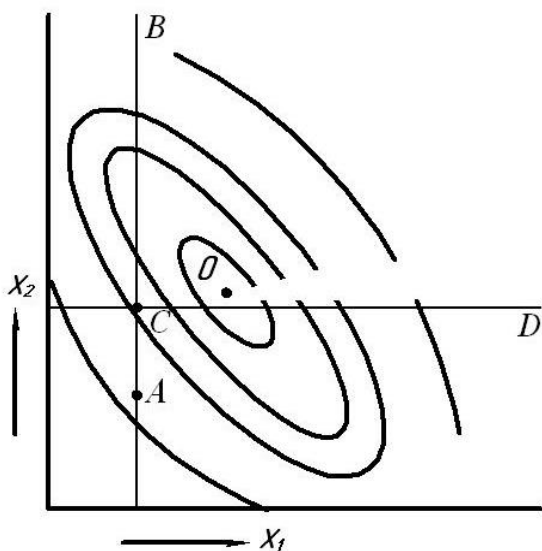
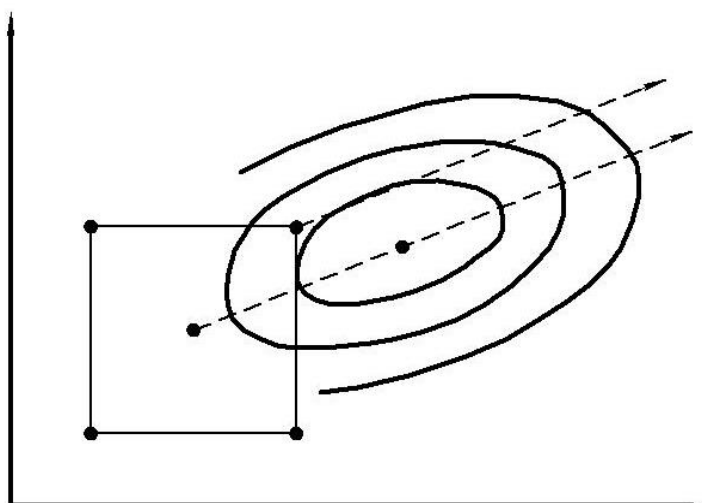
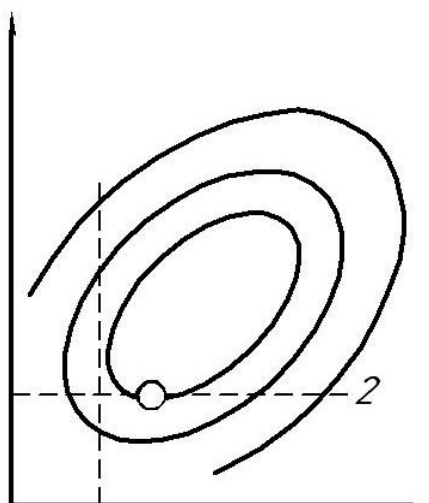


Г.Н. НАЗАРЬЯН  
 М.В. ПОСТНИКОВА  
 А.П. КАРПОВА

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА



$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$
-	-	+
+	+	+
+	-	-
-	+	-



**ТАВРИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Г.Н. Назарьян, М.В. Постникова, А.П. Карпова**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
ОБЪЕКТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ  
МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Научно-методическое пособие**



**Мелитополь  
“Люкс”  
2012**

ББК 22.16:40.7я7

Н19

УДК 519.24.001:631(07)

Рецензенты: В.А. Дидур, доктор техн. наук, профессор ТГАТУ  
С.А. Квитка, канд. техн. наук, доцент ТГАТУ

Одобрено Методической комиссией Энергетического факультета ТГАТУ и рекомендовано к использованию в учебном процессе

Протокол № 7 от 28.03.2012 г.

Назарьян Г.Н., Постникова М.В., Карпова А.П.

Н19 Решение задач оптимизации объектов исследования методом планирования математического эксперимента / Г.Н. Назарьян, М.В. Постникова, А.П. Карпова. – Мелитополь: “Люкс”, 2012. – 68 с.

В Пособии рассматриваются особенности и назначение метода планирования математического эксперимента (ПМЭ), которое состоит в перестройке исходной математической модели объекта исследования в модель в виде уравнения регрессии второго порядка, удобного для решения задачи анализа и оптимизации объекта. Пособие включает четыре главы, в которых рассматриваются примеры решения задач анализа и оптимизации методом ПМЭ различных объектов исследования с подробным изложением методологии перестройки исходной математической модели объекта и графоаналитическим исследованием области оптимума объекта с использованием канонического преобразования уравнения регрессии и метода двумерных сечений.

Пособие предназначено для дипломников, магистров и аспирантов вузов, а также может быть полезным для преподавателей при выполнении госбюджетных НИР и диссертационных работ.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ И ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ПМЭ

---

“Примеры также поучительны, как и правила”.  
И. Ньютон

В настоящее время для решения научных задач анализа и синтеза объектов исследования различной сложности и физической природы в науке, технике, производстве и других сферах, наиболее широкое применение получили методы планирования эксперимента [1-7]. При этом теория и практика планирования эксперимента характеризуются высоким уровнем развития и позволяют получать при минимальном числе опытов достоверную математическую модель объекта исследования и при решении задачи оптимизации определять оптимальные условия его функционирования. К числу первых публикаций по обоснованию и применению метода *планирования математического эксперимента (ПМЭ)* можно отнести работы [8, 9], посвящённые оптимизации проектирования шаговых и асинхронных микродвигателей с применением ЦВМ. Большие возможности использования метода ПМЭ в электромеханике показаны в [6]. Важным достоинством метода ПМЭ являются малые материальные затраты на научные исследования в сравнении с планированием и проведением натуральных экспериментов. Это обстоятельство и обусловило большой интерес и применение метода ПМЭ при проведении НИР в условиях вузов и НИИ. Об этом свидетельствуют работы [10-13], опубликованные в последнее время и посвящённые методологии перестройки исходных математических моделей различных объектов исследования в модель в виде уравнений регрессии, удобных для решения задач анализа и оптимизации объекта. На основании этих работ и составлено данное пособие. Необходимость перестройки исходной математической модели объекта исследования обусловлено тем, что такая модель обычно формируется на основе анализа состояния вопроса по литературным источникам и, как правило, представляет собой некоторый набор уравнений, эмпирических соотношений, графических зависимостей и т.п. Решение задачи анализа и оптимизации на такой модели практически невозможно. По существу, перестройка модели является интерполяционной задачей получения с достаточной точностью алгебраической аппроксимации многомерных зависимостей, представленных в исходной модели в неявном виде. Поэтому обычные методы интерполяции с помощью формул, рекомендуемых в вычислительной математике, оказываются непригодными для многомерных функций. В тоже время подобные интерполяционные задачи сравнительно легко решаются с требуемой точностью при использовании метода ПМЭ.

Название метода объясняется тем, что методология перестройки исходной математической модели объекта исследования полностью основана на использовании математического аппарата и методики классической теории планирования эксперимента [1-7]. При этом в методе ПМЭ под “экспериментом” подразумевается *совокупность аналитических расчётов* значений функции це-

ли или параметра оптимизации с помощью математической модели объекта в соответствии с построчными значениями факторов, представленными в матрице принятого плана эксперимента. Важная также особенность метода ПМЭ состоит в следующем. Поскольку результаты расчётов значений функции цели “у” по исходной математической модели объекта представляют собой однозначные величины, то при использовании метода ПМЭ будет отсутствовать дисперсия воспроизводимости “опытов”  $S_B^2\{y\}$  и отпадает необходимость проведения параллельных опытов при одних и тех же значениях факторов и рандомизации “опытов” при их проведении.

Отсутствие дисперсий воспроизводимости функции цели не позволяет получить математическое описание объекта исследования в виде уравнений регрессий с ограниченным числом членов, поскольку не представляется возможность проводить статистическую оценку значимости коэффициентов и адекватности уравнения. Поэтому при использовании метода ПМЭ дисперсия воспроизводимости  $S_B^2\{y\}$  вводится **искусственно** и определяется по величине принимаемой допустимой ошибки расчётов, т.е.

$$S_B^2\{y\} = \sigma^2 = (3\sigma)^2, \quad (\text{П.1})$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия ошибки;

$\sigma$  – стандарт или средняя квадратическая ошибка.

Обычно задаются дисперсией ошибки, равной двум-трём стандартам  $\sigma$ , как это показано в (П.1). В этом случае все предпосылки регрессионного анализа соблюдаются.

