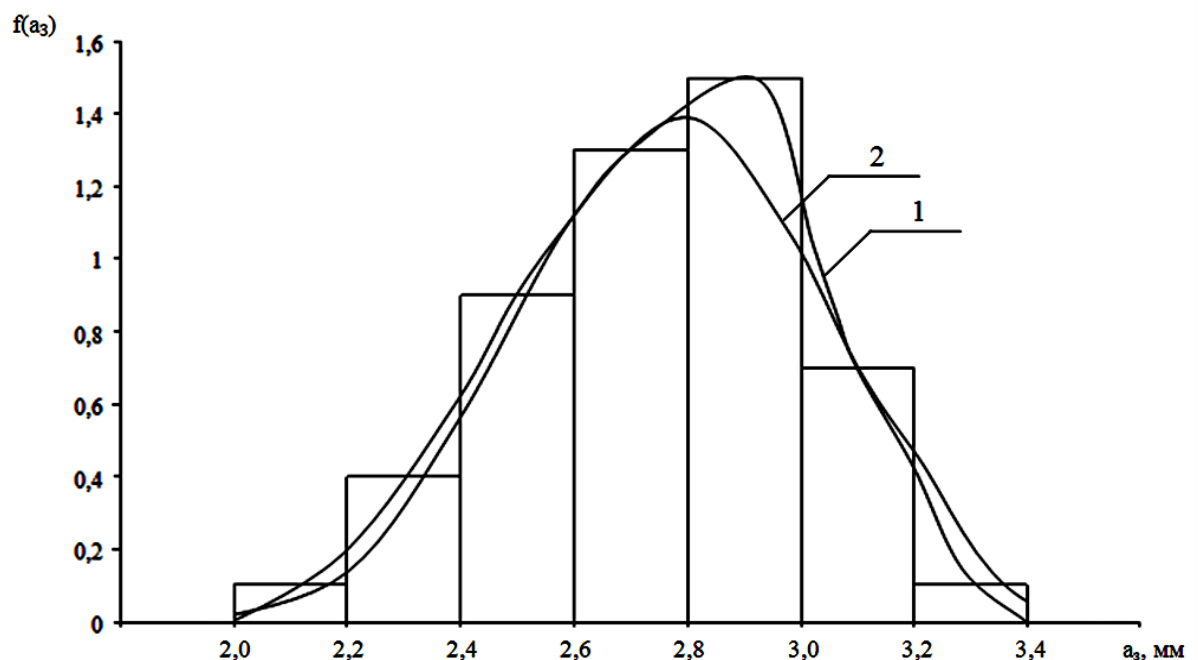


Рис. 2.5.12. Щільність розподілу ширини зернівки

### 2.5.3.3. Встановлення розмірних характеристик компонентів солом'ястої фракції

Розрахункових основних статистичних характеристик компонентів солом'ястої фракції проводився за методикою наведеною в п. 2.5.1, результати розрахунків даються в табл. 2.5.2.

Таблиця 2.5.2

Статистичні характеристики біометрії компонентів солом'ястої фракції

№	Статистичні характеристики	Одиниця виміру	Діаметр соломини	Довжина соломини
1	Середньоарифметичне значення	мм	2,8	254
2	Середньоквадратичне відхилення	мм	0,44	85
3	Коефіцієнт варіації	%	16,07	33,46
4	Абсолютна помилка	мм	0,06	12
5	Відносна помилка	%	2,14	4,72

Наведені в таблиці 2.5.2 дані свідчать про те, що середнє значення діаметра соломини дорівнює 2,8 мм, при цьому відносна помилка визначення середньоарифметичного значення становить 2,14%, тобто середнє значення діаметра соломини визначено з достатньою точністю  $\delta x_c < 5\%$ . Середньоарифметичне значення довжини соломини становить 254 мм, оцінка точності визначення середньоарифметичного значення довжини соломини, показало, що похибка не перевищує 5%. Ступінь розкиду значень відносно середнього значення оцінювалося середньоквадратичним відхиленням і коефіцієнтом варіації. Середньоквадратичне відхилення діаметра соломини дорівнює 0,44 мм, при цьому коефіцієнт варіації склав 16,07%. Для довжини соломини  $\sigma = 85$  мм, а коефіцієнт варіації 33,46%, що свідчить про досить високий розкид чисельних значень довжин соломин щодо середнього. Для графічної інтерпретації отриманих статистичних характеристик параметрів солом'ястої фракції побудуємо діаграму.

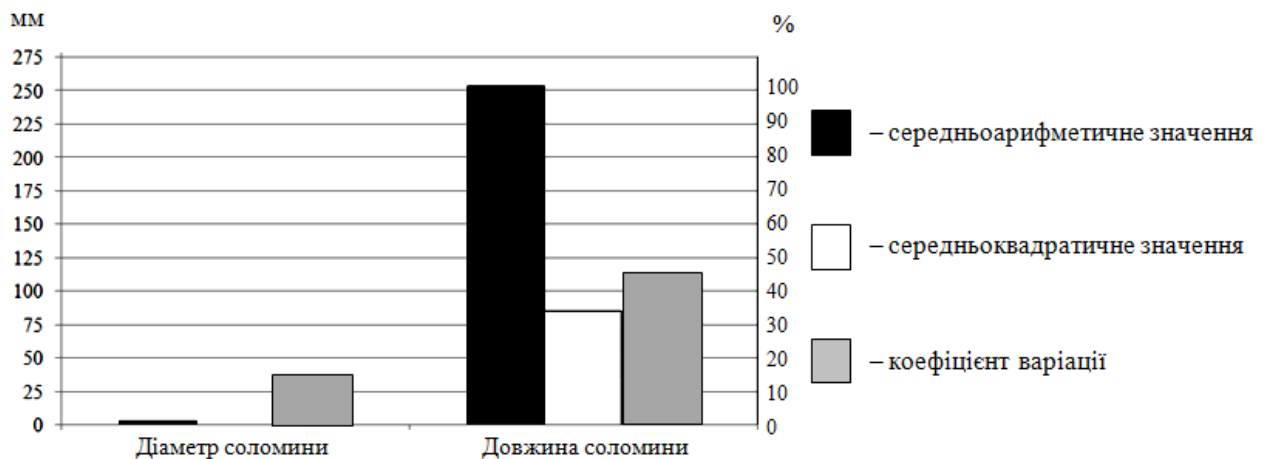


Рис. 2.5.13. Діаграми статистичних характеристик біометричних параметрів солом'ястої фракції

Побудуємо експериментальну і теоретичну криві розподілу значень діаметра і довжини соломини (рис. 2.5.14...2.5.15), для чого використовуємо результати розрахунків, які наведені в табл. А.15 ... А.18. Експериментальні криві щільності розподілу позначені індексом «1», а теоретичні – індексом «2».

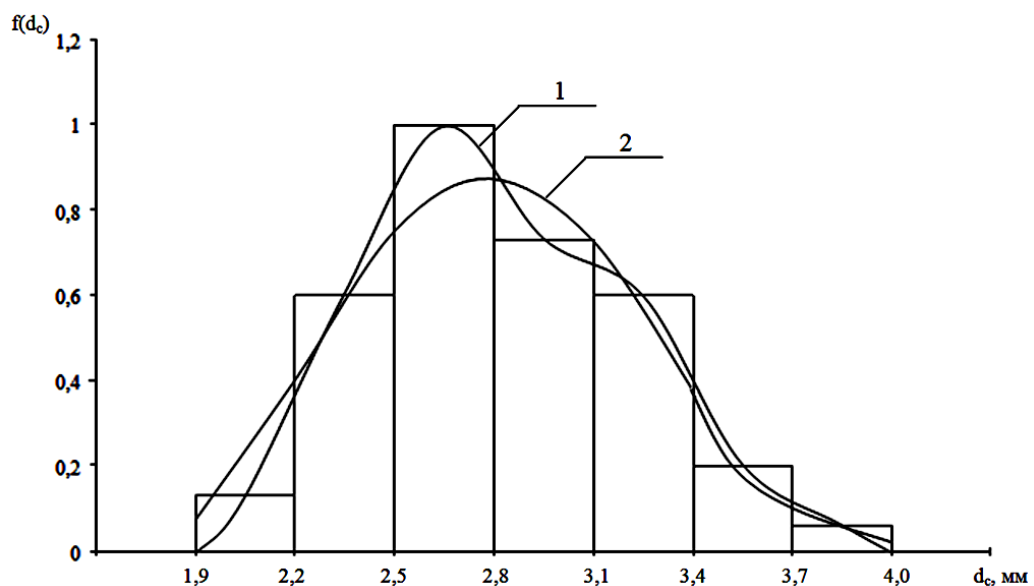


Рис. 2.5.14. Щільність розподілу діаметра соломини

Як видно з рис. 2.5.14 чисельні значення діаметра соломини знаходяться в інтервалі 1,9...4,0 мм, найбільше число значень лежить в діапазоні 2,2...3,3 мм. Точки теоретичної і експериментальної кривої практично збігаються, що свідчить про адекватність

статистичної моделі, дані розрахунку критерію Пірсона підтвердило цей висновок. Згідно розрахунків,  $\chi_e^2 = 0,439$ , а табличне значення  $\chi_e^2 = 1,145$ .

Отже, розподіл значень діаметра соломини підпорядковується нормальному закону розподілу, а статистична модель має вид:

$$f(d_c) = 0,91 \cdot e^{-\frac{(2,8-d_c)^2}{0,39}} \quad (2.5.20)$$

Розглянемо розподіл значень довжини соломини.

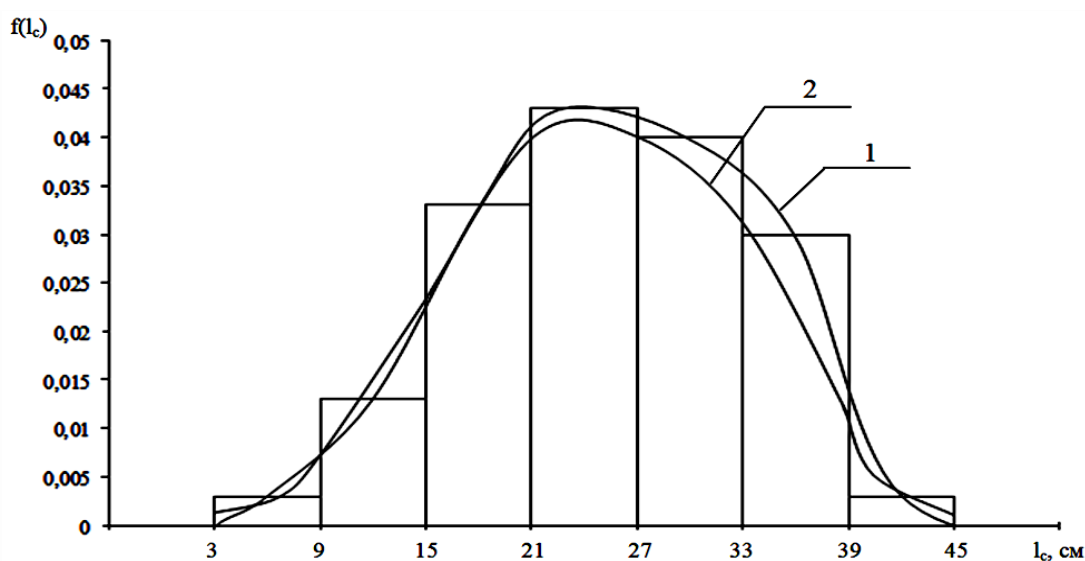


Рис. 2.5.15. Щільність розподілу довжини соломини

Значення довжини соломини знаходяться в діапазоні 30...450 мм. Крива 1 практично збігається з кривою 2, тобто експериментальна крива збігається з теоретичною, про це ж свідчить критерій  $\chi_e^2 = 0,022$ . У той же час табличне значення  $\chi_T^2 = 1,145$ , тобто  $\chi_T^2 > \chi_e^2$ , тобто розподіл значень довжин соломин підпорядковується нормальному закону розподілу випадкових величин, який має вигляд:

$$f(l_c) = 0,0047 \cdot e^{-\frac{(254-l_c)^2}{14450}} \quad (2.5.21)$$

#### 2.5.3.4. Аналіз біометрії обірваних колосків озимої пшениці

Статистичні характеристики біометрії обірваних колосків наведені в табл.5.3.

Таблиця 2.5.3

Статистичні характеристики біометрії обірваних колосків

№	Статистичні характеристики	Одиниця виміру	Діаметр колоска	Довжина колоска
1	Середньоарифметичне значення	мм	7,72	88,9
2	Середньоквадратичне відхилення	мм	1,53	28,5
3	Коефіцієнт варіації	%	19,82	32,11
4	Абсолютна помилка	мм	0,216	4
5	Відносна помилка	%	2,8	4,5

Результати проведених розрахунків статистичних характеристик біометричних параметрів обірваних колосків показують, що середнє арифметичне значення діаметра обірваного колоска становить 7,72 мм, при цьому його довжина дорівнює 88,9 мм. Перевірка точності визначення середньоарифметичного значення показала, що для діаметра колоска  $\delta x = 2,8\%$ , а для його довжини 4,5%, тобто для діаметра і для довжини колоска середньоарифметичне значення визначено з достатньою точністю  $\delta x < 5\%$ . Середньоквадратичне відхилення діаметра колоска одно 1,53 мм, а довжини – 28,5 мм, при цьому коефіцієнти варіації склали 19,82% і 32,11% відповідно.

Вищевикладене можна представити у вигляді діаграм статистичних характеристик біометричних параметрів обірваних колосків, які представлені на рис. 2.5.16, при цьому на рис. 2.5.16 (а), приведена діаграма статистичних характеристик діаметра обірваного колоска, а на рис. 2.5.16 (б) – його довжини.

З метою встановлення закону розподілу чисельних значень розмірних характеристик обірваних колосків були побудовані експериментальні криві 1 і теоретичні криві 2 розподілу розмірних характеристик обірваних колосків (рис. 2.5.17...2.5.18).

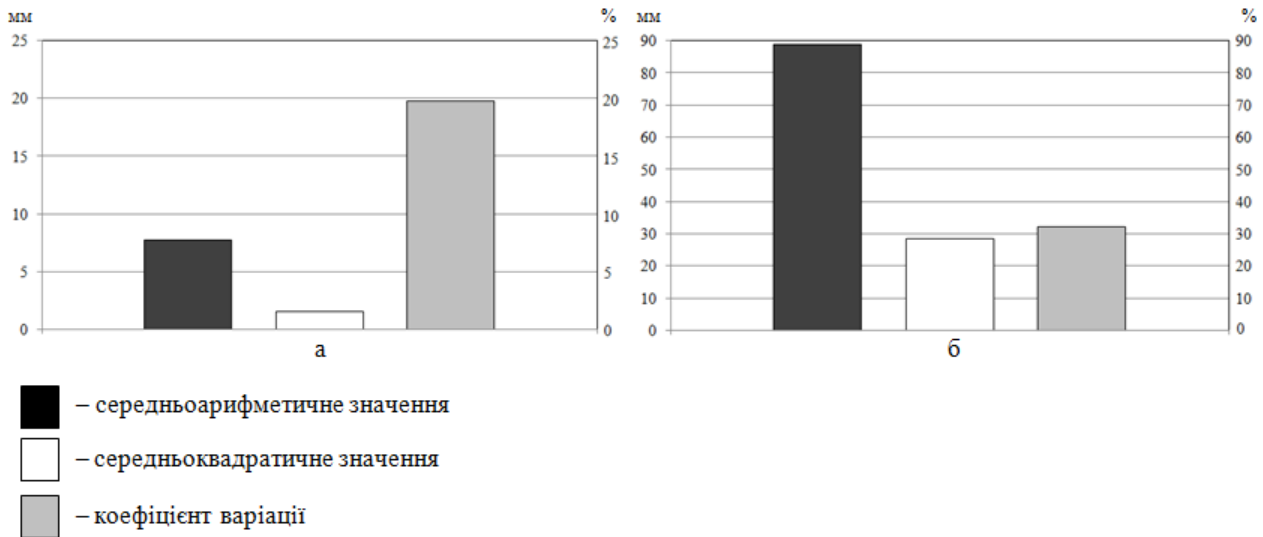


Рис. 2.5.16. Діаграми статистичних характеристик біометричних параметрів обірваних колосків: а – діаметра колоска; б – довжини колоска

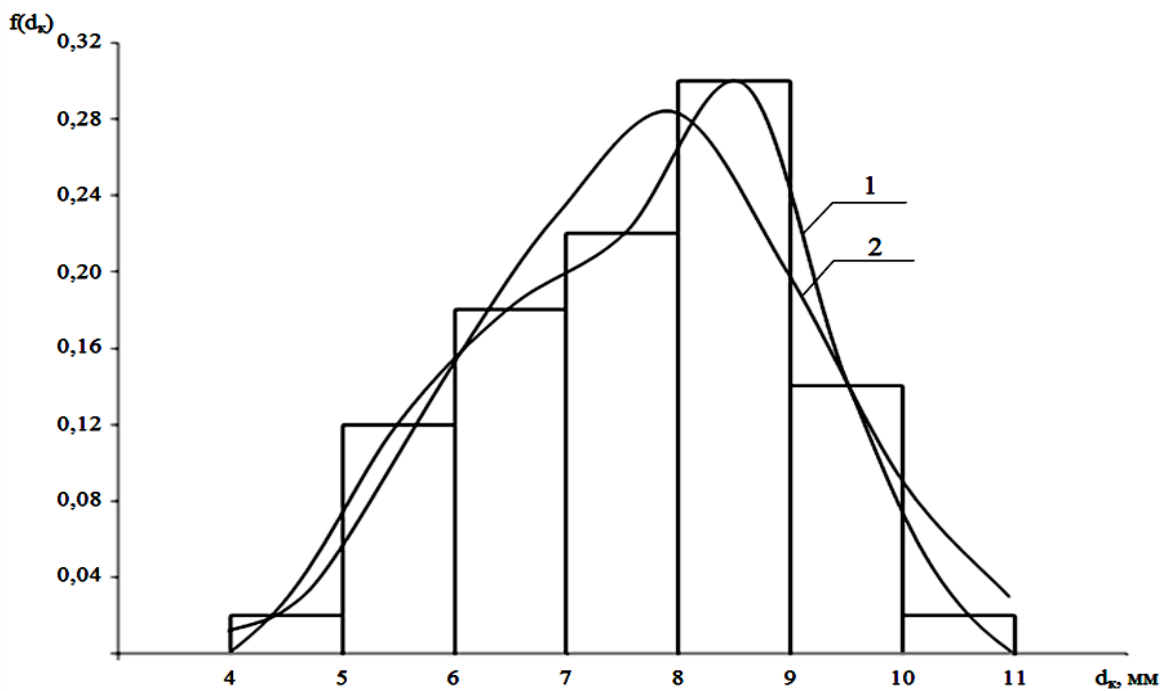


Рис. 2.5.17. Щільність розподілу діаметра обірваного колоска

Як видно з рис. 2.5.17 чисельні значення діаметра обірваних колосків лежать в межах 4...11 мм. Візуально експериментальна крива розподілу має деяку асиметрію, про це свідчить факт зміщення середньоарифметичного значення в сторону більших значень.

Загалом асиметрію розподілу оцінює коефіцієнт асиметрії, який визначається за формулою [55]:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^2}, \quad (2.5.22)$$

де  $A$  – коефіцієнт асиметрії;

$\mu_3$  – третій центральний момент розподілу випадкової величини;

$\sigma^2$  – середньоквадратичне відхилення.

Перевірка адекватності закону розподілу значень діаметра обірваних колосків показала, що  $\chi_e^2 = 0,21$ , при  $\chi_T^2 = 1,145$ , тобто  $\chi_T^2 > \chi_e^2$  і розподіл значень діаметра обірваних колосків підпорядковується нормальному закону розподілу.

Статистична модель розподілу значень діаметра обірваних колосків має вигляд:

$$f(d_k) = 0,26 \cdot e^{-\frac{(7,72-d_k)^2}{0,21}}. \quad (2.5.23)$$

Криві щільності розподілу довжини обірваного колоска представлені на рис. 2.5.18, а розрахункові дані в табл. А.19 (Додаток А).

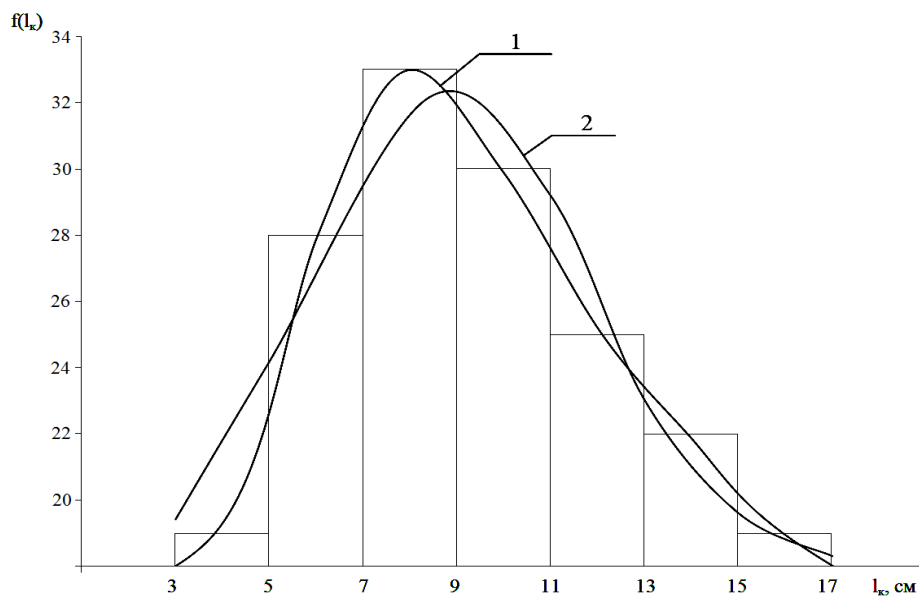


Рис. 2.5.18. Щільність розподілу довжини обірваного колоска



Значення довжини обірваних колосків знаходяться в діапазоні 20 ... 34 мм, найбільша кількість значень лежить в межах 24 ... 30 мм. Розподіл значень довжини обірваних колосків також, як і розподіл значень діаметра обірваних колосків має деяку асиметрію і також середньоарифметичне зміщено в бік більших значень. Хоча в цілому розподіл підпорядковується нормальному закону розподілу,  $\chi_e^2 = 0,07$ , а  $\chi_T^2 = 1,145$  [63], тобто  $\chi_T^2 > \chi_e^2$ .

Статистична модель має вигляд:

$$f(l_k) = 0,014 \cdot e^{-\frac{(88,9-l_k)^2}{1624,5}} \quad (2.5.24)$$

### 2.5.3.5. Загальний статистичний аналіз розмірних характеристик компонентів обчісаного вороху зернових

Статистичні характеристики всіх компонентів обчісаного вороху озимої пшениці наведені в таблицю 2.5.4.

Таблиця 2.5.4

Статистичні характеристики біометрії обчісаного вороху озимої пшениці

№	Статистичні характеристики	Од. ви м.	Найменування компонентів обчісаного вороху						
			зернівка			солома		обірвані колоски	
			довжина	товщина	ширина	діаметр	довжина	діаметр	довжина
1	Середнє арифметичне значення	мм	6,7	2,33	2,78	2,8	254	7,72	88,9
2	Середньоквадратичне відхилення	мм	0,57	0,28	0,286	0,44	85	1,53	28,5
3	Коефіцієнт варіації	%	8,45	12,02	10,29	16,07	33,46	19,82	32,11
4	Абсолютна помилка	мм	0,08	0,04	0,04	0,06	12	0,216	4
5	Відносна помилка	%	1,19	1,71	1,46	2,14	4,72	2,8	4,5

Аналізуючи дані таблиці 2.5.4, слід зазначити, що лінійні розміри зернівки і соломини відрізняються істотно. Так середнє значення довжини зернівки становить 6,7 мм, а середнє значення довжини соломини – 254 мм. Навіть з урахуванням ймовірнісної природи біометричних характеристик номінальна довжина соломини перевищує довжину зернівки в 5...6 разів. Аналогічна картина спостерігається з біометричними параметрами зернівки і обіраного колоска. Мінімальна довжина колоска 30 мм, а максимальна довжина зернівки 8 мм, тобто практично чотириразова різниця. Тому при розробці робочого органу для відділення вільного зерна від солом'ястої і колосової фракції необхідно врахувати різницю в розмірах зернівки, соломини і обіраного колоска. Решета, які серійно випускаються для цієї мети не придатні.

Оскільки основною характеристикою випадкових величин є їх розподіл, розглянемо закони розподілу розмірних параметрів складових обіраного вороху зернових.

Параметри статистичних моделей біометричних характеристик компонентів обіраного вороху наведені в табл. 2.5.5.

Таблиця 2.5.5

Статистичні моделі біометричних параметрів компонентів обіраного вороху зернових

№	Найменування геометричного параметра	Од. ви м.	Статистична модель	Значення критерію $\chi^2$	
				розрахункове	табличне
1	2	3	4	5	6
1	Товщина зернівки	мм	$f(h_i) = 1,43 \times e^{-\frac{(2,33-h_i)^2}{0,16}}$	0,915	1,145
2	Ширина зернівки	мм	$f(a_3) = 1,4 \times e^{-\frac{(2,78-a_3)^2}{0,163}}$	1,144	1,145
3	Довжина зернівки	мм	$f(l_3) = 0,7 \times e^{-\frac{(6,7-l_3)^2}{0,65}}$	0,21	1,145
4	Довжина соломини	мм	$f(l_c) = 0,0047 \times e^{-\frac{(254-l_c)^2}{14450}}$	0,022	1,145

Продовження табл. 2.5.2

1	2	3	4	5	6
5	Діаметр соломини	ММ	$f(d_c) = 0,91 \times e^{-\frac{(2,8-d_c)^2}{0,39}}$	0,439	1,145
6	Довжина обірваного колоска	ММ	$f(l_k) = 0,014 \times e^{-\frac{(88,9-l_k)^2}{1624,5}}$	0,07	1,145
7	Діаметр обірваного колоска	ММ	$f(d_k) = 0,26 \times e^{-\frac{(7,72-d_k)^2}{0,21}}$	0,21	1,145

Наведені в табл. 2.5.5 дані свідчать про те, що всі отримані моделі адекватні, а біометричні параметри компонентів обчисаного вороху зернових підкоряються нормальному закону розподілу випадкових величин.

## РОЗДІЛ VI. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ ПРИСТРОЮ ДЛЯ ЗРІЗУВАННЯ ОБЧІСЕНИХ СТЕБЕЛ

### 2.6.1. Основні положення та припущення

На вибір і обґрунтування параметрів пристрою для зрізання стебел сільськогосподарських культур певною мірою впливають пружно в'язкі властивості останніх. Пояснюється це наступним. У міру підвищення швидкості робочого руху рослини все сильніше відхиляються робочими органами пристрою. Якщо пружні властивості стебел виявляться при цьому незначними, то вони зламуються при відгині.

При великих пружних переміщеннях форма лінія вигину стебла залежить від його жорсткості і в принципі може значно відрізнятись від прямолінійної.

У польових умовах експериментально встановлено [69...72], що при прикладанні сили в процесі відгину різних одиночних стебел на висоті  $h$  менш 100...150 мм кожен з них залишається прямолінійним аж до зламу. При  $h$  більше 150 мм стебло практично прямолінійне до моменту, поки кут між дотичній, проведеної до зігнутого стебла в точці прикладання сили, і вертикаллю - менш 25...40°. Тут же зазначається, що аналогічна картина спостерігається і при відгині групи стебел (3-5).

Розглянутий нами процес передбачає зрізання стебел, попередньо нахилених як обчисуючим апаратом зернозбирального комбайна, так і шнековим пристроєм, що зрізує. Передбачається, що максимальний кут нахилу стебел не перевищуватиме при цьому 10°.

На підставі вищевикладеного приймаємо цілком правомірне припущення про те, що в процесі визначення конструктивних і кінематичних параметрів різального пристрою стебло розглядається у вигляді жорстко закріпленого пружного стрижня, що зберігає

прямолинійну форму в межах його технологічних відхилень від вертикального положення.

У досліджуваному пристрої шнек виконує практично всі функції мотовила валкових жаток [73]: відділення порції стебел, підведення їх до ріжучого апарату, зрізання, укладання та подальше транспортування.

Агротехнічні вимоги до останньої функції даного пристрою такі ж, як і у шнеків жниварок самохідних Т-образних зернозбиральних комбайнів. Відомо [70], що якість переміщення зрізаних рослин в напрямку до вивантажувального вікна залежить:

- від величини зазору ( $c$ ) між днищем пристрою і спіраллю шнека;

- від кута нахилу спіралі шнека ( $\alpha$ ).

Значення цих параметрів ( $c = 10...15$  мм і  $\alpha = 15...20^\circ$ ), які широко застосовуються на практиці, забезпечують високу експлуатаційну надійність роботи шнеків в різних польових умовах [91].

*Виходячи з цього, приймаємо, що кут нахилу лівої і правої спіралей шнека різального пристрою спочатку задається в межах, прийнятих для серійних жаток зернозбиральних комбайнів.*

В процесі зрізання рослин витки шнека, строго кажучи, розподіляють стебла по довжині протиріжучої пластини нерівномірно. Особливо це залежить від таких характеристик стеблостою, як полеглість і сплутаність.

При збиранні зернових культур методом обчісування на корені дані агротехнічні показники, з цілком зрозумілих причин, суттєво покращуються. Це дає підставу припустити, що згадана вище нерівномірність при зрізанні стебел даним пристроєм не є значною. Оскільки теоретично описати дійсну картину того, що відбувається в зоні різання, не представляється можливим – *на першому етапі досліджень доцільно прийняти рівномірний характер розподілу стебел по довжині леза протиріжучої пластини.*

Таке припущення, незначно спотворюючи реальний стан справ, дозволить істотно спростити виведення теоретичних передумов для обґрунтування відповідних кінематичних і конструктивних параметрів розглянутого різального пристрою.

## 2.6.2. Теоретичні основи розрахунку конструктивних і кінематичних параметрів різального пристрою

### 2.6.2.1. Обґрунтування критерію оцінки якості роботи пристрою

Коли машина, яка обладнана різальним пристроєм, що розглядається, рухається з поступальною швидкістю  $V_M$ , то за час  $t$  її ріжучий апарат проходить шлях ( $L_M$ ), що дорівнює:

$$L_M = V_M \cdot t. \quad (2.6.1)$$

На цьому шляху стебло, вже попередньо відхилене обчислюючим апаратом на величину кута  $\alpha_0$  (рис.2.6.1), під впливом горизонтальної поздовжньої ( $P_{\Gamma}$ ) і поперечної ( $P_{\Pi}$ ) складових сили  $P$ , що діє з боку леза протиріжучої пластини  $DD^1$ , відхиляється далі як в поздовжньому, так і в поперечному напрямках.

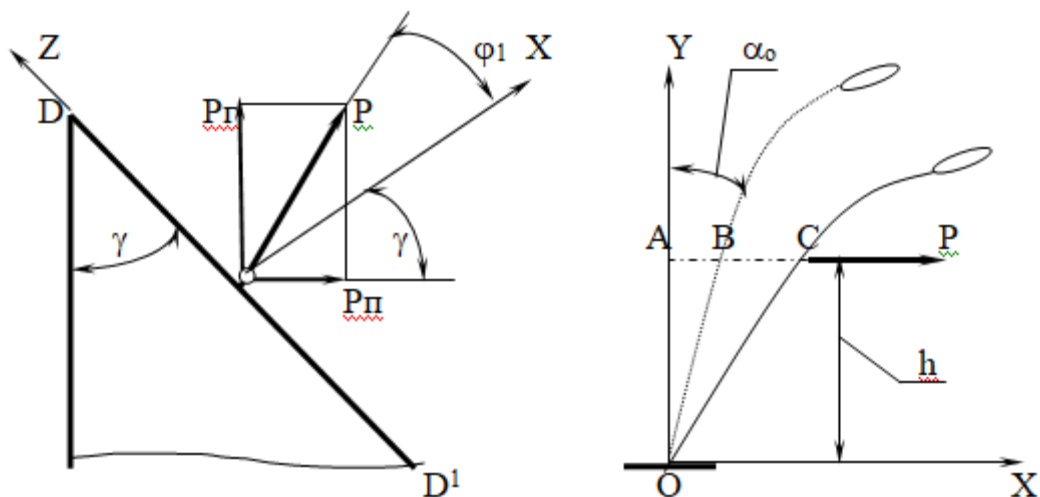


Рис.2.6.1. Схема сил, діючих на стебло в процесі його зрізання

Якби зріз стебел проводився без зазначеного відхилення, то висота стерні ( $l = OB$ ) була б рівною:

$$l = OB = \frac{h}{\cos \alpha_0}.$$

Відхилення стебел пристроєм, щорозглядаються одночасно в поздовжньому і поперечному напрямках, неминуче призведе до збільшення висоти стерні на певну величину  $\Delta$ , тобто

$$l = OC = \frac{h}{\cos \alpha_0} + \Delta. \quad (2.6.2)$$

З трикутника OAC (рис. 2.6.1) випливає, що

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 \quad (2.6.3)$$

У свою чергу, відрізок AC можна виразити через відрізки AB і BC. Перший з них являє собою попереднє відхилення стебла на рівні розташування протиріжучих пластин даного зрізуючого пристрою, отримане в результаті впливу на нього (стебло) обчислюючого апарату. З трикутника OAB слід, що

$$AB = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$$

Але, так як відрізок OA дорівнює висоті установки ріжучого апарату даного зрізуючого пристрою  $h$ , то

$$AB = h \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (2.6.4)$$

Відрізок BC – це відхилення стебла в процесі його зрізання. Оскільки воно відбувається в напрямку сили  $P$ , відхиленою від нормалі до леза протиріжучої пластини на кут  $\varphi_1$  (рис.2.6.1), то, з урахуванням (2.6.1)

$$BC = \frac{V_M \cdot t}{\cos[90 - (\gamma + \varphi_1)]} = \frac{V_M \cdot t}{\sin(\gamma + \varphi_1)}, \quad (2.6.5)$$

де  $\gamma$  – кут розхилу протиріжучої пластини зрізуючого пристрою;

$\varphi_1$  – кут тертя стебла по лезу протиріжучої пластини.

Відрізок AC є проекцією на горизонтальну площину довжини решти стебла (стерні) після його зрізування. Значення AC, як впливає з рис.2.6.2, можна визначити, використовуючи теорему косинусів [74]:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(90 + \gamma + \varphi_1) = \\ &= AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\gamma + \varphi_1). \end{aligned}$$

З урахуванням (2.6.4) і (2.6.5) маємо:

$$AC^2 = (h \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2 + \left[ \frac{V_M \cdot t}{\sin(\gamma + \varphi_1)} \right]^2 + 2 \cdot h \cdot V_M \cdot t \cdot \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (2.6.6)$$

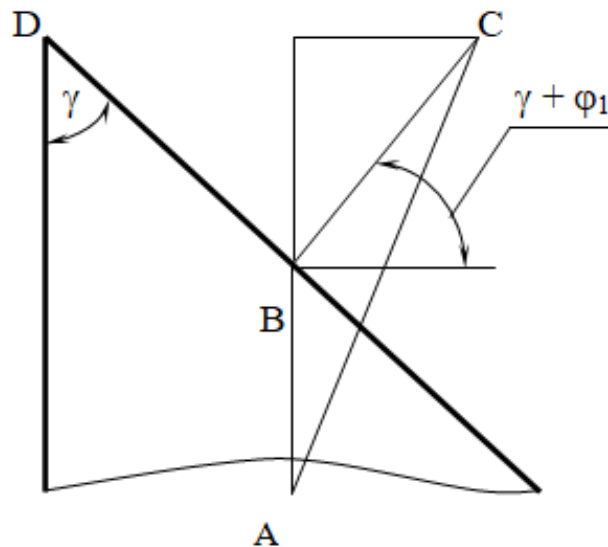


Рис.2.6.2. Схема стосовно визначення довжини відрізка AC

Підставивши значення  $AC^2$  з (2.6.6) в (2.6.3) і беручи до уваги (2.6.2), остаточно отримаємо:

$$\Delta^2 + \frac{2 \cdot \Delta \cdot h}{\cos \alpha_0} = \left[ \frac{V_M \cdot t}{\sin(\gamma + \varphi_1)} \right]^2 + 2 \cdot h \cdot V_M \cdot t \cdot \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (2.6.7)$$

Шлях, що проходить точка витка шнека (а разом з нею і зрізані стебла) в осьовому напрямку за один його оберт, дорівнює кроку (S) останнього, який визначається з рівняння:



$$S = V_{\text{в}} \cdot t, \quad (2.6.8)$$

де  $V_{\text{в}}$  – швидкість руху точки витка шнека зрізуючого пристрою в осьовому напрямку.

Вирішуючи спільно рівняння (2.6.7) і (2.6.8) щодо часу руху машини  $t$ , отримаємо:

$$\Delta^2 + \frac{2 \cdot \Delta \cdot h}{\cos \alpha_o} = \left[ \frac{S \cdot V_M}{V_{\text{в}} \cdot \sin(\gamma + \varphi_1)} \right]^2 + 2 \cdot h \cdot V_M \cdot \operatorname{tg} \alpha_o \cdot S / V_{\text{в}}. \quad (2.6.9)$$

З теорії шнекових пристроїв відомо [75], що

$$V_{\text{в}} = V_r \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.6.10)$$

де  $V_r$  – колова швидкість витка шнека;

$\alpha$  – кут нахилу витка шнека різального пристрою.

Швидкість  $V_r$  і кут  $\alpha$  можуть бути виражені через кутову частоту обертання шнека  $\omega$ , його зовнішній діаметр  $d_3$  і крок витка  $S$  наступним чином [75]:

$$V_r = \frac{\omega \cdot d_H}{2}; \quad (2.6.11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{\pi \cdot d_H}. \quad (2.6.12)$$

Після підстановки (2.6.11) і (2.6.12) в (2.6.10) отримаємо:

$$V_{\text{в}} = \frac{\omega \cdot S}{2 \cdot \pi}. \quad (2.6.13)$$

Визначивши швидкість руху точки витка шнека зрізуючого пристрою в осьовому напрямку і підставивши його в вираз (2.6.9), після відповідних перетворень маємо:

$$\Delta^2 + C_1 \cdot \Delta - C_0 = 0, \quad (2.6.14)$$

де  $C_1 = 2 \cdot h / \cos \alpha_o$ ;

$$C_0 = \left[ \frac{2 \cdot \pi \cdot V_M}{\omega \cdot \sin(\gamma + \varphi_1)} \right]^2 + 4 \cdot \pi \cdot h \cdot V_M \cdot \operatorname{tg} \alpha_o / \omega$$

Рішення квадратного рівняння (2.6.14) має вигляд:

$$\Delta = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4 \cdot C_o}}{2}. \quad (2.6.15)$$

У чисельнику у виразу (2.6.15) прийнята сума доданків, оскільки від'ємне значення величини  $\Delta$  не має фізичного сенсу.

Заздалегідь прийняте додатне її значення в сумі з величиною  $h/\cos\alpha_0$ , як уже зазначалося вище, є тією межею, яка не повинна перевищувати висоти стерні ( $l_d$ ) в умовах практичної експлуатації даного шнекового зрізуючого пристрою.

Виконання умови  $l_d \leq l = h/\cos\alpha_0 + \Delta$  (при прийнятих значеннях  $h$ ,  $\alpha_0$  і  $\Delta$ ) можливо шляхом відповідного підбору як поступальної швидкості руху пристрою  $V_m$ , так і кутовий швидкості обертання шнека  $\omega$ .

### 2.6.2.2. Вибір частоти обертання шнека

Значення цього параметра можна визначити з виразу (2.6.14), перетворивши його щодо  $\omega$ :

$$D_2 \cdot \omega^2 - D_1 \cdot \omega - D_0 = 0, \quad (2.6.16)$$

$$\text{де } D_2 = \frac{\Delta^2 + 2 \cdot h \cdot \Delta}{\sin \alpha_0};$$

$$D_1 = 4 \cdot \pi \cdot h \cdot V_m \cdot \text{tg} \alpha_0;$$

$$D_0 = [2 \cdot \pi \cdot V_m / \sin(\gamma + \varphi_1)]^2.$$

Рішення рівняння (2.6.14) має вигляд:

$$\omega = \frac{D_1 \pm \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 D_0}}{2 \cdot D_2}. \quad (2.6.17)$$

Оскільки підкореневий вираз у формулі (2.6.17) за величиною більше коефіцієнта  $D_1$ , а від'ємне значення частоти обертання шнека  $\omega$  не має фізичного сенсу, то остаточно маємо:

$$\omega = \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 D_0}}{2 \cdot D_2}. \quad (2.6.18)$$

Враховуючи при цьому, що

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (2.6.18')$$

необхідне число обертів шнека розглянутого пристрою може бути визначено з виразу:

$$n = \frac{15 \cdot (D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 D_0})}{\pi \cdot D_2}. \quad (2.6.19)$$

При заданих значеннях висоти  $h$  і допуску  $\Delta$  на висоту зрізу попередньо нахилених на кут  $\alpha_0$  стебел, рівняння (2.16 - 2.19) являють собою залежності кутової швидкості і частоти обертання шнека зрізуючого пристрою від робочої швидкості руху агрегату  $V_m$  і кута розхилу  $\gamma$  протиріжучих пластин. В результаті, задавши значення  $\gamma$  і встановивши діапазон експлуатаційних значень  $V_m$ , легко визначити оптимальний інтервал значень кінематичних параметрів  $\omega$  і  $n$ .

### **2.6.2.3. Визначення конструктивних параметрів різального пристрою**

#### **2.6.2.3.1. Розрахунок зовнішнього і внутрішнього діаметрів шнека**

У параграфі 2.6.1 зазначалося, що шнек даного різального пристрою своїми витками здійснює підведення стебел до ріжучої кромки протиріжучої пластини. У валкових жаток, як відомо [96], підведення стебел до ріжучого апарату здійснюється за умови  $V_r > V_m$ . Стосовно до нашого випадку це (за аналогією) означає, що коефіцієнт кінематичного режиму  $\lambda$ , що є відношенням кружної швидкості витка шнека  $V_r$  до швидкості руху машини  $V_m$ , повинен бути більше одиниці:

$$\lambda = \frac{V_r}{V_m} > 1. \quad (2.6.20)$$

З урахуванням залежності (2.6.11) вираз (2.6.20) можна представити у вигляді:

$$\lambda = \frac{\omega \cdot d_H}{2 \cdot V_M}. \quad (2.6.21)$$

Беручи до уваги вираз (2.18), з формули (2.21) знаходимо, що зовнішній діаметр шнека різального пристрою повинен вибиратися, виходячи з наступної умови:

$$d_H = \frac{4 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}. \quad (2.6.22)$$

Внутрішній діаметр труби шнека даного пристрою визначають з такою умовою, щоб на неї не намотувалися стебла зрізаних рослин і тих, що транспортуються [91]:

$$d_B > \frac{L + \delta}{\pi}, \quad (2.6.23)$$

де  $L$  – середня довжина зрізаного стебла;

$\delta$  – відстань на трубі шнека між основою стебла і його вершиною (обчісаних колосом). Завдяки наявності саме цієї відстані і виключається намотування стебел на трубу шнека.

Висота витка ( $h_B$ ) шнека зрізуючого пристрою визначається з наступного виразу:

$$h_B = \frac{d_H - d_B}{2}. \quad (2.6.24)$$

Після підстановки в (2.6.24) значень зовнішнього (2.6.22), а також внутрішнього (2.6.23) діаметрів шнека і відповідних перетворень отримаємо:

$$h_B = 2 \cdot \left[ \frac{4 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} - \frac{L + \delta}{\pi} \right]. \quad (2.6.25)$$

Аналіз виразів (2.6.22) і (2.6.23) показує, що якщо внутрішній діаметр шнека залежить від характеристик стеблостою, то зовнішній визначається як кінематичними параметрами пристрою, так і режимом його роботи.