Для нормального закона распределения стандарт принимается равным  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ . Полагая, например, что  $\sigma = 0,02$ , т.е. ошибка расчётов составляет 2%, то величина искусственно принятой дисперсии будет равна:

$$S_B^2\{y\} = (3\sigma)^2 = (3 \cdot 0,02)^2. \quad (\text{П.2})$$

Методология проведения перестройки математической модели объекта исследования методом ПМЭ с решением задачи анализа и оптимизации объекта подробно рассматриваются на конкретных примерах различных объектов исследования. При этом отличительная особенность изложения материала состоит в том, что в каждом примере подробно описывается методика решения задачи без ссылки на содержание других глав, что неизбежно привело к повторам в изложении методологии решения задач и сделано это авторами намеренно с целью удобства усвоения материала отдельно в каждом интересующем исследователя примере решения задачи оптимизации.

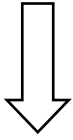
Данное Пособие предназначено для дипломников, магистров и аспирантов вузов, а также может быть полезным для преподавателей вузов при выполнении госбюджетных НИР и диссертационных работ.

Авторы весьма признательны рецензентам докт. техн. наук, профессору В.А. Дидуру и канд. техн. наук, доценту С.А. Квитке за полезные советы и ценные замечания по улучшению структуры и содержания рукописи Пособия.

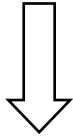
Авторы

$$W_{уд.} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{1i} \cdot K_3}{Q}$$

ПМЭ



ОЦКП



$$\hat{y} = 1,3403 - 0,876x_1 + 0,391x_2 + 0,379x_3 - \\ -0,237x_1x_2 - 0,229x_1x_3 + 0,102x_2x_3 + \\ + 0,147x_1^2 + 0,197x_2^2 + 0,197x_3^2$$

Целью исследования является обоснование оптимальных условий функционирования технологического процесса поточной линии, обеспечивающих минимальный расход электроэнергии на единицу продукции.

Номинальная производительность агрегата  $Q_n = 20$  т/ч. Обеспечивается работа поточной линии по шести технологическим схемам. Суммарная установленная мощность электродвигателей в приводе рабочих машин  $\sum_1^n P_{ni} = 32,6$  кВт. В соответствии с поставленной задачей, в качестве параметра оптимизации или функции цели принимается удельный расход электроэнергии при обработке зерна на единицу продукции  $W_{уд.}$ , кВт·ч/т.

### 1.1 Исходная математическая модель объекта исследования

На основании аналитического обзора обширной литературы по теории и практики обработки зерна современных зернопунктов АПК была сформирована математическая модель объекта исследования в виде уравнения

$$W_{уд.} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ni} \cdot K_3}{Q \cdot \eta_{н.ср.} \cdot K_{заг.} \cdot K_{увл.}}, \quad (1.1)$$

где  $\sum_{i=1}^n P_{ni}$  - суммарная номинальная мощность электродвигателей в приводе рабочих машин поточной линии, кВт;

$\eta_{н.ср.}$  - среднее значение номинальных КПД электродвигателей, о.е.;

$K_3$  - коэффициент загрузки оборудования поточной линии, о.е.;

$Q$  - производительность поточной линии, т/ч;

$K_{заг.}$ ;  $K_{увл.}$  - коэффициенты, учитывающие степень загрязнения и увлажнения обрабатываемого зерна, о.е.

Можно в уравнении (1.1) представить зависимость параметра оптимизации  $W_{уд.}$  в функции потребляемой мощности электродвигателей поточной линии

$$W_{уд.} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i1} \cdot K_3}{Q \cdot K_{заг.} \cdot K_{увл.}}, \quad (1.2)$$

где  $\sum_{i=1}^n P_{i1}$  - суммарная потребляемая или присоединённая мощность электродвигателей, кВт.

При этом

$$\sum_{i=1}^n P_{i1} = P_1 = \frac{P_{н1}}{\eta_{н1}} + \frac{P_{н2}}{\eta_{н2}} + \frac{P_{н3}}{\eta_{н3}} + \dots + \frac{P_{нn}}{\eta_{нn}}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

## 1.2 Выбор факторов и интервалов их варьирования

Производится на основе анализа априорной информации об объекте исследования, математической модели функции цели или параметра оптимизации (1.2) и общих требований к факторам при использовании методов планирования экспериментов [2-5, 7].

В качестве переменных факторов параметра оптимизации принимаются:

$Q$  – производительность поточной технологической линии зерноочистительного агрегата ЗАВ-20, т/ч;

$P_1$  - суммарная присоединённая мощность электродвигателей поточной линии, кВт;

$K_3$  – коэффициент загрузки оборудования, о.е.

Интервалы варьирования факторов выбраны в соответствии с реальными возможностями настройки рабочих машин технологической линии обработки зерна и приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Уровни варьирования факторов	Факторы в нормированных единицах	Факторы в физических единицах		
		Q, т/ч	P <sub>1</sub> , кВт	K <sub>3</sub> , о.е.
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
Верхний X <sub>i,в</sub>	x <sub>i,в</sub> = +1	20,0	26,0	0,8
Нижний X <sub>i,н</sub>	x <sub>i,н</sub> = -1	6,0	16,0	0,5
Базовый X <sub>i,0</sub>	x <sub>i,0</sub> = 0	13,0	21,0	0,65
Интервалы варьирования ΔX <sub>i</sub>	Δx <sub>i</sub> = ±1	7,0	5,0	0,15
Размеры звёздного плеча				
+α	+1,215	21,505	27,075	0,832
-α	-1,215	4,495	14,925	0,468



Нормализация факторов производится по формуле

$$x_i = \frac{X_i - X_{i,0}}{\Delta X_i}. \quad (1.3)$$

В соответствии с (1.3) нормированные значения факторов на разных уровнях будут равны

$$x_{i,0} = \frac{X_{i,0} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = 0; \quad x_{i,в} = \frac{X_{i,в} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = +1; \quad x_{i,н} = \frac{X_{i,н} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = -1. \quad (1.4)$$

### 1.3 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента

При решении задачи оптимизации сложных объектов исследования для адекватного описания области оптимума, как правило, используются полиномы второго порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i < j}^n b_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (1.5)$$

где  $y$  – функция цели;

$b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$  – коэффициенты уравнения регрессии;

$x_i, x_j, x_i^2$  – нормированные значения факторов.

Такая математическая модель может быть получена на основе планов второго порядка, например, ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) или ротатабельного центрального композиционного плана (РЦКП), а также  $\mathbf{D}$  – оптимальных планов.

В [1, 4, 5] рекомендуются для решения задач оптимизации планы ОЦКП второго порядка. ОЦКП – это планирование эксперимента на пяти уровнях, которые в нормализованных единицах можно представить в виде:

$$1) -\alpha; \quad 2) -1; \quad 3) 0; \quad 4) +1; \quad 5) +\alpha, \quad (1.6)$$

где  $\alpha$  – размер плеча звёздных точек.

Число точек факторного пространства и величины плеч звёздных точек при ОЦКП для различного числа факторов  $n$  приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 [5, 7]

Число факторов, $n$	2	3	4	5	6
Точек ПФЭ (ДФЭ)	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^{5-1}$	$2^{6-1}$
Звёздных точек	4	6	8	10	12
Центральных точек	1	1	1	1	1
Общее число точек	9	15	25	27	45
Размер плеча, $\alpha$	1,0	1,215	1,414	1,547	1,727

Матрица ОЦКП для трёх факторов представлена в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Матрица ОЦКП при трёх факторах

№ столбцов	1	2	3	4	5	6	7	8	9a	10a	11a	9	10	11	12	13
Группы точек	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$	$\hat{y}$
$N_\Phi$	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	1,666	1,678
	2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	0,5	0,748
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	2,708	2,62
	4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	0,813	0,962
	5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	2,666	2,58
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	0,8	0,954
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	4,333	4,15
	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	1,3	1,356
$N_a$	9	+1	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	2,341	2,363
	10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	0,702	0,611
	11	+1	0	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	-0,73	+0,746	-0,73	1,215	1,146
	12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	-0,73	+0,746	-0,73	1,974	1,928
$N_0$	13	+1	0	0	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	-0,73	-0,73	+0,746	1,227	1,158
	14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	-0,73	-0,73	+0,746	1,963	1,916
	15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	1,313	1,34

Для ОЦКП второго порядка критерием оптимальности является ортогональность всех векторов-столбцов матрицы плана, что обеспечивается двумя путями:

1. Преобразованием квадратичных членов  $x_i^2$  в новые, искусственные члены  $\tilde{x}_i^2$  (столбцы 9, 10 и 11) по формуле

$$\tilde{x}_{i,g}^2 = x_{i,g}^2 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2, \quad (1.7)$$

где  $i$  – номер фактора (1, 2, ..., n);

$g$  – номер строки матрицы плана (1, 2, ..., N);

$N$  – общее число строк матрицы плана, равное числу опытов.

$$N = N_\phi + N_\alpha + N_0. \quad (1.8)$$

2. Выбором определённой величины звёздного плеча для различного числа факторов и количества необходимых точек в центре плана  $N_0$  (табл. 1.2).