### 2.6.2.3. Розрахунок кроку витка шнека різального пристрою

У жатках зернозбиральних комбайнів застосовуються однозахідні гвинтові шнеки. Крок намотування спіралі, як правило, постійний. З метою більш рівномірного розподілу матеріалу по ширині жнивarki іноді приймають змінний крок витків шнека [76].

В даному різальному пристрої використовуємо шнек з однозахідною навивкою і постійним її кроком. За аналогією з гвинтовою лінією цей параметр може бути визначений з відомого вислову [75]:

$$S = \pi \cdot d_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

При розрахунку шнекових транспортних пристроїв перед конструкторами досить часто стоїть задача вибору оптимального відношення кроку шнека до зовнішнього діаметра його витків (в даному випадку  $S/d_3$ ) [99]. В існуючій довідковій літературі немає конкретних рекомендацій щодо вибору зазначених параметрів. Багато джерел дають різні рекомендації, які коливаються в досить широких межах.

Стосовно до нашого випадку зовнішній діаметр шнека, як впливає з виразу (2.6.22), сам залежить від кінематичних параметрів різального пристрою. У зв'язку з цим отримане вище рівняння доцільніше представити в дещо іншому вигляді.

В силу викладених в п. 2.6.1 припущень, кут нахилу витка шнека ( $\alpha$ ) може бути визначений наперед. Зовнішній діаметр останнього ( $d_3$ ) визначається з формули (2.6.22). З урахуванням цього вираз для визначення шуканого конструктивного параметра має вигляд:

$$S = \frac{4 \cdot \pi \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} \cdot \operatorname{tg} \alpha . \quad (2.6.26)$$

#### 2.6.2.4. Визначення кута розхилу леза протиріжучої пластини різального пристрою

Для того, щоб зрізати стебло круглого перетину, який стоїть вертикально, необхідно забезпечити його защемлення між лезом протиріжучої пластини 1 і витком шнека 2 (рис. 2.6.3).

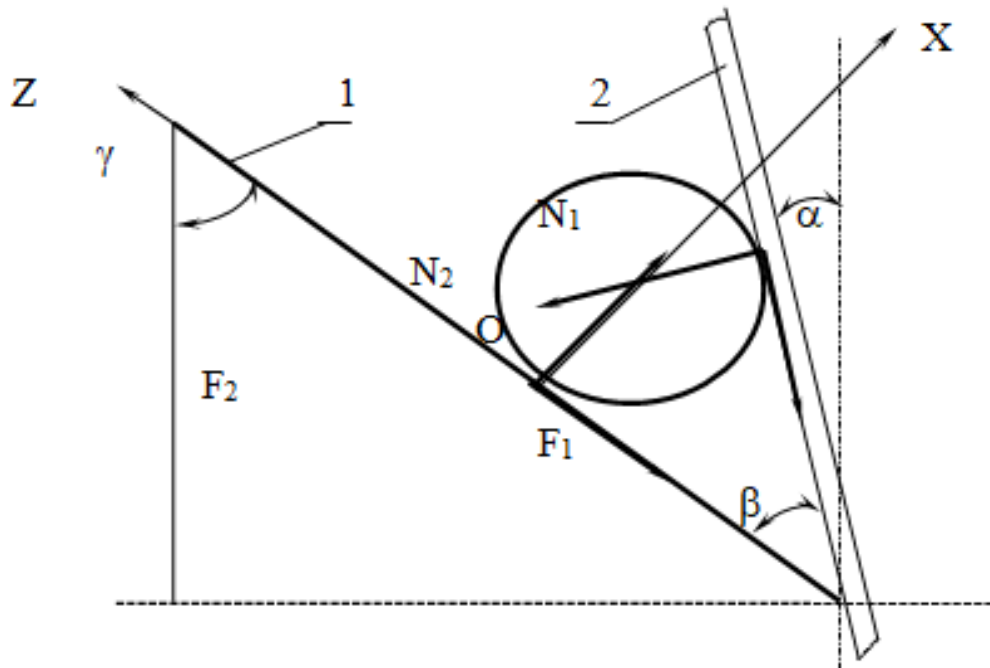


Рис. 2.6.3. Схема сил, що діють на стебло при його зрізанні

На стебло в розхилі двох лез діють сили:

- $N_1$  і  $N_2$  – нормальні реакції з боку протиріжучої пластини і витка шнека;
- $F_1$   $F_2$  – сили тертя, спрямовані в сторони, зворотні можливому вислизанню стебла. Граничне значення цих сил дорівнює [73]:

$$F_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot N_1; \quad F_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot N_2, \quad (2.6.27)$$

де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – кути тертя стебла об протиріжучу пластину і виток шнека відповідно.

Щоб забезпечити надійність защемлення стебла, необхідно виконати статичні умови його рівноваги у вертикальній площині. Так як стебло закріплено в ґрунті і, отже, кочення його по крайках ріжучих елементів утруднено, то для вирішення поставленої задачі досить розглянути тільки суму проєкцій всіх сил на осі OZ і OX:

$$\begin{aligned}\sum R_z &= -F_1 - F_2 \cdot \cos\beta + N_2 \cdot \sin\beta = 0; \\ \sum R_x &= N_1 - N_2 \cdot \cos\beta - F_2 \cdot \sin\beta = 0,\end{aligned}\quad (2.6.28)$$

де  $\beta$  – кут між витком шнека і протиріжучою пластиною.

Переписавши систему рівнянь (2.6.28) з урахуванням (2.6.27), після перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}N_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + N_2 \cdot (\operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \cos\beta - \sin\beta) &= 0; \\ N_1 - N_2 \cdot (\operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \sin\beta + \cos\beta) &= 0\end{aligned}\quad (2.6.29)$$

Визначивши з другого рівняння системи (2.6.29) силу  $N_1$  і підставивши її в перше, будемо мати:

$$N_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot (\operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \sin\beta + \cos\beta) + N_2 \cdot (\operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \cos\beta - \sin\beta) = 0 \quad (2.6.30)$$

Розділивши всі члени рівняння (2.6.30) на вираз  $N_2 \cdot \cos\beta$ , після відповідних перетворень отримаємо:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} \quad (2.6.31)$$

З рисунка 2.6.3 знаходимо, що кут защемлення стебла

$$\beta = \gamma - \alpha.$$

Підставивши значення кута  $\beta$  в формулу (2.6.31), отримаємо рівняння для визначення кута розхилу леза протиріжучої пластини у вигляді:

$$\gamma = \operatorname{arctg} K_T + \alpha, \quad (2.6.32)$$

$$\text{де } K_T = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}{1 - \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

У разі, коли кромки протиріжучої пластини і витка шнека однаково гладкі або виконані з насічкою (тобто  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ), коефіцієнт  $K_T$  розраховується за такою формулою:

$$K_T = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}2\varphi.$$

### 2.6.2.5. Розрахунок довжини протирізальної пластини

Протиріжучі пластини встановлюються в різальному пристрої таким чином, щоб початок леза кожної (т. А, рис. 2.6.4) розташовувався на лінії (ОО<sub>1</sub>, рис. 2.6.6), що знаходиться у вертикальній площині симетрії шнека.

Вершина леза пластини (т. С, рис. 2.6.4) в поздовжньо-вертикальній площині проєкцій не повинна виступати при цьому за внутрішній діаметр витків шнека. Звідси однозначно випливає, що довжина протирізальної пластини АС розглянутого різального пристрою повинна бути такою, щоб її горизонтальна проєкція в поздовжньо-вертикальній площині ( $l_c = BC$ , рис. 2.6.4) не перевищувала б значення радіуса внутрішньої труби шнека ( $r_B$ ).

В іншому випадку маємо, принаймні, два негативних моменти. Перший пов'язаний з тим, що всякий винос протирізальної пластини вперед можливий шляхом її переміщення в напрямку збільшення кута  $\psi$  по радіусу, що дорівнює такій сумі:

$$r_{\Pi} = r_H + c. \quad (2.6.33)$$

У формулі (2.33) величина  $c$  являє собою зазор між витком шнека і протирізальною пластиною.

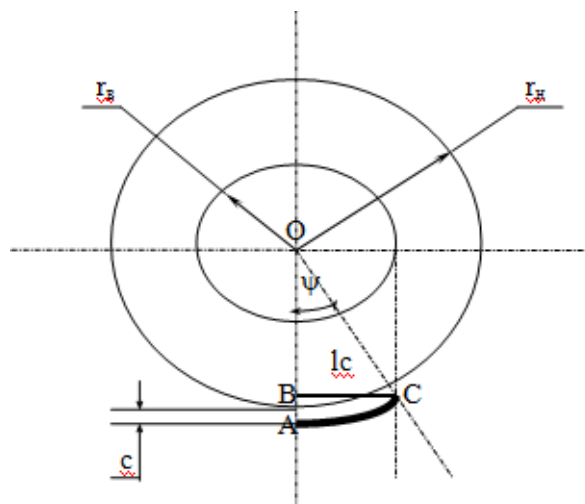


Рис. 2.6.4. Розташування протирізальної пластини по відношенню до шнеку

Рисунок 2.6.4 показує, що переміщення протирізальної пластини з положення АС (варіант 1) в положення А<sub>1</sub>С<sub>1</sub> (варіант 2),



що відбувається за рахунок вищезазначеного збільшення кута  $\psi$ , призводить до неминучого зростання нерівномірності зрізу рослин.

Пояснюється це тим, що якщо в першому варіанті різниця між висотою зрізання стебел в точках А і С дорівнює  $\Delta h$ , то в другому вона дорівнює  $\Delta h_1$ . При цьому, у міру збільшення кута  $\psi$ , різниця між цими величинами поступово зростає на користь останньої, тобто  $\Delta h > \Delta h_1$ .

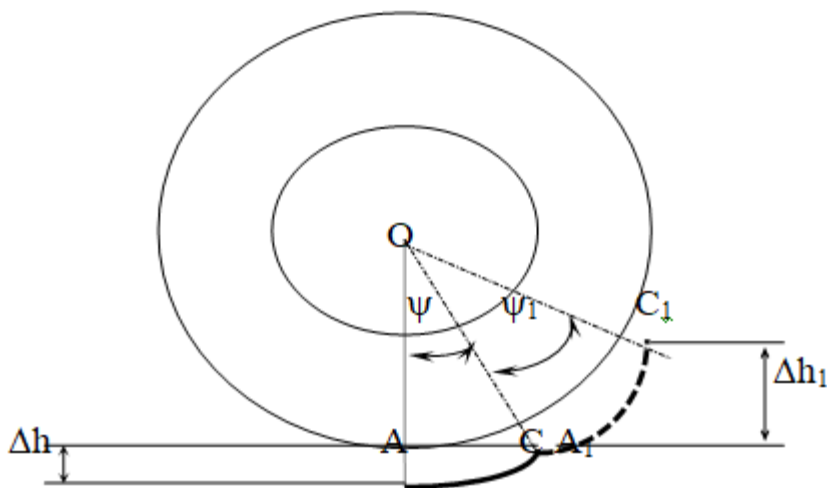


Рис. 2.6.5. Розміщення протирізальної пластини щодо шнека

При певному значенні кута  $\psi$  величина  $\Delta h$  може дорівнювати або навіть більше розглянутого в параграфі 2.6.2.1 допуску  $\Delta$  на збільшення висоти зрізання рослин понад заданої.

Другий негативний момент пов'язаний з різним розташуванням по висоті протиріжучих пластин і внутрішнього діаметра шнека. За один оборот останнього на довжині кроку  $S$  послідовно зрізуються рослини, розташовані в  $n_c$  трикутниках типу ABC (рис. 2.6.6).

Виходячи з наведених вище міркувань приймаємо:

$$l_c \leq r_B \quad \text{або} \quad l_c < d_B/2.$$

З урахуванням (2.6.23) дана умова буде мати наступний вигляд:

$$l_c \leq \frac{d_B}{2} = \frac{L+\delta}{2\cdot\pi}. \quad (2.6.34)$$

Довжина протирізальної пластини, як дуга сектора OAC (див. рис. 2.6.4), може бути визначена з відомого вислову:

$$l_{AC} = r_{\Pi} \cdot \psi. \quad (2.6.35)$$

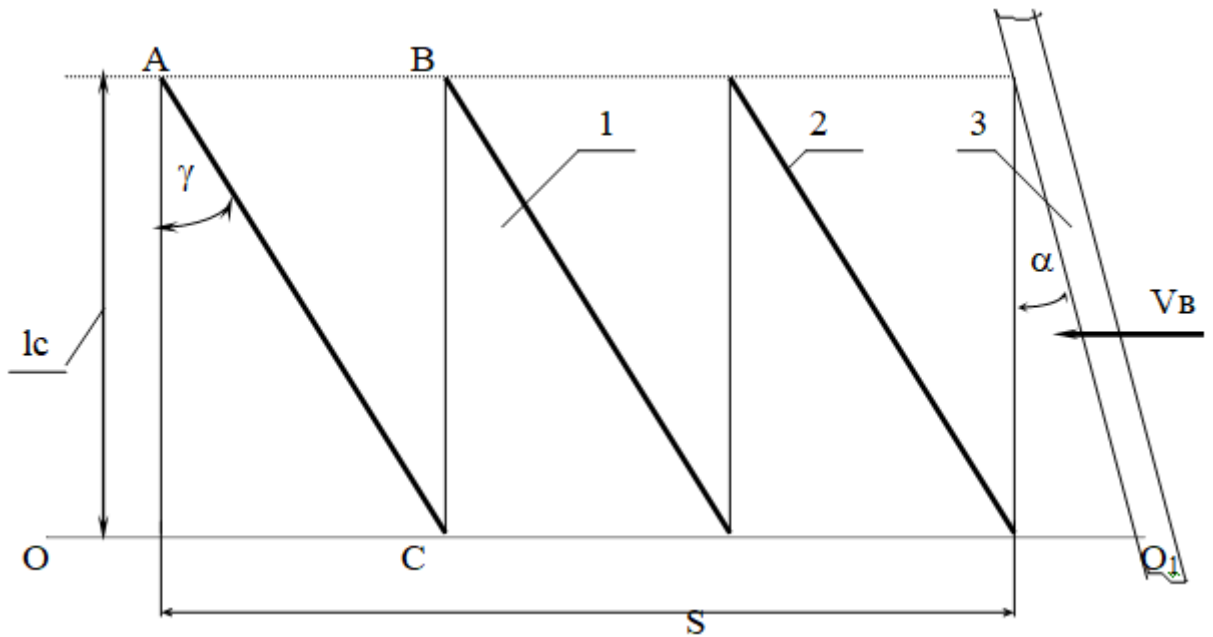


Рис. 2.6.6. Схема ріжучого (різального) апарата:

1 – протирізальна пластина; 2 – лезо пластини; 3 – виток шнека

Висловимо кут виносу ріжучої кромки ( $\psi$ ) через її проекцію на горизонтальну площину ( $l_c$ ). З рис. 2.4 випливає, що

$$\sin \psi = \frac{l_c}{r_{\Pi}} \text{ звідки } \psi = \arcsin \frac{l_c}{r_{\Pi}}.$$

Розглянемо окремо аргумент отриманої функції. Беручи, що  $l_c = r_B$ ,  $r_{\Pi} = r_H + c$ , можна записати:

$$\frac{l_c}{r_{\Pi}} = \frac{r_B}{r_H + c}. \quad (2.6.36)$$

Розділивши чисельник і знаменник виразу (2.6.36) на зовнішній радіус шнека  $r_3$ , отримаємо:

$$\frac{l_c}{r_{\Pi}} = \frac{k}{1+c}, \quad (2.6.37)$$

де  $k$  – відношення внутрішнього радіуса шнека різального пристрою до зовнішнього, тобто

$$k = r_B/r_3.$$

В даному пристрої зазор  $c$  є, по суті справи, відстанню між витком шнека і протирізальними пластинами. У порівнянні з невеликим (10...15 мм) зазором між шнеком і днищем жатки зернозбирального комбайна значення параметра  $c$  ще менше.

Якщо це так, то відношенням величин  $(c/r_3)$  у натуральному виразі (2.6.37) з достатньою для практики точністю можна знехтувати. В результаті отримуємо:

$$\frac{l_c}{r_{\Pi}} = k. \quad (2.6.38)$$

Оскільки  $k = r_B/r_3 = d_B/d_{\text{нз}}$ , то з урахуванням залежностей (2.6.22) і (2.23) отримаємо вираз, що дозволяє визначити кут виносу носків протиріжучих пластин розглянутого різального пристрою:

$$\psi = \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \cdot \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right]. \quad (2.6.38')$$

Добуток значення цього кута на радіус  $r_{\Pi}$  дозволяє, як впливає з формули (2.6.35), отримати залежність довжини леза протиріжучої пластини від конструктивних і кінематичних параметрів шнекового пристрою:

$$l_{AC} = \left[ \frac{2 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} + c \right] \times \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \cdot \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right] \quad (2.6.39)$$

Як впливає з рис. 2.6.6, на довжині кроку витка шнека  $S$  встановлюється декілька ( $n_c$ ) протиріжучих пластин. Оскільки ширина кожної з них (АВ, рис. 2.6.6) дорівнює:

$$AB = l_c \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

то тоді

$$n_c = \frac{S}{AB} = \frac{S}{l_c \cdot \tan \gamma}. \quad (2.6.40)$$

Визначимо величину  $\text{tg}\gamma$ . З виразу (2.6.32) випливає, що

$$\text{tg}(\gamma - \alpha) = K_T,$$

звідки

$$\tan \gamma = \frac{K_T + \tan \alpha}{1 - K_T \cdot \tan \alpha}. \quad (2.6.41)$$

Згідно формули (2.6.26), тангенс кута нахилу витка шнека можна представити таким чином:

$$\text{tg}\alpha = \frac{S \cdot \left( D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0} \right)}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M \cdot D_2}. \quad (2.6.42)$$

З урахуванням (2.6.42) вираз (2.6.41) набуде вигляду:

$$\text{tg}\gamma = \frac{4 \cdot K_T \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M \cdot D_2 + S \cdot \left( D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0} \right)}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M \cdot D_2 - K_T \cdot S \cdot \left( D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0} \right)}. \quad (2.6.43)$$

Якщо тепер в формулу (2.6.40) підставити значення  $l_c$  з (2.6.34) і  $\text{tg}\gamma$  з (2.6.43), то після перетворень остаточно отримаємо:

$$n_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot S}{(L + \delta)} \cdot \left[ \frac{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M \cdot D_2 - K_T \cdot S \cdot \left( D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0} \right)}{4 \cdot K_T \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M \cdot D_2 + S \cdot \left( D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0} \right)} \right] \quad (2.6.44)$$

Оскільки ріжучий апарат даного різального пристрою не містить елементів, що здійснюють зворотно-поступальний рух, то він позбавлений тих недоліків, які притаманні різальним апаратам серійних жаток зернозбиральних комбайнів (перебіг або недобіг ножа і т.д.). У зв'язку з цим величина  $n_c$ , строго кажучи, може бути і не цілим числом. Недоріз стебел в цьому випадку може бути виключений за рахунок установки лівого і правого витоків шнека з перекриттям в центральній частині різального пристрою.

Однак слід зазначити, що згадане вище перекриття не може бути більшим, а тому для гарантованого виключення недорізівстебел в зоні стику лівого і правого витоків шнека величина  $n_c$ , що

розраховується за формулою (2.6.44), повинна бути цілим числом або досить близьким до нього.

Домогтися цього можна шляхом допустимої зміни кута нахилу витка шнека ( $\alpha$ ). Алгоритм такого рішення викладено в п.2.3 цього розділу.

### 2.6.2.6. Визначення діапазону допустимих значень показника кінематичного режиму роботи шнекового різального пристрою

Аргумент функції (2.6.38'), як відомо, не може бути більшим одиниці, тобто

$$\left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \cdot \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right] \leq 1. \quad (2.6.38'')$$

Звідси однозначно випливає, що мінімальне значення показника кінематичного режиму роботи гвинтового ножа  $\lambda_{\min}$  дорівнює:

$$\lambda_{\min} = \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot V_M} \cdot \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right].$$

Цілком очевидно, що величина  $\lambda_{\min}$  буде змінюватися в залежності від прийнятого значення оціночного критерію  $\Delta$ . Характер цієї зміни явно обернено пропорційний, оскільки в міру збільшення  $\Delta$ , а значить, як випливає з (2.6.16), і коефіцієнта  $D_2$ , темп зростання знаменника отриманого виразу випереджає темп зростання його чисельника.

Логічно поставити запитання, а чи існує якесь мінімально допустиме значення оціночного критерію  $\Delta$ . Для вирішення цієї задачі знову звернемося до виразу (2.6.38''), прирівнявши його чисельник і знаменник

$$(L + \delta) \cdot (D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}) = 4 \cdot \pi \cdot V_M \cdot D_2 \cdot \lambda.$$

Позбувшись від радикала, після відповідних перетворень отримаємо формулу для визначення коефіцієнта  $D_2$ :

$$D_2 = \frac{(L+\delta)^2 - 2 \cdot \lambda \cdot h \cdot (L+\delta) \cdot \operatorname{tg} \alpha_o \cdot \sin^2(\gamma + \varphi_1)}{\lambda^2}.$$

З урахуванням цієї залежності, вихідне вираз (2.6.16) можна переписати в наступному вигляді:

$$\Delta^2 + K_1 \cdot \Delta - K_0 = 0,$$

де  $K_1 = 2 \cdot h / \cos \alpha_o$ ;

$$K_0 = D_2 = \frac{(L+\delta)^2 - 2 \cdot \lambda \cdot h \cdot (L+\delta) \cdot \operatorname{tg} \alpha_o \cdot \sin^2(\gamma + \varphi_1)}{\lambda^2}.$$

Неважко помітити, що рішенням даного квадратного рівняння є не що інше, як мінімально допустиме значення оціночного критерію  $\Delta$ :

$$\Delta_{\min} = -\frac{K_1}{2} + \sqrt{\frac{K_1^2}{4} + K_0}.$$

Як і в попередніх випадках, фізичний зміст для нас має лише додатне значення  $\Delta$ , а воно можливе тільки при додатному значенні другого доданка (виразу під коренем).