По матрице плана ОЦКП (табл. 1.3) производится расчёт значений “ $y$ ” по исходной математической модели объекта (1.2) для каждой строки  $g$  матрицы плана с учётом уровней факторов, указанных в столбцах матрицы и значений факторов, соответствующих этим уровням, приведенных в таблице 1.1. Результаты расчётов записываются в столбец №12 матрицы плана ОЦКП.

Далее для получения математической модели объекта исследования в виде уравнения регрессии (1.5) производится обработка результатов эксперимента (в нашем случае аналитических расчётов значений функции цели  $y$ ), которая в ПМЭ включает в себя:

- определение коэффициентов уравнения регрессии (1.5);
- статистическую оценку значимости коэффициентов регрессии;
- проверку адекватности полученной математической модели.

#### ***1.4 Определение коэффициентов уравнения регрессии и статистическая оценка их значимости***

Для ОЦКП коэффициенты  $\tilde{b}_0; b_1; \dots b_n; b_{ij}; b_{ii}$  регрессии определяются по уравнению

$$b_i = \frac{1}{\sum_{g=1}^N x_{i,g}^2} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g} \cdot y. \quad (1.9)$$

Здесь  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,

где  $k$  – порядковый номер столбца матрицы плана;

$y$  – значения функции цели, рассчитанные по исходной модели (1.2) и приведенные в столбце №12 матрицы плана.

Расчёты по (1.9) позволяют получить математическую модель для нормированных факторов, включающую преобразованные квадратичные члены

$$\hat{y} = \tilde{b}_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (1.10)$$

где  $\tilde{b}_0$  - преобразованный нулевой член уравнения.

С учётом формулы (1.7) для преобразования членов, получим уравнение регрессии для непреобразованных квадратичных членов

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2, \quad (1.11)$$

При этом

$$b_0 = \tilde{b}_0 - \sum_{i=1}^n b_{i,i} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2. \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при расчёте по (1.9) различных коэффициентов регрессии при ОЦКП знаменатель по формуле не будет одинаковым.

В результате расчётов по уравнению (1.9) и данным матрицы плана были получены следующие значения коэффициентов регрессии (1.10) и (1.11):

$$\tilde{b}_0 = 1,78; \quad b_1 = -0,876; \quad b_2 = 0,391; \quad b_3 = 0,379; \\ b_{12} = -0,237; \quad b_{13} = -0,229; \quad b_{23} = 0,102; \quad b_{11} = 0,147; \quad b_{22} = 0,197; \quad b_{33} = 0,197.$$

Коэффициент  $b_0$ , рассчитанный по уравнению (1.12), равен  $b_0 = 1,3403$ .

Статистическая оценка значимости коэффициентов регрессии (1.6) производится по  $t$ -критерию Стьюдента по соотношению

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_B\{y\}}, \quad (1.13)$$

и условию

$$t_p > t_r, \quad (1.14)$$

где  $|b_i|$  - абсолютное значение  $i$ -того коэффициента;

$S_B\{y\}$  - среднеквадратичное отклонение дисперсии или ошибки расчётов коэффициентов;

$t_p, t_r$  - расчётное и табличное значения критерия.

При этом, если расчётное значение  $t_{pi}$  окажется больше  $t_r$ , то коэффициент регрессии  $b_i$  признаётся значимым. В противном случае, т.е. при  $t_{pi} < t_r$ , коэффициент регрессии считается статистически незначимым. В соответствии с соотношением (П.2) принимаем

$$S_B\{y\} = \sqrt{S_B^2\{y\}} = 0,06. \quad (1.15)$$

Табличное значение критерия  $t_r$  определяется по таблице критерия Стьюдента в Приложении А по числу степеней свободы  $f_0 = N \cdot (m-1)$  и уровню значимости  $\alpha$ . При  $f_0 = N \cdot = 15$  и  $\alpha = 0,1$  по таблице Приложения А  $t_r = 1,753$ .

В соответствии с (1.13) и (1.14) незначимым признаётся коэффициент регрессии  $b_{123} = 0,055$  и, следовательно, из уравнения регрессии (1.16) исключается слагаемое  $b_{123}x_1x_2x_3$  и уравнение регрессии окончательно примет вид

$$\hat{y} = 1,3403 - 0,876x_1 + 0,391x_2 + 0,379x_3 - 0,237x_1x_2 - 0,229x_1x_3 + 0,102x_2x_3 + 0,147x_1^2 + 0,197x_2^2 + 0,197x_3^2, \quad (1.16)$$

где  $\hat{y}$  - расчётное значение функции цели или параметра оптимизации.

Поэтому уравнение (1.16) получило название расчётного уравнения регрессии и представляет собой математическую модель объекта исследования.

С помощью формулы (1.3) также получено уравнение удельного расхода электроэнергии технологической линии через факторы в физических единицах

$$W_{уд.} = 7,3923 - 0,0621Q - 0,3417P_1 - 11,7363K_3 + 0,00004QP_1 + 0,002QK_3 + 0,2722P_1K_3 + 0,003Q^2 + 0,0079P_1^2 + 8,7556K_3^2. \quad (1.17)$$

### 1.5 Проверка адекватности модели

Для проверки адекватности модели по уравнению регрессии (1.16) производится расчёт значений  $\hat{y}$  для каждой строки матрицы плана эксперимента с учётом знаков и значений факторов. Результаты расчётов приведены в столбце №13 матрицы. Далее находится дисперсия адекватности модели по уравнению

$$S_{ад}^2 \{ \hat{y} \} = \frac{1}{N-d} \sum_{g=1}^N (y - \hat{y})^2, \quad (1.18)$$

где  $y$  и  $\hat{y}$  берутся из столбцов №12 и 13 плана эксперимента;

$d$  – число значимых коэффициентов включая и  $b_0$  или слагаемых в расчётном уравнении (1.16).

Если при решении конкретной задачи окажется, что все коэффициенты регрессии значимы, т.е.  $d = N$ , то следует разность  $(N - d)$  в знаменателе уравнения (1.18) принять равной единице.

В нашем случае  $N = 15$  и  $d = 9$ , следовательно,  $N - d = 5$ .

Адекватность модели проверяется по  $F$ -критерию Фишера:

$$F_p = \frac{S_{ад}^2 \{ \hat{y} \}}{S_B^2 \{ y \}}, \quad (1.19)$$

где  $F_p$  – расчётное значение критерия Фишера;

$S_B^2 \{ y \}$  - дисперсия воспроизводимости, определяется по (1.15).

Полученная математическая модель вида (1.16) признаётся адекватной, если для принятого уровня значимости  $\alpha$  и соответствующих чисел степеней

свободы выполняется условие

$$F_p < F_k = F_T, \quad (1.20)$$

где  $F_k$  - критическое значение критерия Фишера равное табличному  $F_T$ .

Величина критерия  $F_T$  определяется по таблицам  $F$ -критерия Приложения В. При этом степени свободы адекватности и воспроизводимости будут равны

$$f_{ad} = f_1 = N - d \text{ - по горизонтали таблицы;}$$
$$f_B = f_2 = N(m - 1) \text{ - по вертикали таблицы.}$$

Как отмечалось, в случае  $N = d$  принимается  $f_{ad} = 1$ .

В результате расчётов по (1.18) и (1.19) с учётом (1.15) получены значения

$$S_{ad}^2 = 0,01 \text{ и } F_p = 2,78 .$$

Так как  $f_{ad} = f_1 = N - d = 5$  и  $f_B = f_2 = N = 15$ , то принимая уровень значеня  $F$ -критерия  $\alpha = 0,05$ , получим  $F_T = 2,9$ .

Поскольку  $F_p = 2,78 < F_T = 2,9$ , математическая модель признаётся адекватной и с достаточной степенью достоверности описывает свойства объекта исследования.

Если при принятом уровне значимости  $\alpha$  значение  $F_p > F_T$ , то гипотеза адекватности отвергается и полученное уравнение признаётся неадекватным.

Возможные причины неадекватности полученной модели:

- интервалы варьирования факторов  $\Delta x_i$  слишком большие, поэтому модель грубо описывает рельеф поверхности отклика реального объекта;
- в эксперимент не включены факторы, существенно влияющие на свойства объекта исследования;
- сильное влияние неуправляемых и неконтролируемых факторов на величину функции отклика и др.

### ***1.6 Решение задачи оптимизации объекта исследования***

После получения адекватной математической модели второго порядка типа (1.16) необходимо определить координаты оптимума (максимума или минимума, если он существует) и изучить свойства поверхности отклика в окрестностях оптимума.

Задачи статической оптимизации объектов обычно решаются поисковыми методами, которые отличаются большим разнообразием. К основным методам можно отнести следующие: метод градиента, метод наискорейшего спуска, его модификации – метод крутого восхождения (градиентные методы), метод Гаусса-Зейделя, метод симплексов, метод случайного поиска и др. [1-5]. Существуют также математические преобразования, позволяющие получить графическую и аналитическую интерпретацию области оптимума. Обычно для этих целей используют каноническое преобразование математической модели и метод двумерных сечений поверхности отклика.

Для исследования области оптимума параметра оптимизации  $\hat{y}$  необходимо уравнение (1.16) представить в типично канонической форме вида

$$Y - Y_s = B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + \dots + B_{nn} X_n^2, \quad (1.21)$$

где  $Y$  – значение параметра или критерия оптимизации;

$Y_s$  – значение параметра оптимизации в центре поверхности оптимума;

$X_1, X_2, \dots, X_n$  – новые оси координат, повернутые относительно старых  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на определённый угол  $\alpha$ , который определяется по уравнению (2.32), приведенному в Гл.2;

$B_{11}, B_{22}, \dots, B_{nn}$  – коэффициенты регрессии в канонической форме.

Переход к канонической форме (1.21) осуществляется переносом начала координат факторного пространства в точку  $S_z$  центра поверхности отклика и поворотом осей на некоторый угол до совмещения с главными осями геометрической поверхности. При этом параллельный перенос начала координат в центр устраняет линейные члены в уравнении регрессии (1.16) и изменяет величину свободного члена  $b_0$ , а поворот осей исключает взаимодействие факторов в исходном уравнении. Перенос начала координат и поворот осей обеспечивается по известным правилам аналитической геометрии.

Для определения координат нового центра поверхности отклика  $S_z$  уравнение (1.16) следует продифференцировать по каждой переменной  $x_1, x_2$  и  $x_3$  и частные производные приравнять нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= -0,876 - 0,237x_2 - 0,229x_3 + 0,294x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= 0,391 - 0,237x_1 + 0,102x_3 + 0,394x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,379 - 0,229x_1 + 0,102x_2 + 0,394x_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Решая систему уравнений (1.22), получим координаты центра поверхности отклика

$$x_{1s} = 1; \quad x_{2s} = -0,357; \quad x_{3s} = -0,333; \quad Y_s = 0,568,$$

что соответствует следующим значениям факторов и параметра оптимизации

$$Q = 20 \text{ т/ч}; \quad P_1 = 19,215 \text{ кВт}; \quad K_3 = 0,6; \quad W_{уд.} = 0,568 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}.$$

Для получения аналитической и графической интерпретации области оптимума параметра оптимизации, описываемого уравнением (1.16), а также определения значений факторов  $Q, P_1$  и  $K_3$ , близких к оптимальным, воспользуемся методом двумерных сечений поверхности отклика. Построение двумерных сечений поверхности отклика параметра оптимизации выполняется в следующей последовательности. В уравнение регрессии вида (1.16), независимо от количества факторов, подставляют близкие к оптимальному значению или равные 0 (нулевому) или базовому уровню всех факторов, кроме двух. В результате уравнение (1.16) приводится к уравнению регрессии, выражающему зависи-

мость параметра оптимизации от двух факторов. После дифференцирования такого уравнения по двум переменным, и приравнивания частных производных нулю, определяются координаты центра и величина параметра оптимизации  $Y_s$ . Зависимость параметра оптимизации от двух факторов можно представить на плоскости кривой линией, называемой линией равного отклика или **контурной кривой**. Задавая различные значения параметра оптимизации, можно построить семейство таких кривых, дающих наглядное представление о влиянии двух факторов на параметр оптимизации. Аналогично можно построить двумерные сечения для каждой пары из числа исследуемых факторов.

Рассмотрим, применительно к полученному уравнению регрессии (1.16), три варианта двумерных сечений поверхности отклика, с построением и анализом семейства контурных кривых.

1. Принимаем в (1.16)  $x_1 = 0$ , что соответствует значению фактора  $Q = 13,0$  т/ч (см. табл. 1.1). В этом случае двумерное сечение будет характеризовать влияние факторов  $P_1$  и  $K_3$  на параметр оптимизации  $W_{уд}$ . Уравнение (1.16) примет вид

$$\hat{y} = 1,3403 + 0,391x_2 + 0,379x_3 + 0,102x_2x_3 + 0,197x_2^2 + 0,197x_3^2.$$

Уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= 0,391 + 0,102x_3 + 0,394x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,379 + 0,102x_2 + 0,394x_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Координаты центра

$$x_{2s} = -0,793; \quad x_{3s} = -0,752; \quad Y_s = 1,04,$$

что соответствует значениям факторов

$$P_1 = 17,06 \text{ кВт}; \quad K_3 = 0,537 \quad \text{и} \quad W_{уд} = 1,04 \text{ кВт} \cdot \text{ч/т}.$$

Для канонического преобразования уравнения (1.23) решается характеристический детерминант, составленный по (1.23):

$$f(B) = \begin{vmatrix} 0,394 - B & 0,5 \cdot 0,102 \\ 0,5 \cdot 0,102 & 0,394 - B \end{vmatrix} = (0,394 - B)(0,394 - B) - 0,0026 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{22} = 0,343; \quad B_{33} = 0,445.$$

Каноническое уравнение будет иметь вид:

$$Y - 1,041 = 0,343X_2^2 + 0,445X_3^2. \quad (1.24)$$

Так как в (1.24) коэффициенты  $B_{22}$  и  $B_{33}$  имеют одинаковые знаки и  $B_{22} \neq B_{33}$  (см. табл. 3.5 в Гл. 3), то контурные кривые являются эллипсами. Центр эллипса определяет минимум параметра оптимизации. Поверхность от-



клика функции цели и её двумерные сечения для ЗАВ-20 при  $x_1 = 0$  приведены на рис. 1.1 (а, б).

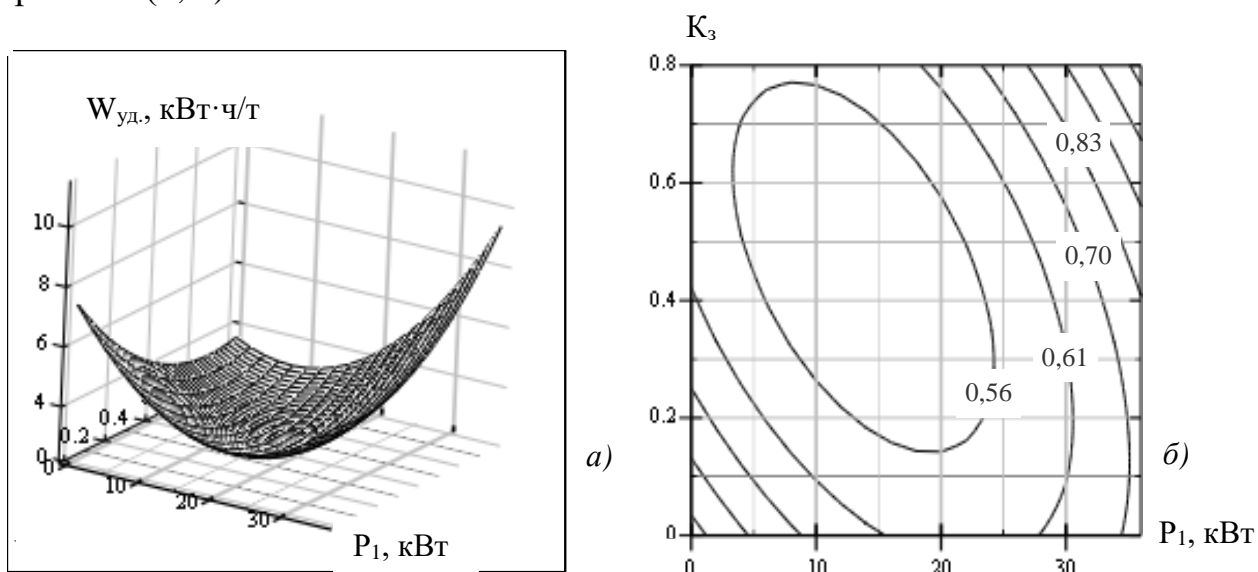


Рисунок 1.1 - Поверхность отклика функции цели (а) и её двумерные сечения (б) для ЗАВ-20 при  $x_1 = 0$ .