Так як справжня висота зрізу стебел шнековим ножом завжди буде відрізняться від настановної, то значення  $\Delta_{\min}$  не може дорівнювати нулю. Можливо це, як впливає з отриманого рівняння, тільки за умови, якщо коефіцієнт  $K_0 > 0$ . А останнє може мати місце в тому випадку, коли

$$(L+\delta)^2 > 2 \cdot \lambda \cdot h \cdot (L+\delta) \cdot \operatorname{tg} \alpha_o \cdot \sin^2(\gamma + \varphi_1)$$

або

$$L + \delta > 2 \cdot \lambda \cdot h \cdot \operatorname{tg} \alpha_o \cdot \sin^2(\gamma + \varphi_1).$$

З отриманого виразу легко визначити максимальне значення кінематичного режиму роботи шнекового різального пристрою  $\lambda_{\max}$  при мінімально допустимому значенні оціночного параметра  $\Delta$ :

$$\lambda_{\max} = \frac{L + \delta}{2 \cdot h \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \sin^2(\gamma + \varphi_1)}$$

### 2.6.2.7. Визначення потужності, необхідної для зрізування стебел

У ході виконання технологічного процесу стебло буде зрізано тільки тоді, коли діюча сила  $P$  буде не менше сили  $R$ , необхідної для його перерізування [73], тобто

$$P \geq R.$$

Для розглянутого випадку, що представляє собою зрізування стебла з однією опорою (рис.2.6.7), маємо:

$$R = P_{\text{зг}} + P_j, \quad (2.6.45)$$

де  $P_{\text{зг}}$  – опір стебла згину;

$P_j$  – сила інерції стебла.

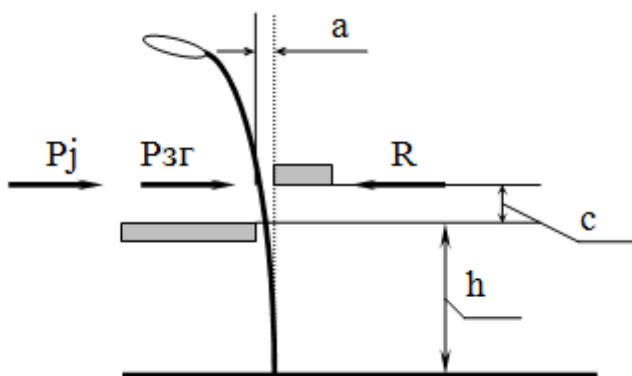


Рис. 2.6.7. Схема сил, що діють на стебло в процесі його перерізування

Згідно [73], сила опору стебла згину може бути визначена з виразу:

$$P_{\text{зг}} = \frac{12 \cdot a \cdot EJ}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)}, \quad (2.6.46)$$

де  $a$  – відхилення стебла за час удару  $\Delta t$  по ньому витка шнека різального пристрою;

$EJ$  – приведена жорсткість стебла.

Сила інерції стебла визначається з виразу:

$$P_j = \frac{m \cdot V_B}{\Delta t}, \quad (2.6.47)$$

де  $m$  – маса стебла.

Після підстановки (2.46) і (2.47) в (2.45), отримаємо:

$$R = \frac{12 \cdot a \cdot EJ}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)} + \frac{m \cdot V_B}{\Delta t}.$$

Враховуючи, що

$$a = V_B \cdot \Delta t,$$

будемо мати:

$$R = \frac{12 \cdot V_B \cdot \Delta t \cdot EJ}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)} + \frac{m \cdot V_B}{\Delta t}. \quad (2.6.48)$$

Помноживши чисельник і знаменник другого доданка виразу (2.48) на величину  $V_B$ , і враховуючи, що  $V_B \cdot t = S$ , отримаємо:

$$R = \frac{12 \cdot EJ \cdot S}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)} + \frac{m \cdot V_B^2}{S}. \quad (2.6.49)$$

Представивши у формулі (2.6.49) швидкість  $V_B$  як функцію кутової частоти обертання шнека  $\omega$  і кроку його витка  $S$  [згідно (2.6.13)], після перетворень прийдемо до виразу, що дозволяє розрахувати силу, необхідну для зрізання одного стебла:

$$R = S \cdot \left[ \frac{12 \cdot EJ}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)} + \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \pi^2} \right]. \quad (2.6.50)$$

В реальних умовах виток шнека розглянутого пристрою одночасно може зрізати не один, а кілька ( $K_{ст}$ ) стебел. У цьому випадку сила, необхідна для їх зрізування, дорівнює:

$$R_{сум} = S \cdot K_{ст} \left[ \frac{12 \cdot EJ}{c^2 \cdot (3 \cdot h + c)} + \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \pi^2} \right]. \quad (2.6.50)$$



Беручи до уваги викладені в попередньому параграфі допущення, величина  $K_{ст}$  може бути визначена як відношення числа всіх стебел ( $K_{сум}$ ), що знаходяться в зоні трикутника АВС (див. рис. 2.6.6), до числа стебел ( $K_{л}$ ), що вміщується на горизонтальній проєкції кромки різання АС, тобто

$$K_{ст} = \frac{K_{сум}}{K_{л}}. \quad (2.6.52)$$

При заданому діаметрі стебла  $d_c$  і відомої, із залежності (2.6.39), довжині кромки різання протиріжучої пластини  $l_{AC}$ , величина  $K_{л}$  легко визначається з виразу:

$$K_{л} = \frac{l_{AC}}{d_c}. \quad (2.6.53)$$

Що стосується значення величини  $K_{сум}$ , то воно може бути розраховане за такою формулою:

$$K_{сум} = \eta \cdot S_T, \quad (2.6.54)$$

де  $\eta$  – вихідна щільність стеблостою, шт./м<sup>2</sup>;

$S_T$  – площа зони зрізання (трикутник АВС, рис. 2.6.6).

Площа прямокутного трикутника АВС, як впливає з рис. 2.6.6, може бути визначена з виразу:

$$S_T = 0,5 \cdot l_c^2 \cdot \operatorname{tg}\gamma. \quad (2.6.55)$$

Після підстановки (2.6.53-2.6.55) в (2.6.52) отримаємо:

$$K_{ст} = \frac{\eta \cdot l_c^2 \cdot d_c \cdot \operatorname{tg}\gamma}{2 \cdot l_{AC}}.$$

Враховуючи (див. рис. 2.6.6), що  $l_c = l_{AC} \cdot \cos^2\gamma$ , отримаємо:

$$K_{ст} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot l_{AC} \cdot \cos^2\gamma \cdot \operatorname{tg}\gamma}{2}.$$

Провівши ряд тривіальних перетворень з тригонометричними функціями, що входять в отриманий вираз, приходимо до наступного:

$$K_{CT} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot l_{AC} \cdot \sin 2\gamma}{4}.$$

Враховуючи отримані раніше залежності для кута розхилу  $\gamma$  (2.6.32) і довжини леза протиріжучої пластини  $l_{AC}$  (2.6.39), після низки відповідних перетворень можна остаточно записати:

$$K_{CT} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot \sin[2 \cdot (\arctg Km + \alpha)]}{4} \cdot \left[ \frac{2 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} + c \right] \times \quad (2.6.56)$$

$$\times \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \times \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right]$$

З урахуванням (2.6.56) формулу (2.6.51) можна представити в наступному вигляді:

$$R_{\text{сум}} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot \sin[2 \cdot (\arctg K_T + \alpha)] \cdot S}{4} \cdot \left[ \frac{2 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} + c \right] \times \quad (2.6.57)$$

$$\times \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \times \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right] \cdot \left[ \frac{12 \cdot EJ}{c^2 \cdot (3h + c)} + \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \pi^2} \right]$$

Потужність, необхідна для зрізування  $K_{CT}$  стебел, визначається при цьому з відомого вислову:

$$N_{\text{рез}} = R_{\text{сум}} \cdot V_B,$$

де  $V_B$  – осьова швидкість руху точки, що лежить на кромці витка шнека різального пристрою.

Враховуючи, що лінійна швидкість руху витка шнека в осьовому напрямку визначається як  $V_B = \omega \cdot S/2\pi$ , остаточно отримаємо:

$$N_{\text{рез}} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot \sin[2 \cdot (\arctg K_T + \alpha)] \cdot S^2 \cdot \omega}{8 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{2 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} + c \right] \times$$

$$\times \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \times \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right] \cdot \left[ \frac{12 \cdot EJ}{c^2 \cdot (3h + c)} + \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \pi^2} \right]$$
(2.6.58)

В межах кроку витка (як лівої, так і правої навивки) зріз відбувається тільки в зоні однієї протиріжучої пластини. Необхідна для цього потужність може бути розрахована за наведеною вище формулою.

При ширині захвату пристрою  $B_p$  зон одночасного різання буде декілька. Їх число ( $N_z$ ) визначається за формулою:

$$N_z = \frac{B_p}{S}.$$

У цьому випадку потужність, необхідна для зрізування рослин у межах ширини захвату пристрою, може бути визначена з виразу:

$$N_{p.\text{сум}} = N_{\text{рез}} \cdot N_z = N_{\text{рез}} \cdot \frac{B_p}{S}.$$

або, з урахуванням формули (2.6.58):

$$N_{p.\text{сум}} = \frac{\eta \cdot d_c \cdot \sin[2 \cdot (\arctg K_T + \alpha)] \cdot S \cdot \omega \cdot B_p}{8 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{2 \cdot V_M \cdot \lambda \cdot D_2}{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}} + c \right] \times$$

$$\times \arcsin \left[ \frac{L + \delta}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot V_M} \times \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4 \cdot D_2 \cdot D_0}}{D_2} \right] \cdot \left[ \frac{12 \cdot EJ}{c^2 \cdot (3h + c)} + \frac{m \cdot \omega^2}{4 \cdot \pi^2} \right]$$
(2.6.59)

Для виключення недорізів (нерівномірності зрізу) стебел культури, яка збирається, необхідно, щоб число зон різання –  $N_z$  – було цілим. При певному, в результаті розрахунку по формулі (2.6.26), значення кроку витка шнека  $S$ , таку умову можна виконати тільки шляхом підбору відповідного значення конструктивної ширини захвату різального пристрою.

Іншим обмежувальним чинником при завданні цього параметра є загальна потужність ( $N_e$ ), що витрачається як на зрізування рослин і розраховується з виразу (2.6.59), так і потрібна на привод всіх механічних робочих вузлів розглянутого різального пристрою ( $N_{пр}$ ), тобто

$$N_e = N_{р.сум} + N_{пр}.$$

### **2.6.3. Блок-схема алгоритму розрахунку конструктивних і кінематичних параметрів пристрою для зрізування рослин**

У попередньому параграфі розділу викладені теоретичні положення, що становлять основу, необхідну для розрахунку кінематичних і конструктивних параметрів пристрою для зрізування рослин с.-г. культур.

Практичне використання отриманих математичних залежностей зручно і доцільно викласти у вигляді конкретної **методики**, графічне представлення якої (рис.2.6.8) може бути використано як блок-схема алгоритму для написання відповідної програми до ЕОМ.

Слід зазначити, що запропонована методика [76, 77, 78] дозволяє, задавшись спочатку рядом вихідних величин, в певному порядку розрахувати як конструктивні і технологічні параметри шнекового пристрою, так і потужність, необхідну для зрізування рослин.

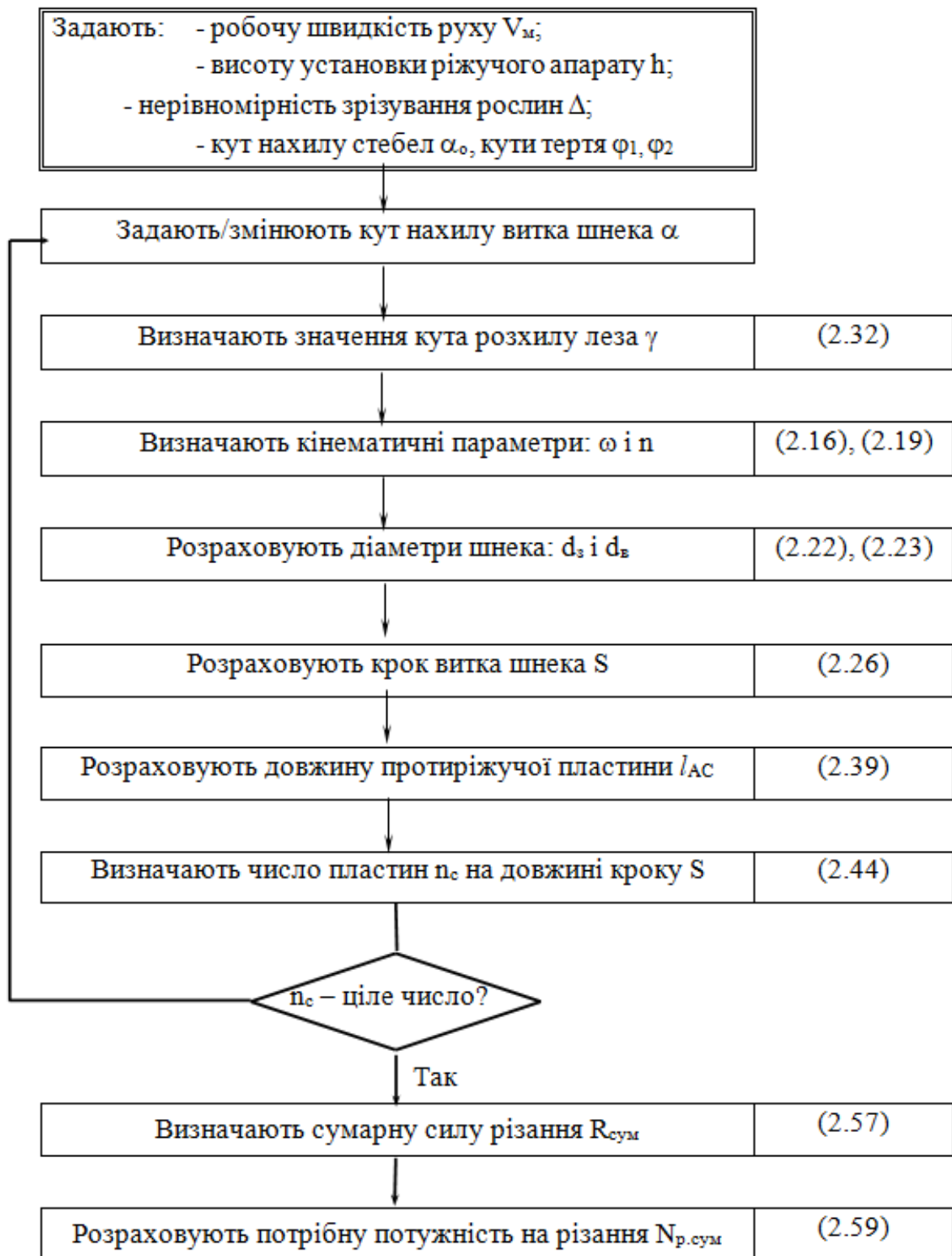


Рис. 2.6.8. Блок-схема алгоритму для визначення параметрів шнекового різального пристрою

## ЧАСТИНА ІІІ. ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУТКОВОГО ЕЛЕВАТОРА ОВОЧЕЗБИРАЛЬНОЇ МАШИНИ

### 3.1. Дослідження динаміки пуску елеватора

Динамічний розрахунок привода елеватора роблять з метою встановлення фактичних навантажень, що діють на елементи машини в різні періоди руху, в тому числі й на перехідних режимах. Під дією імпульсів, що створюють прискорення, в елементах системи виникають малі пружні коливання. Останні приводять до зростання інерційних навантажень у порівнянні з їх середніми значеннями, які визначаються законами руху абсолютно твердого тіла. При несталому русі, що має місце в періоди пуску та гальмування, які в овочезбиральних машинах повторюються в кожному робочому циклі, статичний та кінематичний розрахунки недостатні для визначення дійсних навантажень. В умовах непостійності швидкостей всіх або деяких елементів машини такі величини, як тривалість періодів пуску (розгону) й гальмування, перевантаження двигуна і передач, можна визначити лише на основі динамічних розрахунків, при яких враховується як непостійність швидкості під час руху, так і інерційність мас, що приймають участь в руху.

Під час несталого руху повинна витратитися (при розгоні) або поглинатися (при гальмуванні) енергія, що дорівнює роботі сил інерції всіх мас, які рухаються нерівномірно. Вона повинна здійснюватися двигуном поза роботою, необхідною для додання статичних опорів. Тому тривалість періоду несталого руху є функцією надлишкового моменту. Для періоду розгону надлишковий момент – це різниця між моментом, що розвиває двигун в цей період, і моментом статичних опорів, приведених до валу двигуна. Для періоду гальмування – сума гальмівного моменту і

моменту опорів, приведених до валу, на якому розміщені гальма [79].

Широке застосування в сільськогосподарських машинах мають поверхні, що роблять коливальні рухи (транспортери, елеватори, та т.п.). Характерною рисою технологічного процесу їхньої роботи є те, що частки, що рухаються по них, роблять два види руху – абсолютне, віднесене до нерухомих координат, зв'язаним із поверхнею, і відносне, зв'язане з рухомою поверхнею.

Труднощі в складанні диференціальних рівнянь руху в цьому випадку має місце внаслідок того, що напрямок прикладених сил зв'язано з напрямком осей нерухомої системи координат, а напрямок реакцій зв'язків – з напрямком осей рухомої системи координат. До останніх відносяться нормальна реакція поверхні і сила тертя, напрямок яких обумовлюється напрямком дотичної до траєкторії відносного руху.

Аналіз динамічних процесів в загальному виді складний, так як коливальна система складається з великого числа мас і пружних ланок, а характер розвитку процесу залежить ще й від початкових умов. Задачу можна зробити значно простішою, якщо систему розглядати у вигляді декількох приведених мас, а з'єднувальні їх ланки у вигляді приведених жорсткостей й вирішувати її при конкретних початкових умовах.

Динамічні навантаження в пружних елементах визначають з диференціальних рівнянь руху мас, причому число рівнянь, що розв'язуються разом, дорівнює числу ступенів вільності системи, у відповідності з чим коливання системи складаються з простих коливань різних частот.

Повільні коливання системи, які залежать виключно від співвідношення мас і жорсткостей елементів з-за наявності дисипативних сил затухають швидко. Амплітуда примусових коливань залежить не тільки від значення і характеру збудовальної сили, а й від співвідношення її періоду і періоду власних коливань системи. Коливання конструкції звичайно не створює значного

впливу на роботу приводів механізмів і на рівномірність обертання двигуна [79]. Враховуючи це, в ряді випадків можна розглядати коливання механізмів і конструкції окремо, що спрощує рішення динамічних задач.

При дослідженні динамічних систем, елементи яких мають відносний характер руху, найбільш адекватний результат дає принцип Лагранжа [80]. Але тільки в тому випадку, коли можуть бути знайдені вираження кінетичної енергії й узагальнених сил, прикладених до досліджуваної системи, у функції від координат, швидкості і часу. Знаючи деформації і приведену твердість елементів машини, можна знайти характер зміни навантажень і їхні конкретні значення. Рішення загального рівняння дозволяє визначити залежність між рушійним моментом при невстановленому русі й тривалістю цього руху.

Привод будь-якої машини складається з елементів, що можуть бути приведені до зосереджених мас (ротор електродвигуна, маси робочих органів, що рухаються та ін.) і пружним зв'язкам (канати, ланцюги, стрічки, вали, муфти й ін.). Під дією зовнішніх навантажень (момент електродвигуна, опір робочого органа) пружні елементи деформуються, а зосереджені маси роблять крім основного руху малі коливання.

Виходячи з аналізу теоретичних досліджень динамічних процесів, можливо привести всю систему до двох масової.

Будемо розглядати привод елеватора у вигляді приведенної (динамічної) схеми, що складає з двох мас, з'єднаних пружною ланкою (рис.3.1).

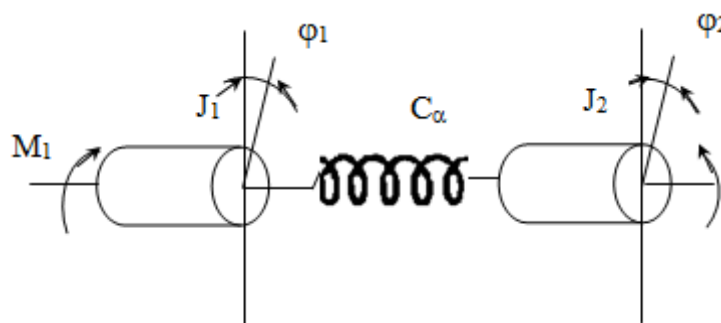


Рис. 3.1. Схема привода елеватора



де:  $J_1$  – приведений момент інерції обертових частин, які знаходяться на валу двигуна,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;

$J_2$  – приведений момент інерції частин механізму, що обертаються й переміщуються поступально,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;

$C_\alpha$  – приведена кутова жорсткість елементів передач,  $\text{Н}\cdot\text{м}/\text{град.}$ ;

$\varphi_1, \varphi_2$  – координати системи, град.

Для визначення деформацій пружної системи, що має кінцеве число ступенів вільності (кінцеве число мас), зручно скористатися рівняннями руху Лагранжа в наступній формі [81]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = F_1; \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = F_2; \quad (3.2)$$

де  $T$  – кінетична енергія системи;

$V$  – потенційна енергія системи;

$\varphi_{1,2}$  – узагальнені координати системи;

$\dot{\varphi}_{1,2}$  – узагальнені швидкості;

$F_{1,2}$  – узагальнені зовнішні сили, що відповідають узагальненим координатам, Н.