2. Двумерное сечение поверхности отклика при  $x_2 = 0$ , характеризующее влияние показателей производительности и коэффициента загрузки. Уравнение (1.16) при  $x_2 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 1,3403 - 0,876x_1 + 0,379x_3 - 0,229x_1x_3 + 0,147x_1^2 + 0,197x_3^2$$

Уравнение в частных производных будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= -0,876 - 0,229x_3 + 0,294x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,379 - 0,229x_1 + 0,394x_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Координаты центра  $S$  области оптимума и параметр оптимизации будут равны:

$$x_{1s} = -4,016; \quad x_{3s} = 1,406; \quad Y_s = 1,18,$$

что соответствует значениям факторов

$$Q = 15,11 \text{ т/ч}; \quad K_3 = 0,5 \quad \text{и} \quad W_{уд.} = 1,18 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}.$$

Проводим каноническое преобразование уравнения (1.25). В этом случае характеристический детерминант имеет вид

$$f(B) = \begin{vmatrix} -0,294 - B & -0,5 \cdot 0,229 \\ -0,5 \cdot 0,229 & 0,394 - B \end{vmatrix} = (0,394 - B)(0,294 - B) - 0,013 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{11} = 0,22; \quad B_{33} = 0,468.$$

Каноническое уравнение будет иметь вид:

$$Y + 0,178 = 0,22X_1^2 + 0,468X_3^2. \quad (1.26)$$

В соответствии с табл. 3.5 Гл.3 контурные кривые также являются эллипсами. Центр эллипса будет минимумом функции цели. Поверхность отклика функции цели и её двумерные сечения для ЗАВ-20 при  $x_2 = 0$  приведены на рис. 1.2 (а, б).

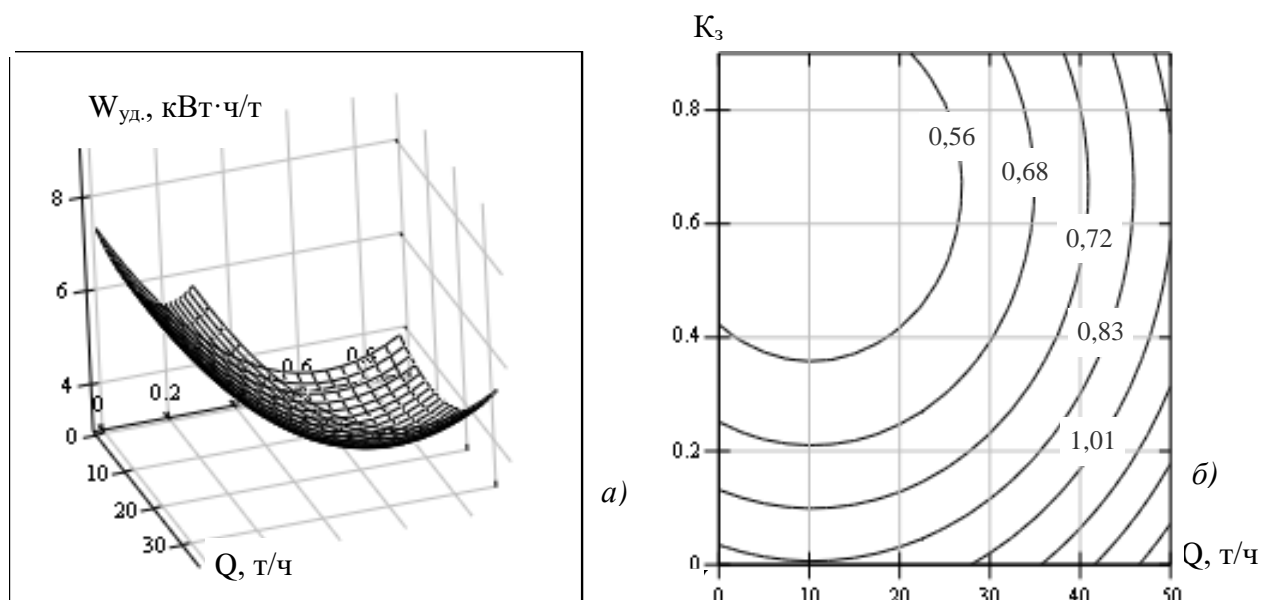


Рисунок 1.2 - Поверхность отклика функции цели (а) и её двумерные сечения (б) для ЗАВ-20 при  $x_2 = 0$ .

3. Двумерное сечение поверхности отклика при  $x_3 = 0$ , характеризующее влияние показателей производительности и присоединённой мощности. Уравнение (1.16) при  $x_3 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 1,3403 - 0,876x_1 + 0,391x_2 - 0,237x_1x_2 + 0,147x_1^2 + 0,197x_2^2, \quad (1.27)$$

Для определения координат центра и величины параметра оптимизации  $Y_s$  возьмём частные производные уравнения (1.27)

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = -0,876 - 0,237x_2 + 0,294x_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = 0,391 - 0,23x_1 + 0,394x_2 = 0.$$

В результате решения системы получим

$$x_{1s} = -4,2; \quad x_{2s} = 1,55; \quad Y_s = -0,209,$$

что соответствует  $Q = 16,4$  т/ч;  $P_1 = 28,5$  кВт и  $W_{уд.} = 0,209$  кВт·ч/т.

Проводим каноническое преобразование уравнения (1.27), характеристический детерминант которого будет равен

$$f(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 0,294 - \mathbf{B} & -0,5 \cdot 0,237 \\ -0,5 \cdot 0,237 & 0,394 - \mathbf{B} \end{vmatrix} = (0,294 - \mathbf{B})(0,394 - \mathbf{B}) - 0,014 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$\mathbf{B}_{11} = 0,217 ; \quad \mathbf{B}_{22} = 0,472 .$$

Каноническое уравнение будет иметь вид:

$$\mathbf{Y} + 0,209 = 0,217\mathbf{X}_1^2 + 0,472\mathbf{X}_2^2 . \quad (1.28)$$

Согласно табл. 3.5 Гл. 3, в этом случае контурные кривые будут также эллипсами. Центр эллипса будет минимумом функции цели. Поверхность отклика функции цели и её двумерные сечения для ЗАВ-20 при  $x_3 = 0$  приведены на рис. 1.3 (а, б).

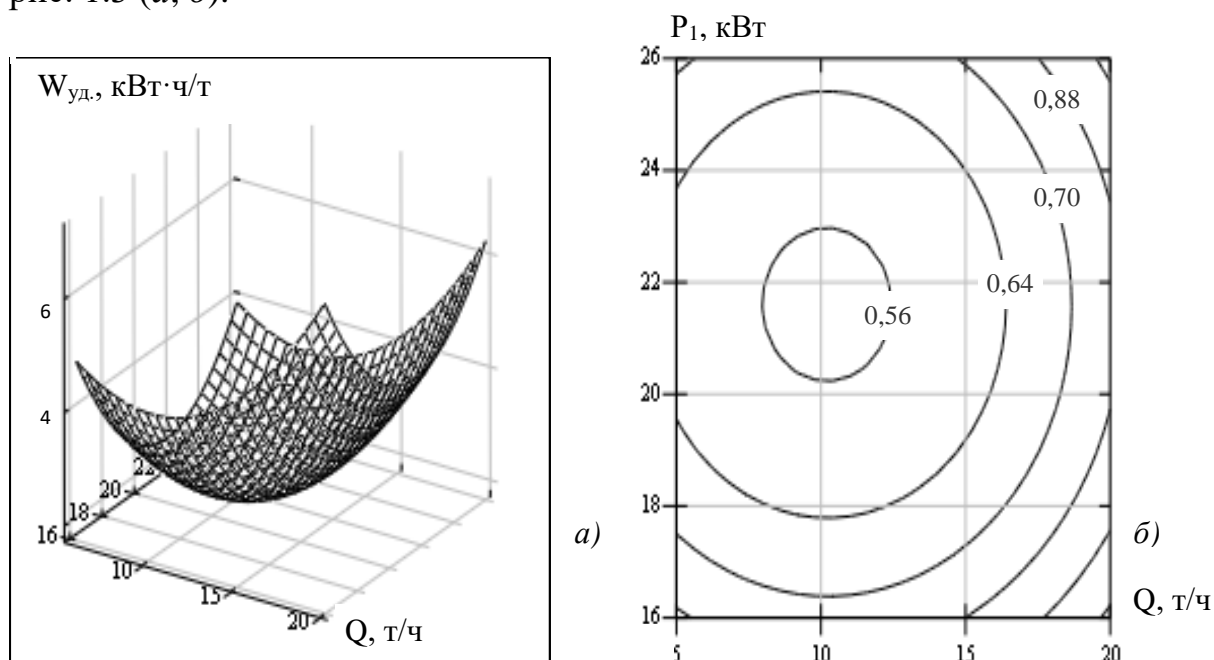


Рисунок 1.3 - Поверхность отклика функции цели (а) и её двумерные сечения (б) для ЗАВ-20 при  $x_3 = 0$ .

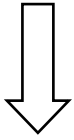
Выполнение всех возможных двумерных сечений поверхностей отклика даёт наглядное представление о значениях параметра оптимизации при варьировании уровней каждой пары факторов.

Полученные в результате расчётов данные обрабатывались на ПЭВМ с использованием прикладных программ Microsoft Excel 2000, Matchad-2000. В результате расчетов было установлено, что минимум удельного расхода электроэнергии  $W_{уд.} = 0,568$  кВт·ч/т обеспечивается у ЗАВ-20 и ЗАР-5 при  $Q = 20$  т/ч,  $P_1 = 19,215$  кВт,  $K_3 = 0,6$ .

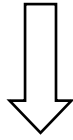
В заключение отметим, что аналогичные исследования, проведенные также для агрегатов ЗАВ-25, ЗАВ-40 и др., и полученные результаты оптимизации технологических процессов могут быть рекомендованы в качестве научно-обоснованных норм удельного расхода электроэнергии для планирования и контроля расхода электроэнергии на технологические процессы подработки зерна на зернопунктах АПК Украины.

$$F = \frac{P \cdot \eta_{\Sigma}}{V} + \psi \cdot G$$

ПМЭ



ОЦКП



$$\hat{y} = 3,1 + 1,4x_1 - 1,03x_2 + 0,72x_3 - 0,75x_1x_2 - 0,26x_1^2 + 0,12x_2^2 + 0,22x_3^2$$

Основными эксплуатационными показателями электромоторблока являются: сила тяги на крюке  $F$ , мощность тягового электродвигателя  $P$ , скорость движения  $V$  и полная эксплуатационная масса  $G$ . Обычно эксплуатационные показатели определяются на начальном этапе разработки моторблока по результатам анализа заданных технологических циклов наиболее трудоёмкой операции вспашки почвы и условий эксплуатации моторблока. Поскольку в настоящее время опыт проектирования и эксплуатации моторблоков и культиваторов с электроприводом весьма ограничен, представляет интерес теоретическое обоснование оптимальных эксплуатационных показателей электромоторблоков различного класса. Для решения этой задачи воспользуемся методом планирования математического эксперимента (ПМЭ).

### 2.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов

На основе обзора технической литературы по испытанию моторблоков с ДВС и электроприводом, а также по теории и практики мобильных транспортных средств с электротрансмиссиями была получена аналитическая зависимость, которая определяет функциональную связь основных эксплуатационных показателей  $F$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $G$  и принимается за исходную математическую модель объекта исследования

$$F = \frac{P \cdot \eta_{\Sigma}}{V} + \psi \cdot G, \quad (2.1)$$

где  $F$  – сила тяги, кН;

$P$  – полезная мощность тягового электродвигателя, кВт;

$\eta_{\Sigma}$  – суммарный КПД электропривода моторблока, о.е.;

$\psi$  – обобщённый коэффициент сопротивления движению колёс, о.е.

При этом

$$\eta_{\Sigma} = \eta_{yy} \cdot \eta_p \cdot \eta_k; \quad (2.2)$$

$$\psi = \lambda \cdot \varphi_{\text{н}} + \varepsilon \cdot f, \quad (2.3)$$

где  $\eta_{\text{уу}}$  – КПД устройства управления тяговым электродвигателем;

$\eta_{\text{р}}$  – КПД редуктора;

$\eta_{\text{к}}$  – КПД колёс;

$\lambda$  – коэффициент нагрузки колёс;

$\varphi_{\text{с}} = 0,5-0,7$  – коэффициент сцепления колёс с почвой;

$\varepsilon$  – коэффициент, учитывающий внутренние потери в ходовой системе;

$f = 0,1-0,12$  – коэффициент сопротивления качению колёс.

Установлено, что для рассматриваемого класса мотоблоков, значения  $\eta_{\Sigma}$  и  $\psi$  находятся в пределах

$$\eta_{\Sigma} = 0,7 - 0,8 \quad \text{и} \quad \psi = 0,65 - 0,85. \quad (2.4)$$

В соответствии с (2.1) в качестве параметра оптимизации объекта исследования принимается сила тяги  $\mathbf{F}$  и независимых переменных или факторов – полезная мощность тягового электродвигателя  $\mathbf{P}$ , скорость движения  $\mathbf{V}$  и полная масса мотоблока  $\mathbf{G}$ .

Интервалы варьирования факторов выбираются по данным анализа реального диапазона изменения эксплуатационных показателей электромоблока при реализации тяговой характеристики  $\mathbf{F} = f(\mathbf{V})$ , которая является законом регулирования тягового электродвигателя. Обозначение факторов и уровни их варьирования при математическом планировании эксперимента приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Уровни варьирования факторов	Факторы в нормированных единицах	Факторы в физических единицах		
		P, кВт	V, м/с	G, кН
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
Верхний X <sub>i,в</sub>	x <sub>i,в</sub> = +1	3,0	1,2	2,7
Нижний X <sub>i,н</sub>	x <sub>i,н</sub> = -1	0,6	0,4	0,9
Базовый X <sub>i,0</sub>	x <sub>i,0</sub> = 0	1,8	0,8	1,2
Интервалы варьирования ΔX <sub>i</sub>	Δx <sub>i</sub> = ±1	1,2	0,4	0,9
Размеры звёздного плеча				
+α	+1,215	3,26	1,286	2,29
-α	-1,215	0,342	0,314	0,107

Нормализация факторов проводится по соотношению (1.3)

$$x_i = \frac{X_i - X_{i,0}}{\Delta X_i}. \quad (2.5)$$

При этом нормированные значения факторов на верхнем, нижнем и базовом или нулевом уровнях соответственно будут равны

$$x_{i,в} = +1; \quad x_{i,н} = -1 \quad \text{и} \quad x_{i,0} = 0.$$

## 2.2 Выбор типа плана и построение матрицы математического эксперимента

Из уравнения (2.1) следует, что функциональная зависимость параметра оптимизации  $F = f(\mathbf{P}, \mathbf{V}, \mathbf{G})$  – нелинейная. В этом случае область оптимума, если она имеется, как правило, может быть достоверно описана полиномом второго порядка вида (1.5)

$$y = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i \cdot x_i + \sum_{i < j}^n \mathbf{b}_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{ii} x_i^2. \quad (2.6)$$

Такая математическая модель может быть получена для описания и исследования области оптимума параметра оптимизации электромотора на основе планов второго порядка, например, ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП). Как отмечалось в Гл. 1, ОЦКП – это планирование эксперимента на пяти уровнях, которые в нормализованных единицах можно представить в виде:

$$1) -\alpha; \quad 2) -1; \quad 3) 0; \quad 4) +1; \quad 5) +\alpha,$$

где  $\alpha$  – размер плеча звёздных точек.

Общее число точек факторного пространства и величины плеча звёздных точек при ОЦКП для различного числа факторов приведены в таблице 1.2.

ОЦКП позволяет получить математическую модель параметра оптимизации для преобразованных  $\tilde{x}_i^2$  и непреобразованных квадратичных членов  $x_i^2$

$$\hat{y}_g = \tilde{\mathbf{b}}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n \mathbf{b}_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{ii} \tilde{x}_i^2; \quad (2.7)$$

$$\hat{y} = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n \mathbf{b}_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{ii} x_i^2, \quad (2.8)$$

где  $\tilde{\mathbf{b}}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  – преобразованный и непреобразованный нулевые члены уравнения регрессии.

При этом

$$\mathbf{b}_0 = \tilde{\mathbf{b}}_0 - \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{i,i} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2. \quad (2.9)$$

и величина  $\tilde{\mathbf{b}}_0$  определяется по (2.11).

Ортогональное планирование позволяет получить независимые значения коэффициентов уравнения регрессии (2.7) и (2.8). Ортогональность плана обеспечивается соответствующим подбором звёздного плеча  $\alpha$  и специальным преобразованием квадратичных переменных  $\tilde{\delta}_i^2$ .

Преобразование переменных  $\tilde{\delta}_i^2$  производится по уравнению

$$\tilde{x}_{i,g}^2 = x_{i,g}^2 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2 = x_i^2 - \frac{8 + 1,215^2 \cdot 2}{15} = x_i^2 - 0,73, \quad (2.10)$$

где  $i$  – номер фактора (1, 2, ..., n);

$g$  – номер строки матрицы плана (1, 2, ..., N).

Пример построения матрицы плана ОЦКП для трёх факторов приведен в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Матрица ОЦКП для трёх факторов

№ столбцов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Группы точек	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1^2-0,73$	$x_2^2-0,73$	$x_3^2-0,73$	$y$	$\hat{y}$
	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	1,85	1,86
$N_\Phi$	2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	6,35	6,28
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	1,1	1,14
	4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	2,6	2,6
	5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	3,29	3,29
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	7,79	7,68
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	2,54	2,57
	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	4,04	4,03
	9	+1	-1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	2,13	2,1
$N_a$	10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	4,85	4,9
	11	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	4,22	4,26
	12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	-0,73	+0,746	-0,73	2,36	2,29
	13	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	2,56	2,48
	14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	+0,746	4,3	4,19
	15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	3,13	3,1
$N_0$													

Далее производится расчёт значений функции цели  $y$  по исходной математической модели объекта исследования (2.1) для каждой строки матрицы плана в таблице 2.2 с учётом уровней факторов (+1; -1; 0), указанных в столбцах №2-4 матрицы и значений факторов в физических единицах, соответствующих этим уровням, приведенных в таблице 2.1. При расчётах по уравнению (2.1) принято, что  $\eta_{\Sigma} = 0,75$  и  $\psi = 0,8$ . Результаты расчётов  $y$  приводятся в столбце №12 матрицы плана.