Кінетична енергія системи визначиться

$$T = \frac{J_1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 \quad (3.3)$$

Потенціальна енергія системи

$$V = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \cdot C_\alpha}{2} \quad (3.4)$$

Після підстановки результатів диференціювання (3.3) і (3.4) [82] у рівняння (3.1) і (3.2), отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot C_\alpha = M_1; \\ J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot C_\alpha = -M_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Вирази (3.5) являють собою загальну систему диференціальних рівнянь, що визначають рух двох мас. Для визначення величини деформації пружної ланки (тобто різниці  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ) перетворимо рівняння (3.5) у наступний вираз [83]:

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{C_\alpha \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{M_c \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2} + \frac{f(t)}{J_1}. \quad (3.6)$$

Тут прийнято, що

$M_2 = M_c$  – статичний (зовнішній) момент опору руху другої маси, Н·м;

$M_1$  – рушійний момент, Н·м. Може бути представлений як

$$M_1 = M_2 + Mi = M_c + f(t), \quad (3.7)$$

де  $Mi$  – надлишковий момент; прийнятий у загальному випадку перемінним у часі (для частки випадків може бути прийнятий постійним) і діючий тільки під час несталого руху, Н·м.

Загальне рішення рівняння (2.7) знайдемо у вигляді [83]:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A \sin \sqrt{\frac{C_\alpha \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t + B \cos \sqrt{\frac{C_\alpha \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t + \varphi(t) \quad (3.8)$$

де  $\varphi(t)$  – частинне рішення рівняння (3.8), що залежить від значення  $f(t)$  – надлишкового моменту.

Приймаємо початкові умови, при яких починається процес динамічного навантаження системи:

$$t = 0 \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{M_c}{C_\alpha};$$

$$t = 0 \quad \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} = 0,$$

тобто, у момент додання надлишкового моменту  $f(t)$  елементи механізму навантажені статичним моментом, а швидкість навантаження дорівнює нулю.

Розглянемо три значення характеру зміни зовнішнього моменту  $f(t)$ , що відповідають різним режимам пуску чи зупинки механізму, які найчастіше використовуються при розгляданні подібних задач:

$$1. f(t) = M = const ; \quad (3.9)$$

$$2. f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right); \quad (3.10)$$

$$3. f(t) = M \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right), \quad (3.11)$$

де  $M$  – початковий (найбільший) надлишковий момент, що прискорює чи гальмує, Н·м;

$t_1$  – час дії цього моменту, с;

$t$  – поточний час, с.

Частинні рішення рівняння (3.7):

1. При  $f(t) = M = const$

$$\varphi(t) = \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha \cdot (J_1 + J_2)} + \frac{M_c}{C_\alpha} \quad (3.12)$$

2. При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$

$$\varphi(t) = \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)} \left[ 1 + \frac{2J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} \right] - \frac{M J_2 t^2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} + \frac{M_c}{C_\alpha} \quad (3.13)$$

3. При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$

$$\varphi(t) = \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha \cdot (J_1 + J_2)} \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right) + \frac{M_c}{C_\alpha} \quad (3.14)$$

Використовуюючи початкові умови, знаходимо величини коефіцієнтів  $A$  і  $B$  у (3.8) при різних значеннях  $f(t)$  і остаточно отримаємо три види рішень рівняння (3.6):

1. При  $f(t) = M = const$

$$A = 0;$$

$$B = -\frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)};$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t \right] + \frac{M_c}{C_\alpha} \quad (3.15)$$

2. При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$

$$A = 0;$$

$$B = -\frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)} \left[ 1 - \frac{2J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} \right];$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = & \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)} \left( 1 + \frac{2J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} \right) \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t \right] - \\ & - \frac{M J_2 t^2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} + \frac{M_c}{C_\alpha}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

3. При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$

$$A = \frac{M J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1} \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}};$$

$$B = -\frac{M J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)};$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 = & \frac{M \cdot J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1} \left( \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \cdot \sin \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t - t \right) + \\ & + \frac{M J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t \right] + \frac{M_c}{C_\alpha}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

Момент, що сприймається пружною ланкою, може бути визначений у такому вигляді:

$$M_y = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot C_\alpha. \quad (3.18)$$

При  $f(t) = M = const$

$$M_y = \frac{M \cdot J_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t \right] + M_c \quad (3.19)$$

При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$

$$\begin{aligned} M_y = & \frac{M \cdot J_2}{J_1 + J_2} \left( 1 + \frac{2J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} \right) \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \cdot t \right] - \\ & - \frac{M J_2 t^2}{(J_1 + J_2) t_1^2} + M_c; \end{aligned} \quad (3.20)$$

При  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$

$$\begin{aligned} M_y = & \frac{M \cdot J_2}{(J_1 + J_2) t_1} \left( \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \cdot \sin \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t - t \right) + \\ & + \frac{M J_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t \right] + M_c; \end{aligned} \quad (3.21)$$

Графіки рівнянь (3.19), (3.20) і (3.21) представлені на рисунках 3.2, 3.3, 3.4.

З графіків видно, що при  $f(t) = Const$  коливальний процес відбувається з постійною частотою і, якщо не враховувати загасань унаслідок внутрішнього тертя, максимуми кожної хвилі однакові по усій величині.

При  $f(t) \neq Const$  відбувається зсув осі коливань за законом зміни  $f(t)$ . При малих періодах коливань у порівнянні з часом  $t_1$  варто очікувати, що величини  $M_{y_{max}}$  при всіх значеннях  $f(t)$  будуть у першій хвилі коливань близькі одна до одної.

Знайдемо величини  $M_{y_{max}}$  при різних значеннях  $f(t)$ . З рівняння (3.19)  $M_{y_{max}}$  буде при

$$\sqrt{\frac{C_{\alpha}(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \cdot t = \pi.$$

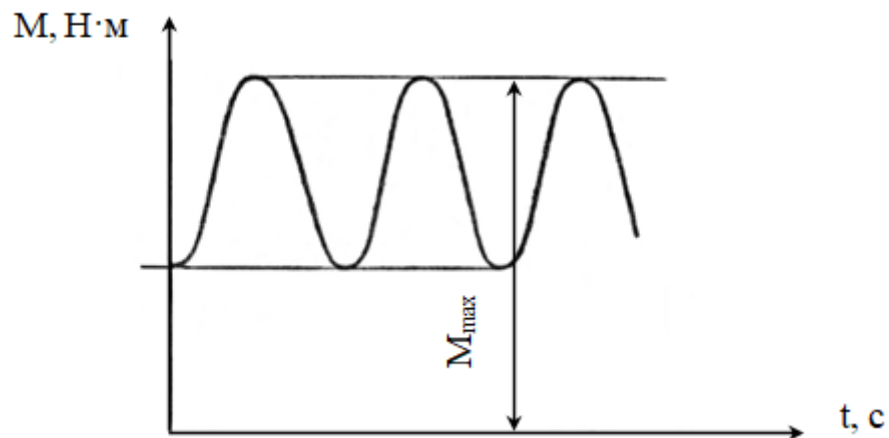


Рис. 3.2. Графік функції при  $f(t) = M = const$

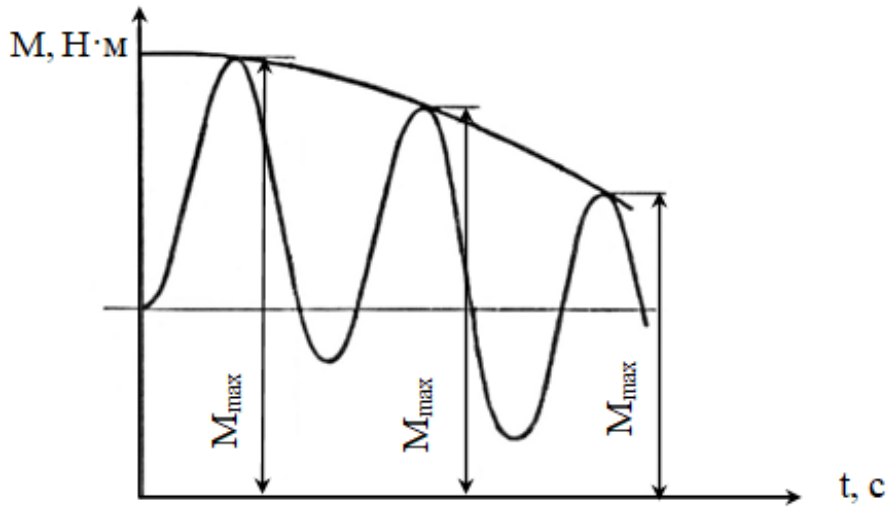


Рис. 3.3. Графік функції при  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$

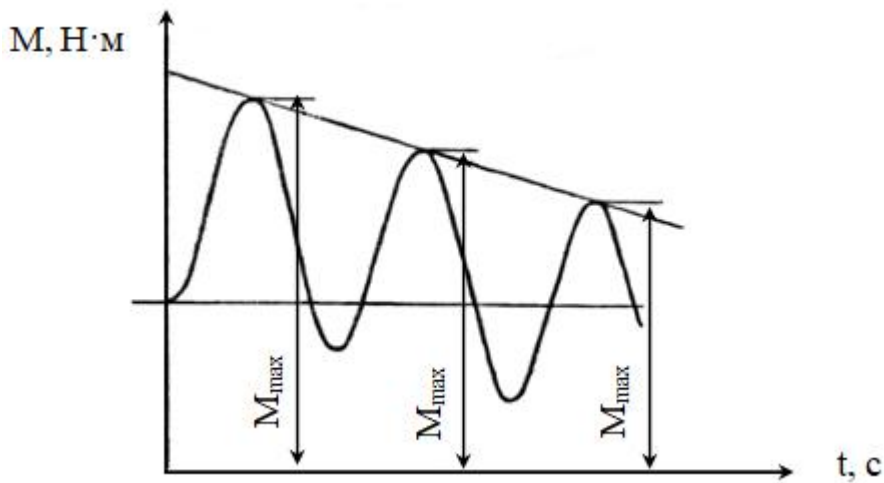


Рис. 3.4. Графік функції при  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$

і отже, при  $f(t) = M = Const$

$$M_{y_{max}} = \frac{2MJ_2}{J_1 + J_2} + M_c \quad (3.22)$$

Якщо  $f(t) = M \left( 1 - \frac{t^2}{t_1^2} \right)$ ,  $M_{y_{max}}$  знайдемо диференціюючи рівняння

(3.20) по  $t$  і дорівнюючи нулю, отримаємо:

$$\frac{dM_y}{dt} = \frac{MJ_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 + \frac{2J_1J_2}{C_\alpha(J_1 + J_2)t_1^2} \right] \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1 + J_2)}{J_1J_2}} \sin \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1 + J_2)}{J_1J_2}} t -$$

$$-\frac{2MJ_2 t}{(J_1 + J_2)t_1^2} = 0. \quad (3.23)$$

Після перетворень отримаємо:

$$\left[ 1 + \frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{2J_1 J_2} t_1^2 \right] \sin \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \cdot t = \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} \cdot t \quad (3.24)$$

Виразимо час, що відповідає максимальному навантаженню на вал  $M_{y_{max}}$ , у вигляді:

$$t_m = \chi \pi \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \quad (3.25)$$

$$\text{Тоді } 1 + \frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{2J_1 J_2} t_1^2 = \frac{\chi \pi}{\sin \chi \pi}.$$

Звідси можна знайти значення  $\chi$  у залежності від

$$1 - \frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{2J_1 J_2} t_1^2.$$

Величина  $\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}$  являє собою квадрат частоти вільних коливань розглянутої системи. Якщо час несталих процесів у механізмі складає не менше 1 сек., то величина  $1 + \frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{2J_1 J_2} t_1^2 = \frac{\chi \pi}{\sin \chi \pi}$  має значення більш 50, тоді  $\chi$  близько до 1.

Припускаючи  $\chi = 1$ , отримаємо

$$t_m = \pi \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}}.$$

Підставляючи отриманий вираз в (2.20), знайдемо

$$M_{y_{max}} = \frac{2MJ_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 + \frac{2J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2) t_1^2} \right] - \frac{MJ_2^2 \pi^2 J_1}{C_\alpha (J_1 + J_2)^2 t^2} + M_c \quad (3.26)$$



Припустимо, що  $\frac{3J_1J_2}{C_\alpha(J_1+J_2)t_1^2} \ll 1$ . Тоді після перетворень приблизно отримаємо:

$$M_{y_{max}} = \frac{2MJ_2}{J_1+J_2} + M_c \quad (3.27)$$

Таким чином, у першій коливальній хвилі максимальний момент на валу  $M_{y_{max}}$  при  $f(t) = M\left(1 - \frac{t^2}{t_1^2}\right)$  приблизно дорівнює моменту  $M_{y_{max}}$  при  $f(t) = M = Const$ .

Знайдемо значення моменту  $M_{y_{max}}$  при  $f(t) = M\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$ .

Диференціюючи і прирівнюючи нулю рівняння (3.21), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dt} = \frac{MJ_2}{(J_1+J_2)t} \left[ \cos \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} - 1 \right] + \\ + \frac{MJ_2}{J_1+J_2} \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \sin \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Після перетворень і скорочень отримаємо:

$$\cos \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} + t_1 \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}} \sin \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} - 1 = 0.$$

Замінивши

$$1 - \cos \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} \quad \text{і}$$

$$\sin \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} = 2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\alpha(J_1+J_2)}{J_1J_2}t},$$

отримаємо:

$$t_1 \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}},$$

відкіля знаходимо час дії моменту  $t$ :

$$t = 2 \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1.$$

Друга похідна  $\frac{d^2 M_y}{dt^2}$  при всіх позитивних значеннях  $\sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$  буде негативна, тобто знайдене значення  $t$  відповідає  $M_{y \max}$ .

Підставивши знайдений вираз часу  $t$  у рівняння (3.21), отримаємо:

$$M_{y \max} = \frac{MJ_2}{J_1 + J_2} \left[ \frac{1}{t_1} \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \sin 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1 - \right. \\ \left. - \frac{2}{t_1} \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1 - \cos 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1 + 1 \right] + M_c.$$

Виразивши  $\sin$  і  $\cos$  через  $\operatorname{tg}$ , отримаємо:

$$M_{y \max} = \frac{2MJ_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 - \frac{1}{t_1} \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1 \right] + M_c. \quad (3.29)$$

Так як

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_\alpha (J_1 + J_2)}{J_1 J_2}} t_1 \approx \frac{\pi}{2},$$

то

$$M_{y \max} \approx \frac{2MJ_2}{J_1 + J_2} \left[ 1 - \frac{\pi}{2t_1} \sqrt{\frac{J_1 J_2}{C_\alpha (J_1 + J_2)}} \right] + M_c. \quad (3.30)$$

Приблизно можна прийняти

$$M_{y_{max}} = \frac{2MJ_2}{J_1 + J_2} + M_c \quad (3.31)$$

Таким чином, усі наближені формули, що визначають  $M_{y_{max}}$  при різних виразах для  $f(t)$ , виявилися однаковими. Тобто, максимальний момент, що сприймається пружною ланкою, майже не залежить від характеру зміни зовнішнього (збурювального) моменту, а визначається, головним чином, початковим значенням цього моменту.

### 3.2. Дослідження рівнянь руху стрічки елеватора

Під впливом дії збурювальних сил приводу і завдяки пружним властивостям тягового органу елеватора в пружному елементі виникає коливальний процес, який супроводжується виникненням в ньому динамічних зусиль.

Для того, щоб аналітично визначити процес коливань при кращій відповідності дійсним умовам, необхідно враховувати вплив демпфіруючих сил. Ці сили мають різне походження: тертя між сухими поверхнями ковзання, опір повітря, внутрішнє тертя та ін. Серед багатьох причин розсіювання енергії випадок, в якому демпфіруюча сила пропорційна швидкості (так зване в'язке демпфірування), є найпростішим з точки зору математичного дослідження.

Тому сили опору, які мають більш складну природу, замінимо еквівалентним в'язким демпфіруванням. Еквівалентне демпфірування визначають з умови, щоб за один цикл при ньому розсіювалося стільки ж енергії, скільки й при дії реальних сил опору.

Розглянемо систему, в якій є в'язке демпфірування завдяки наявності демпфера (рис. 3.5). Передбачається, що демпфер оказує пропорційний швидкості опір руху.

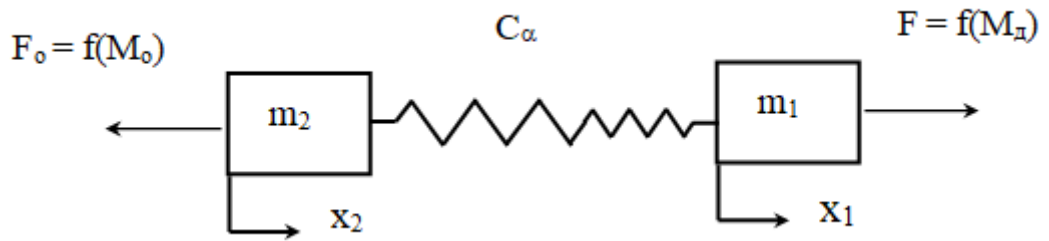


Рис. 3.5. Розрахункова динамічна схема

де  $m_1$  – приведена маса оберткових частин вала двигуна, кг;

$m_2$  – приведена маса частин, що переміщуються, кг;

$x_1, x_2$  – відповідно переміщення мас 1 і 2, м;

$M_d$  – рушійний момент, Н·м;

$M_o$  – момент опору, Н·м;

$C_\alpha$  – приведена жорсткість елементів передач, Н/м.

Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (x_1 - x_2)c &= F + f(t); \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (x_1 - x_2)c &= -F. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Коефіцієнт  $c$  являє собою коефіцієнт в'язкого демпфірування або постійну демпфірування й має розмірність сили, віднесеної до одиниці швидкості. Знак мінус перед демпфіруючою силою означає, що ця сила завжди має напрямок, протилежний напрямку швидкості.

Різниця  $(x_1 - x_2)$  буде являти собою деформацію тягових елементів елеватора в момент часу  $t$ . Зусилля, що діє на стрічку елеватора, визначиться у вигляді

$$F = (x_1 - x_2)c.$$

Розділивши ліву та праву частини рівняння (3.32) на  $m_1$  та  $m_2$  відповідно та позначивши

$$p^2 = \frac{k}{m_1 m_2}; \quad 2n = \frac{c}{m_1 m_2} \quad (3.33)$$

отримаємо рівняння повільних коливань з в'язким демпфіруванням

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = 0 \quad (3.34)$$

При дослідженні цього рівняння скористуємося звичайним методом рішення лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами [84, 85]. Виберемо наступне уявлення для рішення рівняння:

$$x = Ce^{rt}, \quad (3.35)$$

де  $e$  – основа натурального логарифму;

$t$  – час;

$r$  – постійна, яка визначається з умови того, що вираз (3.35) повинен задовольнити рівнянню (3.34).

Рішенням квадратного рівняння (3.34) є два комплексні кореня. Підставивши значення постійних у вираз (3.35), отримаємо два рішення рівняння (3.34).

Сума або різниця цих двох рішень, помножених на вільну постійну, також буде рішенням. В такому випадку маємо

$$x_1 = \frac{C_1}{2}(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}) = C_1 e^{-nt} \cos p_0 t;$$

$$x_2 = \frac{C_2}{2}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = C_2 e^{-nt} \sin p_0 t.$$

Склавши ці рішення, отримаємо загальне рішення рівняння (3.34):

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_0 t + C_2 \sin p_0 t), \quad (3.36)$$

де  $C_1$  и  $C_2$  – постійні, що повинні визначатися з початкових умов.

Множник  $e^{-nt}$  в рішенні (3.36) зменшується з часом, тому виникаючі спочатку коливання будуть затухати.

Вираз у круглих дужках із рішення (3.36) являє собою періодичну функцію з круговою частотою

$$p_{\delta} = \sqrt{p^2 - n^2}, \quad (3.37)$$

що зветься круговою частотою затухаючих коливань при демпфіруванні. Відповідний їй період

$$\tau_{\delta} = \frac{2\pi}{p_{\delta}} = \frac{2\pi}{p} \frac{1}{\sqrt{1 - (n^2 / p^2)}}. \quad (3.38)$$

Для визначення постійних  $C_1$  та  $C_2$ , які входять до рішення (3.38), припустимо, що в початковий момент при  $t = 0$  в процесі коливань тіло зміщається від положення рівноваги на величину  $x_0$  й має початкову швидкість  $\dot{x}_0$ . Підставляючи ці дані в рішення (3.36) та в його похідну за часом, знайдемо

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_{\delta}}. \quad (3.39)$$

Підставивши знайдені значення (3.39) постійних в рішення (3.36), отримаємо

$$x = e^{-nt} \left( x_0 \cos p_{\delta} t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_{\delta}} \sin p_{\delta} t \right). \quad (3.40)$$

В цьому виразі перший доданок, що пропорційний  $\cos p_{\delta} t$ , залежить від початкового переміщення  $x_0$ , тоді як другий доданок, що пропорційний  $\sin p_{\delta} t$ , залежить як від початкового переміщення  $x_0$ , так і від початкової швидкості  $\dot{x}_0$ .

Вираз (3.40) можна записати в еквівалентній формі

$$x = Ae^{-nt} \cos(p_{\delta} t - \alpha_{\delta}), \quad (3.41)$$

де

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0 + nx_0)^2 / p_\delta^2} \quad (3.42)$$

є максимальне значення амплітуди.

$$\alpha_\delta = \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{p_\delta x_0} \right). \quad (3.43)$$

Можна сказати, що вираз (2.43) описує псевдогармонічний рух амплітудою  $Ae^{-nt}$ , яка зменшується за експоненціальному закону, з фазовим кутом  $\alpha_\delta$  та періодом  $\tau_\delta = 2n/p_\delta$ . Огинаюча, рівняння якої має вигляд  $\pm Ae^{-nt}$ , торкається цього графіка в точках, ординати котрих відстоять одна від одної на однаковому інтервалі часу  $\tau_\delta/2$ . Оскільки дотичні, що проходять в цих крапках, не є горизонтальними, точки дотику не співпадають з точками максимуму зміщення від положення рівноваги. Якщо коефіцієнт демпфірування малий, різницею в положенні цих точок можна зневажити. Однак у всіх випадках часовий інтервал між двома сусідніми граничними зміщеннями дорівнює половині періоду  $\tau_\delta/2$ .