### 2.3 Определение коэффициентов уравнения регрессии и статистическая оценка их значимости

Для ОЦКП коэффициенты регрессии  $\tilde{b}_0; b_1; \dots; b_n; b_{ij}; b_{ii}$  определяются по уравнению

$$b_i = \frac{1}{\sum_{g=1}^N x_{i,g}^2} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g} \cdot y. \quad (2.11)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,

$k$  – номер последнего столбца матрицы плана;

$y$  – значения функции цели по данным построчных расчётов по исходной математической модели (2.1) и приводятся в столбце №12 таблицы 2.2.

В результате расчётов по уравнениям (2.11) и (2.9) с учётом приведенных данных в матрице плана были получены следующие значения коэффициентов уравнений регрессии (2.7) и (2.8):

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= 3,5; & b_0 &= 3,1; & b_1 &= 1,4; & b_2 &= -1,03; & b_3 &= 0,72; \\ b_{12} &= -0,75; & b_{11} &= 0,26; & b_{22} &= 0,12; & b_{33} &= 0,22; \\ b_{13} &\cong 0; & b_{23} &\cong 0; & b_{123} &= -0,0025. \end{aligned}$$

Поскольку при математическом эксперименте отсутствует дисперсия воспроизводимости функции цели  $S_B^2\{y\}$ , необходимая для статистической оценки значимости полученных данных, поэтому значение  $S_B^2\{y\}$  вводится искусственно такой величины, чтобы обеспечивалась необходимая точность расчётов. В данной работе в соответствии с соотношением (П.2) принято

$$S_B^2\{y\} = (3\sigma)^2 = (3 \cdot 0,02)^2. \quad (2.12)$$

где  $\sigma = 0,02$  – принятая средняя квадратическая ошибка (2%) или стандарт.

Оценка значимости коэффициентов уравнений регрессии определяется по  $t$ -критерию Стьюдента по условию

$$t_{oi} = \frac{|b_i|}{S_B\{y\}} > t_T = t_K, \quad (2.13)$$

где  $t_{pi}, t_T$  – расчётное и табличное значение критерия, равное критическому  $t_K$ ;

$|b_i|$  – абсолютное значение  $i$ -того коэффициента;

$S_B\{y\}$  – ошибка расчётов функции цели.



При этом, если  $t_{pi} > t_k$ , то коэффициенты регрессии  $b_i$  признаются значимыми и при  $t_{pi} < t_k$  - коэффициенты регрессии  $b_i$  считаются статистически незначимыми. Согласно (2.12)

$$S_B\{y\} = \sqrt{S_B^2\{y\}} = \sqrt{(3 \cdot 0,02)^2} = 0,06. \quad (2.14)$$

Табличное значение критерия Стьюдента  $t_T$  определяется по таблице Приложения А для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и числу степеней свободы  $f_0 = N \cdot (m-1) = 15$  и равно  $t_T = 2,131$ .

Незначимыми оказались коэффициенты  $b_{13}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{123}$  и поэтому из уравнения (2.8) исключаются слагаемые с этими коэффициентами и уравнение регрессии (2.8) с учётом перерасчёта свободного коэффициента  $b_0$  по (2.9) в конечном варианте примет вид

$$\hat{y} = 3,1 + 1,4x_1 - 1,03x_2 + 0,72x_3 - 0,75x_1x_2 + 0,26x_1^2 + 0,12x_2^2 + 0,22x_3^2. \quad (2.15)$$

По уравнению (2.15) определяем расчётные значения функции цели  $\hat{y}_g$  для каждой строки матрицы плана (таблица 2.2) с учётом значений факторов в столбцах 2, 3, 4, 5, 9, 10 и 11. Расчётные данные приводятся в столбце 13.

#### 2.4 Проверка адекватности уравнения

При дальнейшей обработке результатов математического эксперимента необходимо убедиться, что полученное уравнение регрессии (2.15) с достаточной степенью достоверности, т.е. адекватно, описывает свойства объекта исследования.

Адекватность полученного уравнения регрессии (2.15) проверяется по F-критерию Фишера по условию

$$F_p = \frac{S_{ad}^2\{\hat{y}\}}{S_B^2\{y\}} < F_k = F_T, \quad (2.16)$$

где  $F_p, F_k, F_T$  – расчётное, критическое и табличное значения критерия Фишера;

$S_B^2\{y\}$  - принятая дисперсия воспроизводимости, определяется по уравнению (2.12);

$S_{ad}^2\{\hat{y}\}$  - дисперсия адекватности.

При этом, если  $F_p$  меньше  $F_k$ , уравнение регрессии признаётся адекватным и при  $F_p$  больше  $F_k = F_T$  – неадекватным. Дисперсия адекватности определяется по уравнению

$$S_{ad}^2\{\hat{y}\} = \frac{m}{N-d} \sum_{g=1}^N (y - \hat{y})^2, \quad (2.17)$$

где  $d$  – число значимых коэффициентов уравнения (2.15) с учётом и  $b_0$ . Следовательно  $d = 8$  и  $N - d = 7$ ;

$m$  – число параллельных опытов. Принимается при математическом эксперименте  $m = 1$ .

Значения  $y$  и  $\hat{y}$  берутся по каждой строке в столбцах 12 и 13 таблицы 2.2.

Табличное значение  $F_T$ -критерия Фишера определяется по таблице Приложения В для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и степеней свободы адекватности и воспроизводимости, принимаемыми в соответствии с соотношениями:

$$f_{ad} = f_1 = N - d = 7 \text{ - по горизонтали таблицы;}$$

$$f_B = f_2 = N(m - 1) = 15 \text{ - по вертикали таблицы.}$$

При этом табличное значение критерия  $F_T = 2,715$ . По результатам расчётов по (2.17)  $S_{ad}^2 = 0,0093$  с учётом (2.12)  $S_B^2\{y\} = 0,0036$  и табличного значения  $F_T = 2,715$  условие (2.16) можно записать в виде

$$F_p = \frac{0,0093}{0,0036} = 2,58 < F_T = 2,715. \quad (2.18)$$

Следовательно, уравнение регрессии (2.15) является адекватным.

С помощью уравнения (2.5) и данных таблицы 2.1 получено также уравнение принятого параметра оптимизации тягового усилия электромоторного блока  $F$  через факторы в физических единицах в следующем виде

$$F = 1,531 + 1,517P - 0,965V + 0,145G - 1,563PV + 0,25P^2 + 0,75V^2 + 0,272G^2. \quad (2.19)$$

## 2.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта

Для исследования области оптимума объекта, свойства которого адекватно описываются уравнением (2.15) можно воспользоваться одним из эффективных методов поиска оптимума, получившего название канонического преобразования математической модели объекта. В результате такого преобразования уравнение второго порядка в общем случае с  $n$  независимыми переменными приводится к типовой канонической форме вида

$$Y - Y_S = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \dots + B_{nn}X_n^2, \quad (2.20)$$

где  $Y$  – значение параметра оптимизации;

$Y_S$  – значение параметра оптимизации в оптимальной точке;

$X_1, X_2, \dots, X_n$  – новые оси координат в факторном пространстве, повернутые на определённый угол относительно старых координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;

$B_{11}, B_{22}, \dots, B_{nn}$  – коэффициенты регрессии в канонической форме.

Суть канонического преобразования уравнения регрессии второго порядка типа (2.15) состоит в следующем [4, 5]. Производится перенос начала координат в новую точку  $S$  факторного пространства и поворот старых осей на некоторый угол до совмещения с главными осями геометрической поверхности. В результате чего исчезают линейные члены уравнения и изменяется зна-

чение свободного члена в исходном уравнении. Чтобы осуществить перенос начала координат в особую точку поверхности отклика, представляющую собой геометрическую интерпретацию параметра оптимизации, необходимо продифференцировать уравнение (2.15) по каждой независимой переменной  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и приравнять нулю частные производные. Решением системы полученных уравнений в частных производных определяются координаты нового центра в старых осях  $(x_i, x_j, \dots, x_n)$ . Подставляя найденные значения координат  $x_{is}$  в точку  $\mathbf{S}$  в исходное уравнение регрессии (2.15), определяют величину параметра оптимизации в точке  $\mathbf{S}$  ( $Y_s$ ).