Далі будемо припускати, що демпфірування являє собою силу опору. Тоді при її дії буде відбуватися розсіювання енергії, амплітуда коливань буде поступово зменшуватись, а рух – затухати. Однак, маються випадки, коли при руху в систему привноситься енергія, в результаті чого з часом амплітуда коливань зростає. В подібних випадках використовують термін негативне демпфірування [86, 87].

Розглянемо випадок, коли крім сил пружності  $-kx$ , виникаючих в пружній ланці при розтягу, та сили опору  $-cx$  мається ще прикладена ззовні до коливальної маси збурювальна сила, яка змінюється за гармонічним законом. При таких умовах рівняння руху маси має вигляд

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + Q \cos \omega t. \quad (3.44)$$

Поділивши на  $m$  ліву та праву частини та вводячи позначення

$$p^2 = k/m; \quad 2n = c/m; \quad q = Q/m, \quad (3.45)$$

отримаємо рівняння

$$x + 2nx + p^2 x = q \cos \omega t. \quad (3.46)$$

Отриманий вираз є диференціальним рівнянням руху при примусових коливаннях з в'язким демпфіруванням. Часткове рішення рівняння (3.46) можна отримати у вигляді

$$x = M \cos \omega t + N \sin \omega t, \quad (3.47)$$

де  $M$  і  $N$  – довільні постійні.

Для визначення цих постійних підставимо вираз (3.47) для шуканого рішення в рівняння (3.46) і тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &(-\omega^2 M + 2n\omega N + p^2 M - q)\cos \omega t + \\ &+ (-\omega^2 N - 2n\omega M + p^2 N)\sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Ця рівність буде задовольнятися при любых значеннях перемінної  $t$  в тому випадку, якщо будуть дорівнювати нулю вирази, що стоять в дужках[88]. Внаслідок для визначення постійних  $M$  і  $N$  отримаємо два лінійних алгебраїчних рівняння

$$\begin{aligned} -\omega^2 M + 2n\omega N + p^2 M &= q; \\ -\omega^2 N - 2n\omega M + p^2 N &= 0. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$M = \frac{q(p^2 - \omega^2)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}; \quad N = \frac{q(2n\omega)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}. \quad (3.48)$$

Підставивши ці вирази для постійних в (3.47), отримаємо часткове рішення рівняння (3.46). Загальне рішення рівняння (3.46) дорівнює сумі часткового рішення (3.47) та загального рішення (3.38). Таким чином, роздивляючись тільки випадок докритичного демпфірування, отримаємо

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_0 t + C_2 \sin p_0 t) + M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (3.49)$$



Перші два доданка у виразі (3.58) описують демпфірування повільних коливань, два останніх – демпфірування примусових коливань. Повільні коливання мають період  $\tau_0 = 2\pi/p_0$ , а примусові коливання – період  $T = 2\pi/\omega$ , який співпадає з періодом збурювальної сили, що спричиняє ці коливання. З виразу (3.49) видно, що завдяки наявності множника  $e^{-nt}$  повільні коливання поступово зменшуються й залишаються тільки встановлені примусові коливання, що описуються двома останніми доданками. Ці примусові коливання підтримуються нескінченно довго завдяки дії збурювальної сили.

### **3.3. Визначення динамічних навантажень, діючих на стрічку елеватора при пуску**

У процесі пуску двигуна в тяговій ланці елеватора виникають динамічні навантаження, розмір яких, головним чином, залежить від надлишкової сили або тривалості пуску. При дослідженні пускових процесів стрічкових конвеєрів використовують закон зміни швидкості пуску двигуна. При цьому приймається, що маса приводу в багато разів більше маси частин конвеєра, що рухаються поступально. У прутковому елеваторі маса частин, що рухаються, співмірна з масою приводу, тому при розрахунках її необхідно враховувати. Необхідно задаватися не прискоренням, а збурювальною силою і в розрахункову схему включати як масу приводу, так і масу частин елеватора, що рухаються поступально.

Завдяки пружним властивостям стрічки потік енергії, одержуваний від приводного барабана, і деформації передаються від перетину до перетину стрічки з прутками з деякій швидкістю  $a$  (швидкістю поширення пружної хвилі деформації). При цьому перетини стрічки на обох гілках у той самий момент часу мають різноманітні швидкості і прискорення, тому кінематичні параметри

стрічки є функцією не тільки часу, але й положення (координати) перетину.

Для динамічного аналізу елеватора складемо розрахункову схему, замінивши елеватор механічною моделлю, складеною з дискретних мас, пов'язаних пружними ланками. Реальний механізм замінимо еквівалентною схемою, що володіє такими ж ланками і яка має такий самий енергетичний запас, як і реальна система. Задача розрахунку зведеться до розрахунку приведеної системи, що складається з розподілених і зосереджених мас.

Розподілені маси системи відповідають частинам елеватора, що рухаються поступово, (робочій і холостій гілкам стрічки з опорними роликками), а зосереджені – масам приводу з приводним та натяжним барабанами [80].

Реальну схему елеватора (рис.3.6) замінюємо приведеною (рис.3.7), що складається з числа безліч розподілених і двох зосереджених мас. Місцем приведення зосереджених мас обрано точки набігання стрічки на приводний і натяжний барабани.

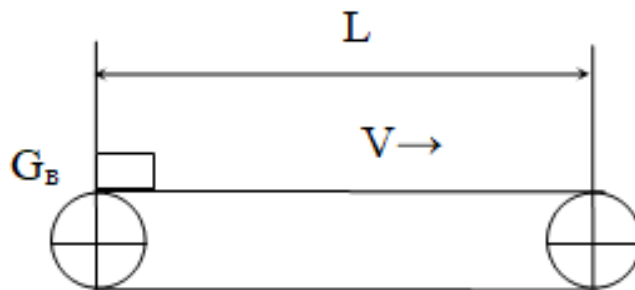


Рис. 3.6. Схема пруткового елеватора

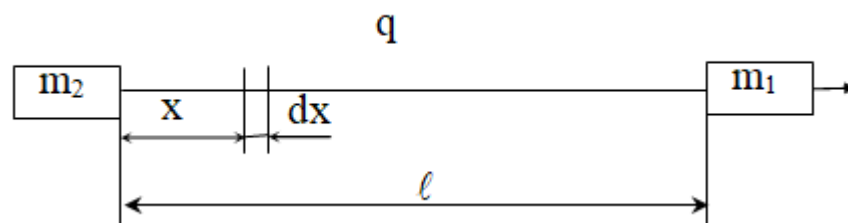


Рис. 3.7. Приведена схема пруткового елеватора

Маса  $m_1$  є сумою приведених мас обертової частини двигуна, муфти і приводного барабана, маса  $m_2$  складається з приведених мас

вантажів і натяжного барабана. Ведуча  $m_1$  ведена  $m_2$  маси з'єднані пружним елементом із масою  $q$ .

На момент початку руху маси  $m_1$  система знаходиться в стані спокою і навантажена силою статичного опору конвеєра  $W_0$ . Система починає рухатися за допомогою сили  $W$  відчуває опір із боку сили  $W_0$ . Для виходу системи зі стану спокою необхідно, щоб сила  $W$  була більше  $W_0$ , тоді  $W - W_0 = F_0$  являє собою надлишкову силу

$$F_0 = \frac{2 \cdot M_n \cdot i}{D_\sigma} \cdot \eta - W_0, \quad (3.50)$$

де  $M_n$  – пусковий момент двигуна (максимальний), Н·м;

$i$  – передаточне число механізму;

$D_\sigma$  – діаметр барабана, м;

$W_0$  – сила статичного опору руху стрічки, Н;

$\eta$  – к.к.д. механізму.

Дослідження процесу розгону будемо проводити при таких допущеннях:

- 1) відсутнє тертя в натяжному барабані;
- 2) зневажаємо подовженням стрічки;
- 3) в жодній із точок по довжині стрічки натяг у період пуску не падає до нуля;
- 4) система консервативна, що дозволяє не враховувати загасання коливань від внутрішніх і зовнішніх сил;
- 5) на систему впливає постійна сила  $F_0$ , що збурюється, яка дорівнює по розміру початковому значенню надлишкової сили.

У період розгону система описується хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.51)$$

де  $u$  – переміщення перетинів стрічки, м;

$t$  – поточний час, с;

$x$  – координата положення перетину, м;

$\frac{\partial u}{\partial x}$  – відносна подовжня деформація стрічки, що залежить від

положення перетину  $x$  і змінюється з часом  $t$ ;

$\frac{\partial u}{\partial t}$  – швидкість стрічки при пружному зсуві, м/с;

$a$  – швидкість поширення пружної хвилі збурення в стрічці, м/с.

$$a = \sqrt{\frac{E}{q}}, \quad (3.52)$$

$E$  – подовжня жорсткість полотна, Н;

$q$  – погонна маса полотна, кг/м.

$$q = \frac{\frac{q'_p + q''_p}{2} \cdot l \cdot k + q_l \cdot l}{g \cdot l} \text{ кг / м}, \quad (3.53)$$

або

$$q = \frac{l}{g} \cdot \left( \frac{q'_p + q''_p}{2} \cdot k + q_l \right),$$

$\frac{q'_p + q''_p}{2} \cdot l \cdot k$  – вага обертових частин роlikоопор робочої і неробочої гілок елеватора, Н;

$q_l \cdot l$  – вага стрічки, Н;

$q'_p, q''_p$  – поточна вага обертових роlikоопор робочої і неробочої гілок відповідно, Н/м;

$q_l$  – поточна вага стрічки, Н/м;

$g$  – прискорення сили ваги, м/с<sup>2</sup>;

$k$  – коефіцієнт участі обертових частин роlikоопор у динаміці,  
 $k = 0,8$ .

Для рішення рівняння (3.51) прийнято такі початкові і граничні умови:

1) для першого періоду  
при  $t = 0$   $u = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad (3.54)$$

при  $x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (3.55)$$

при  $x = l$

$$\alpha_1 \cdot q \cdot l \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_0 - E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.56)$$

де  $\alpha_1$  – відношення маси  $m_i$  до маси стрічки.

$$\alpha_1 = \frac{m_i}{q \cdot l} \quad (3.57)$$

$$m_i = \frac{\beta_1 (G \cdot D^2)_i \cdot i^2}{D_6^2}, \quad (3.58)$$

де  $(G \cdot D^2)_i$  – маховий момент обертових мас вала двигуна,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

$\beta_1$  – коефіцієнт, що враховує маси валів, передач і приводного барабана,  $\beta_1 \approx 1,1$ .

2) для другого періоду  
при  $t = t_0$

$$(u)_{t_0} = \frac{F_0}{E} \cdot \left\{ x - \alpha_1 \cdot l \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_1 \cdot l}\right) \right] \right\}, \quad (3.59)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_0} = \frac{F_0}{E} \cdot a \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha_1 \cdot l}\right) \right], \quad (3.60)$$

при  $x = 0$

$$\alpha_2 \cdot q \cdot l \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad (3.61)$$

при  $x = l$

$$\alpha_1 \cdot q \cdot l \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -E \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad (3.62)$$

де  $u_1$  – переміщення перетинів стрічки при її власних коливаннях;

$\alpha_2$  – відношення приведеної маси  $m_2$  до маси стрічки.

$$\alpha_2 = \frac{m_2}{q \cdot l}. \quad (3.63)$$

У результаті рішення рівняння (3.51) отримано формули для визначення максимального зусилля в точці набігання стрічки на приводний барабан:

- 1) для першого періоду  
при  $x = l$

$$F_{\text{д}} = F_0 \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a \cdot t}{\alpha_1 \cdot l}\right) \right], \quad (3.64)$$

в окремому випадку при  $t = t_0 = \frac{l}{a}$  і  $x = l$

$$F_{\text{д}} = F_0 \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\alpha_1}\right) \right], \quad (3.65)$$

- 2) для другого періоду динамічне зусилля в стрічці від власних і змущених коливань  $x = l$

$$F_c = F_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cdot (A_n \cdot \sin v_n \cdot t + B_{\text{II}} \cdot \cos v_n \cdot t); \quad (3.66)$$

$$F_e = F_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K_{\text{II}} \cdot (1 - \cos v_n \cdot t). \quad (3.67)$$

Підсумувавши рівняння (3.64) і (3.65), отримуємо вираз у вигляді ряду

$$F'_{\text{дш}} = F_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ L_n \cdot A_n \cdot \sin v_n \cdot t + (L_n \cdot B_n - C_n) \cdot \cos v_n \cdot t + C_n \right], \quad (3.68)$$

де

$$L_n = \frac{2 \cdot (\sin \delta_n + \alpha_2 \cdot \delta_n \cdot \cos \delta_n)}{\delta_n \cdot (1 + \alpha_2^2 \cdot \delta_n^2) + \frac{\sin 2\delta_n}{2} \cdot (\alpha_2^2 \cdot \delta_n^2 - 1) + 2 \cdot \alpha_2 \cdot \delta_n \cdot \sin^2 \delta_n}; \quad (3.69)$$

$\nu_c$  – частота власних коливань системи,  $c^{-1}$ ;

$$\nu_n = \frac{a \cdot \delta}{l} K_{\alpha}, \quad (3.70)$$

$\delta_n$  – власне число;

$K_{\alpha}$  – коефіцієнт демпфірування.

$$t_g \cdot \delta_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \delta_n}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \delta_n^2 - 1}, \quad (3.71)$$

$$A_n = -\frac{\delta_n \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + \delta_n^2 \cdot \alpha^2}, \quad (3.72)$$

$$B_n = \delta_n \cdot \left[ \frac{L_1 \cdot \delta_n (\alpha_1 + \alpha_2)}{1 + \alpha_1^2 \cdot \delta_n^2} - \alpha_2 \cdot \sin \delta_n - \frac{1 - \cos \delta_n}{\delta_n} \right], \quad (3.73)$$

$$C = \frac{(\alpha_2^2 \cdot \delta_n^2 - 1) \cdot \sin 2\delta_n - 2 \cdot \alpha_2 \cdot \delta_n \cdot \cos 2\delta_n}{\delta_n (1 + \alpha_2^2 \cdot \delta_n^2) + \frac{\sin 2\delta_n}{2} \cdot (\alpha_2^2 \cdot \delta_n^2 - 1) + 2 \alpha_2 \cdot \delta_n \cdot \sin^2 \delta_n}. \quad (3.74)$$

Для практичних розрахунків максимальне значення  $F_{\text{дин}}$  можна визначити по формулі

$$F''_{\text{дин}} = F_0 \cdot \left[ \sqrt{L_1^2 \cdot A_1^2 + (L_1 \cdot B_1 - C_1)^2} + C_1 \right]. \quad (3.75)$$

Динамічні навантаження, які розраховуються за формулами (3.68) та (3.75), розрізняються незначно, що цілком допустимо для проведення динамічного аналізу реального транспортера.

Таким чином, розрахунок максимальних динамічних зусиль елеватора можна робити по формулі (3.64) (при  $t_p < \frac{l}{a}$ ) і (3.68) або (3.75) (при  $t_p > \frac{l}{a}$ ).

Динамічний коефіцієнт визначиться з виразу:

$$K_F = \frac{S_{max}^{cm} + W_o}{W_o}, \quad (3.76)$$

де  $S_{max}^{cm}$  – максимальне статичне зусилля при встановленому режимі, Н.

Максимальний динамічний момент на приводному валу під час пуску визначаємо за формулою:

$$M = F_{дин} \cdot R. \quad (3.77)$$

Для визначення динамічного навантаження, що діє на стрічку елеватора, та оптимального часу пуску елеватора складена програма по блок-схемі, яка показана на рис. 3.8.

В блоці 1 починається виконання алгоритму.

В блоці 2 вводяться вхідні дані.

В блоках 3, 5, 6 визначаються параметри системи.

В блоці 4 перевіряється умова роботи елеватора.

В блоці 7 визначається значення динамічного зусилля при невеликій довжині елеватора.

В блоках 8 – 13 визначаються коефіцієнти, що входять в загальне рішення рівняння (3.75).

В блоці 14 визначається оптимальний час пуску елеватора.

В блоках 15, 16 визначаються максимальні навантаження на приводний вал елеватора.

В блоці 17 відбувається вивід отриманих результатів.

В блоці 18 припиняється розрахунок по програмі.

При складанні програми були прийняті наступні припущення:

- маса вантажу, що переміщується, постійна й рівномірно розподілена по поверхні;
- відсутнє буксування стрічки;
- нехтуємо подовженням стрічки;
- рух машини по полю не враховується;
- швидкість і напрямок вітру не враховуються.



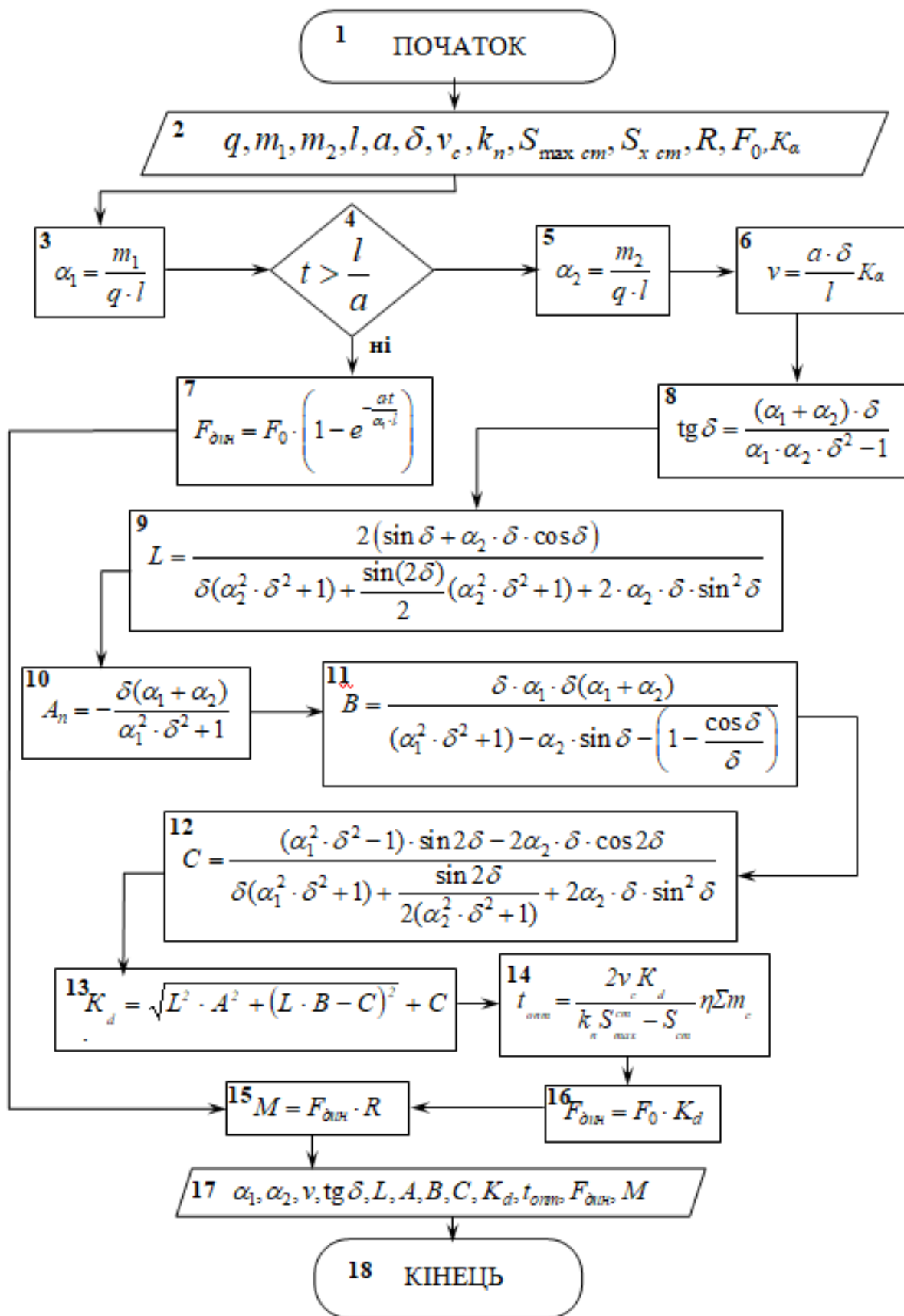


Рис. 3.8. Блок-схема алгоритму визначення динамічного навантаження, що діє на стрічку елеватора

### 3.4. Визначення параметрів демпфіруючого пристрою

З метою більш всестороннього вивчення процесу й скорочення обсягів експериментальних робіт проведено відповідні теоретичні дослідження процесу пуску елеватора з демпфіруючим пристроєм – пружною муфтою.

Муфта, що пропонується, складається (рис.3.9) [89] з ведучої *1* та веденої *2* напівмуфт. На обох напівмуфтах виконано отвори, в які вставлено пружні стержні *3*. Стержні, що з'єднують обидві напівмуфти, кріпляться за допомогою шплінтів *4*.

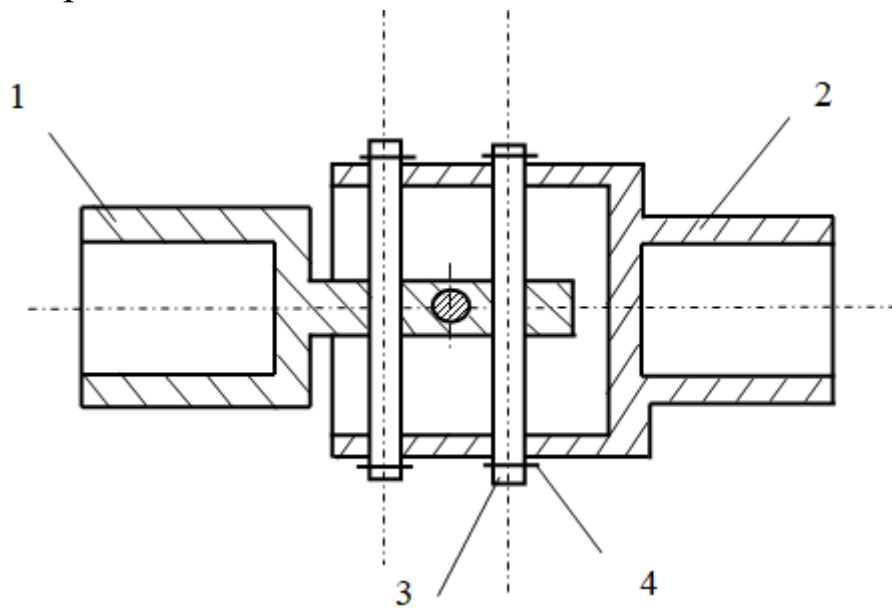


Рис. 3.9. Схема демпфіруючого пристрою  
1 – ведуча напівмуфта; 2 – ведена напівмуфта;  
3 – пружний стержень; 4 – шплінт

Пристрій працює наступним чином. Обертаючий момент з приводного вала передається на ведучу напівмуфту *1* через шпонкове з'єднання. Далі через пружні стержні *3*, вставлені в обидві напівмуфти, рух передається на ведену напівмуфту *2* і далі на ведений вал. При значних динамічних навантаженнях під час пуску пружні стержні деформуються й збільшують час пуску.

Параметри демпфіруючого пристрою залежать від характеристик приводу машини. Підбором матеріалів пружних

стержнів можна змінювати жорсткість даного приладу, й, тим самим, впливати на час пуску елеватора.

Якщо враховувати, що під час пуску пружні стержні гасять коливання вала, то можна припустити, що пікові навантаження на вал будуть меншими, ніж при роботі з жорсткою муфтою [89]. Основний робочий елемент цієї муфти – пружний стержень. Зробимо оцінку пружного податливого стержня під впливом прикладених навантажень.

Розглянемо деформацію стержня при плоскому згині. Ось стержня під впливом навантаження скривляється, а поперечні перерізи повертаються й одночасно отримують поступове переміщення [90]. Підбором матеріалу та розрахунком його елементів на міцність визначаються основні розміри цього пристрою для будь-яких умов роботи.

Прогин та кут повороту являються переміщеннями перерізів стержня при згині. Деформація тієї чи іншої ділянки стержня визначаються його кривиною [91]. В загальному випадку поперечного згину рівняння має вигляд:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}, \quad (3.78)$$

де  $\rho$  – радіус кривизни ділянки зігнутої осі стержня, мм;

$M$  – згинаючий момент, Н·м;

$E$  – модуль пружності, Н/мм<sup>2</sup>;

$J$  – момент інерції перерізу, мм<sup>4</sup>.

Скористаємось рівнянням кривини плоскої кривої [91]:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.79)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (3.78) і (3.79), отримаємо диференціальне рівняння вигнутої осі:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (3.80)$$

Отримане рівняння являється нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, інтегрування якого досить складно. Тому замінюємо його приблизним рівнянням – рівнянням для малих переміщень. В знаменнику стоїть сума двох доданків

$$1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \Theta,$$

де  $\Theta$  – кут повороту перерізу, град.

При малих деформаціях величина другого доданку в багато разів менше першого ( $\operatorname{tg}^2 \Theta$  не перевищує 0,0004), тому цією величиною нехтуємо. Тоді отримуємо спрощене диференціальне рівняння пружної лінії:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}, \quad (3.81)$$

в якому величина згинаючого моменту  $M$  обчислюється для недеформованого стержня. За допомогою даного рівняння можна обчислювати переміщення в стержнях при будь-яких умовах навантаження.

Кути повороту  $\Theta$  й прогин  $y$  обчислюють послідовним інтегруванням основного диференціального рівняння (3.81). Проінтегрувавши це рівняння перший раз, отримаємо вираз для кута повороту  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EJ} dx + C, \quad (3.82)$$

який містить одну довільну постійну  $C$ . Інтегруючи другий раз, знаходимо вираз для прогину  $y$ :

$$y = \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + Cx + D, \quad (3.83)$$

який містить дві довільних постійні. Значення постійних  $C$  і  $D$  визначають з умов закріплення стержнів. Для нашого випадку  $y = 0$ ;  $\Theta = 0$ .

Рівняння пружної лінії іноді зручно записати в іншій формі, вважаючи заданими не момент, а навантаження  $q$ .

Розглянемо приклад визначення деформації стержня методом безпосереднього інтегрування основного диференційного рівняння (3.81) [92, 93]. Визначимо  $\Theta_{max}$  і  $y_{max}$  для консолі постійного поперечного перерізу з зосередженою силою  $P$  на вільному кінці.

Згинаючий момент в перерізі  $x$  будемо обчислювати як результат дії зовнішніх сил, розташованих зліва від перерізу:  $M = -Px$ . Підставляючи вираз для  $M$  в рівняння (3.81), отримаємо

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ_{н.л.}}, \quad (3.84)$$

де  $J_{н.л.}$  – момент інерції перерізу відносно нейтральної лінії,  $\text{мм}^4$ .

Інтегруємо двічі й знаходимо вирази для кута повороту і для прогину:

$$\Theta = -\frac{Px^2}{2EJ_{н.л.}} + C;$$

$$y = -\frac{Px^3}{6EJ_{н.л.}} + Cx + D.$$

Для визначення постійних  $C$  і  $D$  приймаємо такі граничні умови:

- 1) при  $x = l$ ,  $y = 0$ ;
- 2) при  $x = l$ ,  $\Theta = 0$ .

Із другої умови  $\Theta(l) = -\frac{Pl^2}{2EJ_{н.л.}} + C,$

звідки

$$C = \frac{P\ell^2}{2EJ_{н.л.}}. \quad (3.85)$$

Тоді  $y = -\frac{Px^3}{6EJ_{н.л.}} + \frac{Px^2}{2EJ_{н.л.}}x + D$ .

З першої умови

$$y(\ell) = -\frac{P\ell^3}{6EJ_{н.л.}} + \frac{P\ell^2}{2EJ_{н.л.}}\ell + D = 0,$$

звідки

$$D = -\frac{P\ell^3}{3EJ_{н.л.}}. \quad (3.86)$$

Остаточно рівняння прогину й кута повороту наступні:

$$y = -\frac{P}{6EJ}(x^3 - 3\ell^2x + 2\ell^3) = -\frac{P\ell^3}{6EJ}\left[2 - 3\frac{x}{\ell} + \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]; \quad (3.87)$$

$$\Theta = -\frac{P}{2EJ}(x^2 - \ell^2) = \frac{P\ell^2}{2EJ}\left[1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]. \quad (3.88)$$

Пружна лінія стержня [94] представляє собою параболу третього степеню. Як легко перекопати, максимальні значення кута повороту і прогину стержня  $\Theta_{max}$  і  $y_{max}$  мають місце на вільному кінці стержня (при  $x = 0$ ), отже

$$y_{max} = -\frac{P\ell^3}{3EJ}; \quad (3.89)$$

$$\Theta_{max} = \frac{P\ell^2}{2EJ}. \quad (3.90)$$

Порівнюючи вирази (3.82), (3.83) для довільних постійних з виразами (3.90), (3.89) для  $\Theta_{(0)}$  і  $y_{(0)}$ , бачимо, що  $C$  дорівнює куту повороту на вільному кінці консолі (при  $x = 0$ ), а  $D$  дорівнює прогину вільного кінця консолі (при  $x = 0$ ).

Для визначення розмірів нормального перерізу пружного стержня скористуємося умовою міцності при дії згину

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_{H.L.}} \leq \sigma_y, \quad (3.91)$$

де  $W_{H.L.}$  – момент опору перерізу відносно нейтральної лінії;

$$W_{H.L.} = \frac{\pi d^3}{32};$$

$\sigma_y$  – границя пружності матеріалу стержня, МПа.

З умови міцності (3.91) визначається діаметр стержня

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi\sigma_y}}. \quad (3.92)$$

Номінальний момент гідродвигуна  $M_H = 304$  Н·м. Приймається пристрій з трьома пружними стержнями, границя пружності  $\sigma_y = 280$  МПа. Діаметр стержня  $d = 12$  мм.

### 3. 5. Визначення параметрів пруткового елеватора

#### 3.5.1. Визначення приведених мас і моментів інерції елементів елеватора

Для динамічного розрахунку пруткового елеватора необхідно знати його параметри.

Орієнтовно визначаємо необхідний крутячий момент на приводному валу елеватора за формулою (3.22). Підрахуємо складові цієї формули.

Приведений момент інерції обертювих частин на валу двигуна

$$J_1 = kmR^2, \quad (3.93)$$

де  $m$  – маса приводного вала елеватора, кг;

$R$  – радіус вала, мм;

$k$  – коефіцієнт, враховуючий конструкцію вала,  $k = 0,5$  [95].

Приведений момент інерції завантаженого елеватора

$$J_2 = \frac{v^2}{\omega^2} m_2, \quad (3.94)$$

де  $v$  – поступова швидкість полотна елеватора, м/с;

$\omega$  – кутова швидкість приводного вала елеватора, рад/с;

$m_2$  – маса завантаженого елеватора, кг.

Довжина полотна елеватора досить значна, маса його співмірна з масою вантажу. Тому її слід враховувати в розрахунках. Маса завантаженого елеватора складається з маси рухомих частин транспортера і маси вантажу  $m_g$ :

$$m_2 = m_g + m_e. \quad (3.95)$$

де  $m_e$  – маса елеватора, кг;

$m_g$  – маса вантажу, кг.

Визначаємо маси рухомих частин транспортера і маси вантажу. Маса елеватора:

$$m_e = (2q + q_{np})l, \quad (3.96)$$

де  $q_{np}$  – розподілена маса вантажу, кг/м.

Маса елеватора  $m_e = 74$  кг. Маса частин завантаженого елеватора, що рухаються поступово  $m_2 = 174$  кг.

Приведений момент інерції завантаженого елеватора  $J_2 = 9,6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ .

Приведена маса частин гідроприводу елеватора, що обертаються, знаходиться за аналогією з приведеною масою електроприводу (3.58):

$$m_1 = \frac{\beta_1 J_{2M} \cdot i^2}{D_6^2}, \quad (3.97)$$

де  $J_{2M}$  – момент інерції обертових мас гідромотора,

$J_{2M} = 0,066 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  (дані заводу виготовника);

$i$  – передаточне число механізму.



$$m_1 = 3,2 \text{ кг.}$$

### **3.5.2. Визначення жорсткостей пружних елементів елеватора**

Для рішення деяких питань динаміки пруткових транспортерів й для розрахунку натягу в гілках полотна елеватора необхідно знати жорсткість полотна. Вали, їх опори й зірочки або барабани можна приймати абсолютно жорсткими.

Дослідження показують, що в загальному випадку сила, що розтягує полотно елеватора й пружне подовження полотна пов'язані нелінійно, причому по мірі зростання навантаження жорсткість полотна зростає. Спостерігається також змінення жорсткості, що викликано приробітком прутків, зносом під час експлуатації тощо. Тому для практичних розрахунків можна підрахувати приблизну жорсткість полотна.

Пружні властивості тягового елемента елеватора надають суттєвого впливу на його працездатність внаслідок дії динамічних навантажень. Однак пружність ланцюгів та комбінованих полотен ще недостатньо вивчена й відсутня загальна методика її дослідження й визначення. Найбільшу складність надає визначення приведеної жорсткості гілки полотна, так як воно складається з великої кількості елементів.

Полотно, як пружний елемент, під дією сили подовжується, причому величина подовження залежить від конструкції, розмірів, матеріалу, технології виготовлення й виду з'єднання його деталей. Пружне подовження обумовлено контактними деформаціями в з'єднаннях та деформаціями гуми.

В прутковому елеваторі при складанні з'єднують заклепками і всі елементи ланок працюють разом. Завдяки пружним властивостям полотна динамічні навантаження передаються від прутка до прутка по всій гілці не миттєво, а протягом деякого часу зі швидкістю розповсюдження пружної хвилі. Чим довше ведуча гілка полотна,

тим більше впливають коливання на зменшення динамічних навантажень, виникаючих внаслідок нерівномірного руху полотна.

Основним тяговонесучим елементом елеваторів є транспортерна прогумована стрічка певної пружності та жорсткості. Особливості структури гуми обумовлюють її в'язко-пружне поведіння при деформуванні. Під впливом зовнішньої сили макромолекули гуми витягаються пропорційно величині прикладеного зусилля. Якщо при цьому молекулярна сітка не руйнується, то розміри зразка після зняття навантаження відновлюються до первісних, а між напруженням і деформацією існує лінійна залежність. Така деформація називається пружною і підкоряється закону Гука.

Під дією прикладеного навантаження спочатку відбувається пружна деформація, яка дорівнює  $\sigma_1/E_1$  (відношення напруження до модуля пружності), після чого зразок буде зазнавати високоеластичну деформацію, зв'язану з витягуванням і орієнтацією макромолекул і асимптотично сягаючи деякого рівноважного значення  $\sigma_1/E_2$ . При знятті навантаження пружна деформація зникає миттєво, високоеластична – поступово, а пластична залишається необоротною [96, 97].

Для характеристики напруженого стану стрічки існують лише дві незалежні пружні константи: напруження  $\sigma$ , які приходяться на одиницю площі поперечного деформованого перетину ( $\sigma = P/F$ ), і пружна деформація  $\varepsilon$ , обумовлена збільшенням довжини зразка  $\Delta l$  до його первісної довжини  $l$  ( $\varepsilon = \Delta l / l$ ). Загальний вид кривої напруження – деформація, типової для гуми, показаний на рисунку 3.10.

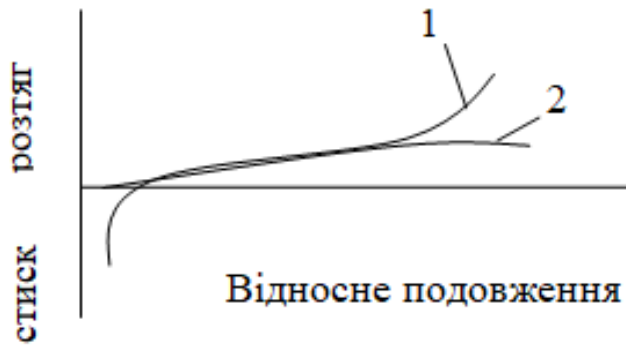


Рис 3.10. Залежність напруження – деформація для гум:

1 – експериментально; 2 – за законом Гука

При малих деформаціях, коли зв'язок  $\sigma - \epsilon$  можна вважати лінійним, користуються законом Гука  $\sigma = E\epsilon$ . При нелінійній залежності  $\sigma - \epsilon$  модуль пружності може бути знайдений тільки в диференціальній формі. Цей розрахунок досить складний, тому на практиці використовуються наближені розрахунки. Вважаємо, що при малих деформаціях гума діє за законом Гука, при значних розтяганнях необхідні залежності одержуємо з експерименту.

### 3.5.3. Визначення кута кочення вантажу

Кут нахилу робочої гілки пруткового елеватора повинен бути таким, при якому не відбувається сповзання маси під ухил. Якщо елеватор розташований на початку технологічної схеми машини (за лемешем), то повинна бути витримана умова [98]  $\text{tg}\alpha < f$ . Тому тангенс кута нахилу елеватора, полотно якого не має додаткових зачепів, не повинен перевищувати коефіцієнт тертя матеріалу по металу  $f = 0,4$  [99]. Якщо елеватор розташований у середині схеми машини, тобто на його робочій поверхні знаходяться в основному бульби і грудки ґрунту, то необхідно витримувати умову  $\text{tg}\alpha < \text{tg}\varphi$ , де  $\varphi$  – кут тертя кочення плодів і комків по поверхні елеватора, який становить  $10...15^\circ$  [58].

При оцінці кута  $\alpha$  треба враховувати, що з його збільшенням збільшується відсоток сепарації ґрунту і поліпшується компонування машини. За наявності у купі вороху крім округлих плодів та

комків ґрунту і прутків, вигнутих у різні сторони, кут нахилу елеватора збільшується до 20...25°.

Для визначення дійсного кут тертя кочення плодів і комків по поверхні елеватора проведено експериментальні досліді. Встановлено кут нахилу полотна елеватора 28...30°.

### 3.6. Визначення оптимального часу пуску елеватора і коефіцієнту динамічності

Тривалість часу пуску елеватора при змінній швидкості за параболічним законом [80] визначиться з виразу:

$$t_{II} = \frac{2\omega J_{PP}}{\Delta M_{max}}, \quad (3.98)$$

де  $J_{PP}$  – приведений до валу двигуна момент інерції мас елеватора, що обертаються і рухаються поступово, кг·м<sup>2</sup>;

$$\Delta M_{max} – \text{максимальний надлишковий момент; } \Delta M_{max} = \frac{F_0 D_6}{2i\eta},$$

Н·м;

$\eta$  – к.к.д. приводу.

Приведений момент інерції системи складається з моментів інерції мас елеватора, що обертаються і рухаються поступово:

$$J_{PP} = \frac{\beta_1 (G \cdot D^2)_I}{4} + \frac{v^2}{\omega^2} \left( m_2 + \frac{2S_{max}^{cm}}{\omega_e} q_6 \right), \quad (3.99)$$

де  $w_0 = (q_6 + q)(f + \sin\alpha) + w_p + q(f - \sin\alpha) + w_H$ ;

$\alpha$  – кут нахилу елеватора, град.;

$q_6$  – розподілена вага вантажу, Н/м;

$f$  – коефіцієнт опору руху завантаженої гілки;

$w_p, w_H$  – питомий опір роликкоопор робочої та неробочої гілок, Н/м.

Швидкість руху полотна  $v = \frac{\pi D_6 n}{60i}$ , м/с.

Підставивши в формулу (3.98) значення складових, отримаємо:

$$t_{II} = \frac{2v}{F_0} \left[ \beta_1 (G \cdot D^2)_I \frac{i^2}{D_6^2} + m_2 + \frac{2S_{max}^{cm}}{\omega_e} q \right] \eta. \quad (3.100)$$

Найбільш сприятливим варіантом для роботи елеватора в пусковий період буде такий, при якому буде виконуватися умова:

$$S_{cm} + S_{дин} \leq S_{max}^{cm}, \quad (3.101)$$

де  $S_{cm}$  – максимальне статичне зусилля при незавантаженій стрічці, Н;

$S_{дин}$  – максимальне динамічне зусилля, Н.

Перетворивши умову (3.101) у вигляді:

$$\frac{S_{cm} + S_{дин}}{S_{max}^{cm}} = k_n, \quad (3.102)$$

отримаємо коефіцієнт перевантаження стрічки під час пуску  $k_n$ .

Мінімальне значення коефіцієнта перевантаження буде при  $S_{дин} = 0$ .

Використовуючи рівняння (3.75), (3.102) і позначивши

$$K_d = \sqrt{L^2 \cdot A^2 + (L \cdot B - C)^2} + C,$$

визначимо оптимальний час пуску елеватора

$$t_{opt} = \frac{2v K_d}{k_n S_{max}^{cm} - S_{cm}} \eta \Sigma m_c, \quad (3.103)$$

де  $\Sigma m$  – сума приведених мас елеватора, що обертаються і рухаються поступово.

Сила статичного опору руху стрічки транспортера

$$W_o = (q_B + q_C) l \cdot \sin \alpha \cdot f + (q_C + q_P) \omega_P \cdot l \cdot \cos \alpha. \quad (3.104)$$

Статичний момент опору руху  $M_c = W_o \cdot D_6 / 2$ .  $M_c = 45 \text{ Нм}$ .

Максимальний момент, що сприймається пружною ланкою,  $M_{max} = 648 \text{ Нм}$ .

Швидкість розповсюдження пружної хвилі  $a = 4,27 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ . Надлишкова сила  $F_o = 3036 \text{ Н}$ . Власне число  $\delta_n$  визначається з виразу (3.71):  $\text{tg } \delta_n = 3,37$ ;  $\delta_n = 0,8$ .

Частота власних коливань системи  $\nu_n = 0,84 \cdot 10^{-3} \text{ 1/с}$ .

Коефіцієнти  $\alpha_1 = 4$ ;  $\alpha_2 = 2,35$ ;  $L_n = 0,594$ ;  $A_n = -0,452$ ;  $B_n = -0,216$ ;  $K_n = -0,154$ .

Максимальне динамічне зусилля в точці набігання стрічки на приводний барабан  $F_{\text{дин}} = 7086 \text{ Н}$ . Максимальний динамічний момент на приводному валу під час пуску  $M = 530 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Максимальне статичне зусилля при встановленому режимі  $S_{\text{max}}^{\text{cm}}$  і при незавантаженій стрічці  $S_{\text{cm}}$ , а також коефіцієнт демпфірування  $K$  визначаються з експерименту. Оптимальний час пуску  $t_{\text{онт}} = 0,26 \text{ с}$ . Коефіцієнт динамічності:  $K_F = 2,51$ .

## Література

1. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. Інженерна механіка: підручник / за ред. В.М. Булгакова. Вінниця: Нова Книга, 2006. Ч. 1: Теоретична механіка. 504 с.
2. Теоретична механіка: курс лекцій / В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, В.І. Васьков, І.В. Головач, Д.Г.Войтюк. Київ: НАУ, 2004. Ч. I. 368 с.
3. Теоретична механіка: курс лекцій / В.М. Булгаков, О.І. Литвинов, В.І. Васьков, І.В. Головач, Д.Г. Войтюк. Київ: НАУ, 2004. Ч. II. 342 с.
4. Теоретична механіка: посібник для практичних занять / В.М. Булгаков та ін.; за ред. С.І. Кучеренка. Ніжин, 2009. 639 с.
5. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. Київ: Радянська школа, 1955. 391 с.
6. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки / А.В. Каплунова та ін. Київ: Держсільгоспосвіта, 1961. 365 с.
7. Ledesta A.F. The combine of today was Born on Roman farm. *Power Farming*. 1955. Vol. 15. P. 146-148.
8. Погорелый Л., КовальС. Колосоуборки – “стрипперы-очесыватели” – фата-моргана или новая эра в зерноуборке? *Перспективные технологии уборки зерновых культур, риса и семян трав*: сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. Мелитополь: ТГАТА, 2003. Вип. 16. С. 31-57.
9. Арцыбашев Д.Д. Современные вопросы с.-х. механики. Колосоуборки (стрипперы, хедеры). Санкт-Петербург, 1908. 32 с.
10. Арцыбашев Д.Д. Комбайны, их современные конструкции и значение. Москва; Ленинград: Сельхозгиз., 1930. 131 с.
11. Пискунов Д.И. Колосоуборка “Массей-Гаррис” и ее работа в условиях южнорусского хозяйства. *Южно-Русская с.-х. газета*. 1910. №22, 23.

12. Усовский Б. Уборка урожая. *Южно-Русская с.-х. газета*. 1911. №38.
13. Пискунов Д.И. «О стриппере». *Южно-Русская с.-х. газета*. 1911. №43.
14. Известия бюро по сельскохозяйственной механике. 1913. Вып. 8. 877 с.
15. Исследование процесса обмолота на корню: отчет по НИР/ВИСХОМ. Москва, 1951. 37 с.
16. Исследование процесса обмолота зерновых культур на корню: отчет по НИР/ВИСХОМ. Москва, 1953. 32 с.
17. Воробьев В.И. О способе уборки риса очесом на корню. *Бюллетень НТИ ВНИИ риса*. 1972. Вып. 8. С. 60-63.
18. Повиляй В.М., Шабанов П.А. Исследование очесывающего устройства для обмолота риса на корню. *Бюллетень НТИ ВНИИ риса*. 1975. Вып. 13. С. 48-51.
19. А.с. 380269 СССР, МКИ А01D41/08. Устройство для обмолота зерновых культур на корню / В.И. Воробьев, Е.И. Конюшков. № 1689512/30-15; заявл. 0.08.71; опубл. 15.05.72; Бюл. №21.
20. Whole crop Harvesting is this wan. *Power Farming*. 1979. Vol. 57. P. 11-14.
21. Погорілий Л.В., Коваль С.М. Прогноз розвитку зернозбиральної техніки на початок ХХІ століття. *Техніка АПК*. 1996. №3. С. 2-7.
22. Шабанов П.А., Данченко Н. Н. Отраслевая научно-исследовательская лаборатория зерноуборочных машин Таврической государственной агротехнической академии. *Перспективы и технологии уборки зерновых культур, риса и семенников трав*: сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. Мелитополь. 2003. Вып. 13. С. 5-23.
23. Разработка и исследование технологии уборки зерновых культур методом очеса на корню: отчет по НИР / МИМСХ; рук. П.А. Шабанов. Тема 52. Мелитополь, 1979. 71 с.



24. Шабанов П.А. Механико-технологические основы обмолота зерновых культур на корню: дис... докт. техн. наук / МИМСХ. Мелитополь, 1988. 336 с.

25. А.с. 1165278 СССР,МКИ А01D 41/08. Устройство для обмолота сельскохозяйственных культур на корню / И.К. Голубев, Б.И. Гончаров, В.Н. Цыбульников и др. № 3633051/30-15; заявл. 24.05.83; опубл. 07.07.85; Бюл. № 25.

26. Голубев И.К. Обоснование основных параметров и режимов работы двухбарабанного устройства для очеса риса на корню: дис... канд. техн. наук. Москва, 1989. 201 с.

27. Отчет о проведении ФСА очесывающего адаптера-модуля / ЦНИИМЭСХ, НПО «БЕЛСЕЛЬХОЗМЕХАНИЗАЦИЯ». Минск, 1990. 37 с.

28. Использование метода ФСА + ТРИЗ для совершенствования очесывающего зерноуборочного устройства. Минск, декабрь, 1999. URL: <http://www.trizminsk.org/e/248013.htm> (дата звернення: 05.10.2020).

29. Скуратович А.И. Чуксин П.И., Шпаковский Н.А. Совершенствование очесывающей жатки с помощью метода «ФСА + ТРИЗ». URL: <http://www.trizminsk.org/e/20130424.htm> (дата звернення: 15.10.2020).

30. Обґрунтування параметрів роботи жнивarki обчісуyючого типу ЖОН-4 / С. Коваль та ін. *Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України* / УкрНДПВТ. Дослідницьке, 2004. С. 54-59.

31. Гольпяпин В.Я. Уборка зерновых культур и риса методом очеса. *Механизация и электрификация АПК: научно-технические достижения и тенденции развития*. Москва, 1991. Вып. 1. С. 4-10.

32. Разработать и внедрить перспективную технологию уборки зерновых культур в хозяйствах Приазовского района, обеспечивающую повышение производительности в 1,5-2,0 раза, снижение потерь зерна в 2-3 раза; отчет о НИР/МИМСХ; рук.

Н.Н. Данченко. Тема 0270-Х; №ГР01860043979. Мелитополь, 1987. 82 с.

33. Разработать и внедрить перспективную технологию уборки зерновых культур в хозяйствах Приазовского района, обеспечивающую повышение производительности в 1,5-2,0 раза, снижение потерь зерна в 2-3 раза; отчет о НИР/МИМСХ; рук. В.Н. Цибульников. Мелитополь, 1986. 67 с.

34. Разработать и внедрить перспективную технологию уборки зерновых в хозяйствах Приазовского района, обеспечивающую повышение производительности в 1,5-2,0 раза, снижение потерь зерна в 2-3 раза; отчет о НИР / МИМСХ; рук. П.А. Шабанов. Тема 0270 – Х; № ГР01860043979. Мелитополь, 1988. 44 с.

35. Кушнарев А.С., Леженкин А.Н. Энергосберегающая технология уборки зерновых для фермерских и крестьянских хозяйств. *Перспективные технологии уборки зерновых культур, риса и семян трав*: сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. Мелитополь, 2003. С. 17-21.

36. Леженкин А.Н. Перспективная технология уборки зерновых для фермерских и крестьянских хозяйств Юга Украины. *Актуальные проблемы инженерного обеспечения АПК*: междунар. науч. конф. Ярославль, 2003. Ч. III. С. 28-29.

37. Леженкин А. Уборка зерновых методом очесывания. *Сельский механизатор*. 2004. №11. С. 27.

38. Разработать очесывающее приспособление на базе энергосредства КПС – 5 Г для обмолота зерновых культур на корню: отчет о НИР / МИМСХ; рук. В.Н. Цибульников; исполн. А.Н. Леженкин и др. Тема 030 – Х. №ГР01860043979. Мелитополь, 1989. 26с.

39. Леженкин А.Н. Методология формирования энерго- и ресурсосберегающей технологии уборки зерновых культур в условиях фермерских хозяйств (на примере Украины): автореф. дис.... д-ра техн. наук: 05.20.01 / МГАУ. Москва, 2008. 34 с.

40. Леженкин А.Н. Машина с очесывающим устройством. *Сельский механизатор*. 2004. № 12. С. 2.
41. Причіпна збиральна машина: пат. 98161 Україна: МПК А01D41/08 (2006.01) / І.О. Леженкін, С.М. Григоренко; № 201408537; заявл. 28.07.2014; опубл. 27.04.2015. Бюл. №8.
42. Леженкин А.Н. Дифференциальные уравнения прицепного уборочного агрегата при прямолинейном и равномерном движении центра масс трактора. *Известия Международной академии аграрного образования*. Санкт-Петербург, 2008. Вып. 6, т.1. С. 76-84.
43. Гячев Л.В. Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов. Москва: Машиностроение, 1981. 206 с.
44. Леженкін О.М. Стійкість руху трактора при агрегуванні причіпного збирального агрегату. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Мелітополь, 2005. Вип. 31. С. 89-102.
45. Леженкін О.М. Диференціальні рівняння руху причіпної збиральної машини. *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин*. Кіровоград, 2010. Вип. 40, т. II. С. 57-65.
46. Леженкин А. Н. Анализ устойчивости движения прицепной уборочной машины очесывающего типа. *Известия Международной академии аграрного образования*. Санкт-Петербург, 2008. Вып. 7, т.1. С.110-115.
47. Леженкін О.М. Стійкість руху причіпа-возика для збирання очосаного вороху. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь, 2010. Вип. 10, т.2. С. 91-98.
48. Леженкін О.М. Стійкість руху причіпного збирального агрегату обчісуючого типу. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Мелітополь, 2005. Вип. 33. С. 26-46.
49. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд. Москва: Наука, 1966. 530 с.
50. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1971. 312 с.

51. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства: пособие для подготовительных отделений. Київ: Вища школа, 1981. 279 с.
52. Леженкін О.М. Методика визначення допустимих значень конструктивних параметрів причіпної збиральної машини. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь, 2015. Вип. 15, т.4. С.11-20.
53. Леженкин А.Н. Результаты экспериментальных исследований горизонтальных колебаний прицепного уборочного агрегата. *Механизация и электрификация сельского хозяйства*. 2008. №1. С. 7-8.
54. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва: Изд. физико-математической литературы, 1962. 564 с.
55. Лурье А.Б. Статистическая динамика сельскохозяйственных агрегатов. Ленинград: Колос, 1970. 376 с.
56. Гатаулин А.М. Система прикладных статистико-математических методов доработки экспериментальных данных в сельском хозяйстве. Москва: МСХА, 1992. Ч.1. 160 с.
57. Боровков А.А. Математическая статистика. Москва: Наука, 1984. 472 с.
58. Сільськогосподарські машини. Основи теорії та розрахунку: підручник / за ред. Д.Г. Войтюка. Київ: Вища освіта, 2005. 464 с.
59. Леженкин И.А. Статистический анализ содержания свободного зерна в очесанном ворохе озимой пшеницы. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь, 2013. Вип. 13, т.2. С. 183-189.
60. Леженкин И.А. Анализ содержания оборванных колосков в очесанном ворохе озимой пшеницы. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь, 2012. Вип. 12, т.5. С. 149-154.
61. Леженкин И.А. Статистическая модель содержания половы в очесанном ворохе озимой пшеницы. *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім.*

*П.Василенка.* Харків, 2013. Вип. 132: Технічні системи і технології тваринництва. С. 355-360.

62. Леженкин И.А. Математическая модель содержания соломы в очесанном ворохе озимой пшеницы. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.* Мелітополь, 2013. Вип. 13, т.3. С. 57-62.

63. Кюрчев С.В., Леженкин И.А. Статистические модели механико-технологических свойств очесанного вороха озимой пшеницы. *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин.* Кіровоград, 2013. Вип. 43, ч.1.С. 297-302.

64. Сельскохозяйственные машины: теория и технологический расчет / Б.Г. Турбин и др.; под ред. Б.Г. Турбина. Ленинград: Машиностроение, 1967. 584 с.

65. Физико-математические свойства растений, почв и удобрений / ВИСХОМ. Москва: Колос, 1973. 422 с.

66. Физико-механические свойства сельскохозяйственных растений: монография / М.Ф. Бурмистроваи др. Москва: Гос. изд.-во с.-х. лит., 1956. 343 с.

67. Механіко-технологічні властивості сільськогосподарських матеріалів: підручник / О.М. Царенко та ін.; за ред. С.С. Яцука. Київ: Мета, 2003. 448 с.

68. Сільськогосподарські та меліоративні машини: підручник / Д.Г. Войтюк та ін.; за ред. Д.Г. Войтюка. Київ: Вища освіта, 2004. 544 с.

69. Бель А.И. Оптимизация взаимосвязи между скоростями движения ножа и жатвенной машины. *Тракторы и сельхозмашины.* 1980. № 10. С. 21-22.

70. Бель А.И. Отгиб стеблей при срезе их жатвенным аппаратом. *Тракторы и сельхозмашины.* 1968. № 6. С. 36-38.

71. Семенов В.Д. Упругость стеблей сельскохозяйственных культур. *Механизация и электрификация сельского хозяйства.* 1971. № 1. С. 8-9.

72. Иванцов В.И., Солошенко О. И. Валковые жатки. Москва: Машиностроение, 1984. 200 с.
73. Теория, конструкция и расчет сельскохозяйственных машин / Е.С. Босой и др. Москва: Машиностроение, 1977. 568 с.
74. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва: Наука, 1981. 720 с.
75. Иванов М.Н. Детали машин: учебник. Москва: Высшая школа, 1976. 399 с.
76. Погорелый Л.В., Аюбов А.М. Теоретическое обоснование конструктивных параметров винтовой поверхности устройства для сбора пожнивных остатков. *Труды Таврической агротехнической академии*. Мелитополь, 1999. Вып. 1: Техника в сельскохозяйственном производстве, т.10. С.88-92.
77. Аюбов А.М. Теоретичні основи вибору параметрів пристрою для зрізання стебел с.-г. культур. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. Мелітополь, 1999. Вип.2, т.13. С.86-90.
78. Аюбов А.М. Теоретическое обоснование конструктивных параметров кожуха режущего аппарата шнекового типа. *Труды Таврической государственной агротехнической академии*. Мелитополь, 2000. Вып. 2, т.15. С. 104-109.
79. Вайнсон А.А. Подъемно-транспортные машины: Учебник. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Машиностроение, 1989. 536 с.
80. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин. Москва, 1962. 267 с.
81. Тарг М.С. Краткий курс теоретической механики: учебник. 10-е изд., перераб. и доп. Москва: Высшая школа, 1986. 416 с.
82. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. Вища математика: навчальний посібник. Мелітополь: МДПУ, 2015. Ч.1. 242 с.
83. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3: Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної.

Операційне числення. 2-е вид. доп. і доопр. / А.Д. Тевяшев та ін. Київ: Кондор, 2006. 608 с.

84. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие. Москва: Наука, 1985. Т.2. 560 с.

85. Шиманський І.Є. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1972. 632 с.

86. Василенко Н.В. Теория колебаний: учебное пособие. Київ: Высшая школа, 1992. 430 с.

87. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II: Динамика. Москва: Высшая школа, 1971. 488 с.

88. Кравець В.І., Назарова О.П., Богаєвська Н.В. Елементарна математика за 50 годин: навчальний посібник. Мелітополь, 2014. 214 с.

89. Пружна муфта: пат. 2075 Україна МПК F16D 3/56/ В.В. Крилов, О.О. Дереза. №2002129925; заявл. 10.12.02; опубл. 15.10.03, Бюл. №10.

90. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.

91. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Москва: Наука, 1978. 272 с.

92. Кагадій С.В., Дем'яненко А. Г., Гурідова В. О. Основи механіки матеріалів і конструкцій: навчальний посібник. Дніпропетровськ, 2011. 416 с.

93. Писаренко І.С. Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів: підручник / за ред. І.С. Писаренка. Київ: Вища школа, 1993. 655 с.

94. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1984. 831 с.

95. Основы теории и расчета сельскохозяйственных машин на прочность и надежность / П.М. Волков и др.; под ред. П.М. Волкова, М.М. Тененбаума. Москва: Машиностроение, 1977. 310 с.

96. Теория, конструкция и расчет сельскохозяйственных машин: учебник / Е.С. Босой и др.; под ред. Е.С. Босого. Москва: Машиностроение, 1977. 568 с.

97. Лурье А.Б., Громбчевский А.А. Расчет и конструирование сельскохозяйственных машин. Ленинград: Машиностроение, 1977. 528 с.

98. Диденко Н.Ф., Хвостов В.А., Медведев В.П. Машины для уборки овощей. Москва: Машиностроение, 1973. 280 с.

99. Теоретическая механика: Краткий справочник / Ю.М. Дронник и др. Харьков, 2007. 360 с.



## ДОДАТОК А

Таблиця А.1

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності розподілу вмісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	39	45	51	57	63	69	75	81
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	15	17	9	5	2	1	
Частота, $P_i$	0,02	0,3	0,34	0,18	0,1	0,04	0,02	
$P_i / \lambda$	0,0033	0,05	0,056	0,03	0,016	0,0066	0,003	

Таблиця А.2

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу вмісту вільного зерна в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	39	45	51	57	63	69	75	81
$f(\eta_s)$	0,009	0,03	0,047	0,046	0,026	0,008	0,0014	0,0001

Таблиця А.3

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності розподілу вмісту обірваних колосків в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	1,2	2,14	3,08	4,02	4,96	5,9	6,84	7,8
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	4	9	14	9	7	6	1	
Частота, $P_i$	0,08	0,18	0,28	0,18	0,14	0,12	0,02	
$P_i / \lambda$	0,085	0,19	0,3	0,19	0,15	0,13	0,02	

Таблиця А.4

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу вмісту обірваних колосків в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	1,2	2,14	3,08	4,02	4,96	5,9	6,84	7,8
$f_i(\eta_k)$	0,036	0,11	0,22	0,28	0,24	0,14	0,05	0,009

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності розподілу вмісту полови в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	5,0	6,3	7,6	8,9	10,2	11,5	12,8	14,1
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	6	11	12	10	8	2	
Частота, $P_i$	0,06	0,2	0,34	0,2	0,10	0,06	0,04	
$P_i / \lambda$	0,046	0,15	0,26	0,15	0,077	0,046	0,03	

Таблиця А.6

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу вмісту полови в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів	5,0	6,3	7,6	8,9	10,2	11,5	12,8	14,1
$f_i(\eta_n)$	0,034	0,09	0,16	0,19	0,16	0,09	0,03	0,007

Таблиця А.7

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності розподілу вмісту соломи в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	12	18	24	30	36	42	48	54
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	4	9	12	13	10	1	
Частота, $P_i$	0,02	0,08	0,18	0,24	0,26	0,20	0,02	
$P_i / \lambda$	0,003	0,013	0,03	0,04	0,043	0,033	0,003	

Таблиця А.8

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу вмісту соломи в обчисаному воросі озимої пшениці

Границя класів, %	12	18	24	30	36	42	48	54
$f(\eta_s)$	0,0016	0,0086	0,026	0,046	0,047	0,028	0,009	0,0018

## Продовження додатка А

Таблиця А.9

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу довжини зернівки озимої пшениці

Границя класів	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	2	12	14	12	7	2	
Частота, $P_i$	0,02	0,04	0,24	0,28	0,24	0,14	0,04	
$P_i/\lambda$	0,05	0,1	0,6	0,7	0,6	0,35	0,1	

Таблиця А.10

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
довжини зернівки озимої пшениці

Границя класів, мм	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
$f(l_s)$	0,03	0,1	0,5	0,6	0,7	0,5	0,2	0,03

Таблиця А.11

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу товщини зернівки озимої пшениці

Границя класів	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	5	11	15	10	7	1	
Частота, $\sum P_i = 1$	0,02	0,1	0,22	0,3	0,2	0,14	0,02	
$P_i/\lambda$	0,1	0,5	1,1	1,5	1	0,7	0,1	

Таблиця А.12

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
товщини зернівки озимої пшениці

Границя класів, мм	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(h_s)$	0,05	0,24	0,724	1,294	1,38	0,9	0,35	0,09

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу ширини зернівки

Границя класів	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	3	6	8	16	15	1	
Частота, $P_i$	0,02	0,06	0,12	0,16	0,32	0,3	0,02	
$P_i/\lambda$	0,1	0,3	0,6	0,8	1,6	1,5	0,1	

Таблиця А.14

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
ширини зернівки

Границя класів, мм	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
$f(a_s)$	0,034	0,18	0,579	1,14	1,39	1,03	0,476	0,13

Таблиця А.15

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу діаметра соломини

Границя класів	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,7	4,0
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	2	9	15	11	9	3	1	
Частота, $P_i$	0,04	0,18	0,3	0,22	0,18	0,06	0,02	
$P_i/\lambda$	0,13	0,6	1,0	0,73	0,6	0,2	0,06	

Таблиця А.16

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
діаметра соломини

Границя класів, мм	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,7	4,0
$f(d_c)$	0,11	0,36	0,72	0,91	0,72	0,36	0,11	0,01

Продовження додатка А

Таблиця А.17

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу довжини соломини

Границя класів	30	90	150	210	270	330	390	450
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	4	10	13	12	9	1	
Частота, $P_i$	0,02	0,08	0,2	0,26	0,24	0,18	0,02	
$P_i/\lambda$	0,003	0,013	0,033	0,043	0,04	0,03	0,003	

Таблиця А.18

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
довжини соломини

Границя класів, мм	30	90	150	210	270	330	390	450
$f(l_c)$	0,0015	0,0073	0,022	0,041	0,039	0,031	0,013	0,0033

Таблиця А.19

Результати розрахунків експериментальної кривої щільності  
розподілу довжини колосків

Границя класів	3	5	7	9	11	13	15	17
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	10	15	12	7	4	1	
Частота, $P_i$	0,02	0,2	0,3	0,24	0,14	0,08	0,02	
$P_i/\lambda$	0,01	0,1	0,15	0,12	0,07	0,04	0,01	

Таблиця А.20

Результати розрахунків теоретичної кривої щільності розподілу  
довжини колосків

Границя класів, мм	3	5	7	9	11	13	15	17
$f(l_k)$	0,017	0,06	0,11	0,14	0,11	0,05	0,014	0,002

Таблиця А.21

Результати розрахунків експериментальної кривої розподілу щільності обчисаного вороху

Границя класів	80	94	108	122	136	150	164	178
Кількість вимірювань в класі, $n$ ( $\sum n = 50$ )	1	6	11	12	10	8	2	
Частота, $P_i$	0,02	0,12	0,22	0,24	0,2	0,16	0,04	
$P_i / \lambda$	0,001	0,009	0,016	0,017	0,014	0,011	0,003	

Таблиця А.22

Результати розрахунків теоретичної кривої розподілу щільності обчисаного вороху

Границя класів, мм	80	94	108	122	136	150	164	178
$f(\rho_s)$	0,0011	0,0046	0,011	0,02	0,02	0,011	0,0046	0,0011



**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ  
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН ТА АГРЕГАТІВ**

**Монографія**

Таврійський державний агротехнологічний університет  
імені Дмитра Моторного

Надруковано з оригіналів макетів замовника  
Підписано до друку 22.06.2021 р. формат 60x84 1/16  
Папір офсетний. Наклад 100 примірників  
Замовлення № 244

**ПП Верескун В.М.**  
**Видавничо-поліграфічний центр «Люкс»**  
**м. Мелітополь, вул. М. Грушевського, 10 тел. (0619) 44-45-11**

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виробників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
від 11.06.2002 р. серія ДК № 1125