После переноса центра в точку  $\mathbf{S}$  уравнение (2.15) примет вид

$$Y = Y_s + \sum_{i,j}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2. \quad (2.21)$$

Затем в новом начале координат поворачивают оси координат на определённый угол  $\alpha$  до совмещения с главными осями геометрической поверхности. В результате этих операций окончательно получают каноническую форму уравнения второго порядка без парных взаимодействий факторов. Например, при трёх независимых переменных уравнение (2.15) преобразуется к виду

$$Y - Y_s = B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + B_{33} X_3^2, \quad (2.22)$$

где  $Y$  – значение параметра оптимизации;

$Y_s$  – значение параметра оптимизации в центре поверхности отклика, т.е. в новом начале координат;

$X_1, X_2, X_3$  – канонические переменные, которые являются линейными функциями факторов;

$B_{11}, B_{22}, B_{33}$  – коэффициенты канонического уравнения.

Для определения координат нового центра поверхности отклика  $\mathbf{S}_z$  уравнение (2.15) следует продифференцировать по каждой переменной  $x_i$  и частные производные приравнять нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 1,4 - 0,75x_2 + 0,52x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,03 - 0,75x_1 + 0,24x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,72 + 0,44x_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Решая систему уравнений (2.23), получим значение координат центра поверхности отклика  $\mathbf{S}_z$

$$x_{1s} = -0,997; \quad x_{2s} = 2,558; \quad x_{3s} = -1,636.$$

При подстановке значений координат в исходное уравнение (2.15) определяем величину параметра оптимизации  $Y_s = 1,432$ . Координатам  $x_{1s}$ ,  $x_{2s}$  и  $x_{3s}$ , а также величине  $Y_s$  соответствуют следующие значения факторов и функции цели в физических единицах согласно (2.5) и таблице 2.1.

$$P = 0,6 \text{ кВт}; \quad V = 1,82 \text{ м/с}; \quad G = -0,27 \text{ кН}; \quad Y_s = F = 1,432 \text{ кН}.$$

Для получения аналитической и графической интерпретации области оптимума параметра оптимизации, описываемого уравнением (2.15), а также определения значений факторов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{G}$ , близких к оптимальным, воспользуемся методом двумерных сечений поверхности отклика. Построение двумерных сечений поверхности отклика параметра оптимизации выполняется в следующей последовательности. В уравнение регрессии вида (2.15), независимо от количества факторов, подставляют близкие к оптимальному значению или равных 0 (нулевому) или базовому уровню всех факторов, **кроме двух**. В результате уравнение (2.15) приводится к уравнению регрессии, выражающему зависимость параметра оптимизации от двух факторов. После дифференцирования такого уравнения по двум переменным, и приравнивая частные производные нулю, определяют координаты центра  $x_{2s}$  поверхности отклика  $\mathbf{S}_z$  и величину параметра оптимизации в центре  $Y_s$ . Затем принимая различные значения параметра оптимизации  $Y_s$  в каноническом уравнении, выполняются двумерные сечения поверхности отклика и строятся кривые равного отклика, **называемые контурными кривыми** поверхности отклика, по которым оценивается изменение величины критерия оптимизации в зависимости от варьирования уровней каждой пары факторов, и определяются их значения, близкие к оптимальным.

Рассмотрим, применительно к полученному уравнению регрессии (2.15), три варианта двумерных сечений поверхности отклика, с построением и анализом семейства контурных кривых.

1. Принимаем в (2.15)  $x_1 = 0$ , что соответствует значению фактора  $P = 1,8$  кВт. Двумерное сечение поверхности отклика, в этом случае, будет характеризовать параметр оптимизации в зависимости от скорости движения ( $x_2$ ) и массы ( $x_3$ ) мотоблока. Уравнение (2.15) примет вид

$$\hat{y} = 3,1 - 1,03x_2 + 0,72x_3 + 0,12x_2^2 + 0,22x_3^2. \quad (2.25)$$

Определим координаты центра поверхности  $\mathbf{S}_z$  в результате решения системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,03 + 0,24x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,72 + 0,44x_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$x_{2s} = 4,292; \quad x_{3s} = -1,636.$$

После подстановки значений  $x_{2s}$ ,  $x_{3s}$  в (2.25) определится величина параметра оптимизации  $Y_s = 0,301$ . Проводим каноническое преобразование уравнения (2.25), характеристический детерминант которого имеет вид

$$f(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 0,24 - \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0,44 - \mathbf{B} \end{vmatrix} = (0,24 - \mathbf{B}_{22}) \cdot (0,44 - \mathbf{B}_{33}) = 0, \quad (2.27)$$

откуда коэффициенты  $\mathbf{B}_{22} = 0,24$  и  $\mathbf{B}_{33} = 0,44$ .

Уравнение (2.25) в канонической форме будет

$$Y - 0,301 = 0,24X_2^2 + 0,44X_3^2. \quad (2.28)$$

Так как коэффициенты  $B_{22}$  и  $B_{33}$  имеют одинаковые знаки и  $B_{22} \neq B_{33}$ , то согласно табл. 3.5 Гл. 3 контурные кривые будут эллипсами. Контурные кривые для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 2.1.

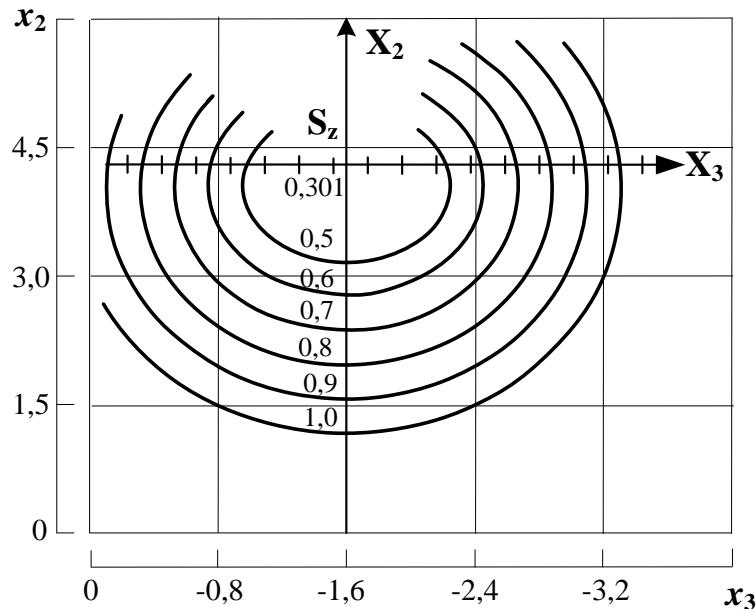


Рисунок 2.1 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_1 = 0$  ( $P = 1,8$  кВт) и значениях  $Y_S = 0,301; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ .

Из рисунка 2.1 следует, что значение параметра оптимизации  $Y_S$  в центре поверхности оптимума равно  $0,301$  кН и имеет место при скорости движения  $x_{2S} = 4,292$  и массе  $x_{3S} = -1,636$ . Согласно области оптимума при  $Y_S = 0,29$  и  $P = 1,8$  кВт, значения рассматриваемых факторов, близкие к оптимальным, находятся в пределах  $V = 0,8 \dots 1,2$  м/с и  $G = 0,2 \dots 0,6$  кН.

2. Принимаем в (2.15)  $x_2 = 0$ , что соответствует значению фактора  $V = 0,8$  м/с. Двумерное сечение поверхности отклика в этом случае будет характеризовать параметр оптимизации в зависимости от мощности ( $x_1$ ), и массы ( $x_3$ ) мотоблока. Уравнение (2.15) при  $x_2 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 3,1 + 1,4x_1 + 0,72x_3 + 0,26x_1^2 + 0,22x_3^2. \quad (2.29)$$

Определим координаты центра поверхности и величину параметра оптимизации

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 1,4 + 0,52x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,72 + 0,44x_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В результате решения системы получаем  $x_{1S} = -2,692$ ,  $x_{3S} = -1,636$  и  $Y_S = 0,626$ . Характеристический детерминант в этом случае будет

$$f(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 0,52 - \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0,44 - \mathbf{B} \end{vmatrix} = (0,52 - \mathbf{B}_{11}) \cdot (0,44 - \mathbf{B}_{33}) = 0, \quad (2.31)$$

откуда  $\mathbf{B}_{11} = 0,52$  и  $\mathbf{B}_{33} = 0,44$ . Уравнение в канонической форме примет вид

$$\mathbf{Y} - 0,626 = 0,52\mathbf{X}_1^2 + 0,44\mathbf{X}_3^2. \quad (2.32)$$

В этом случае, в соответствии с табл. 3.5, контурные кривые будут также эллипсами (рис. 2.2) и параметр оптимизации  $\mathbf{Y}_S$  в центре равен максимальному значению.

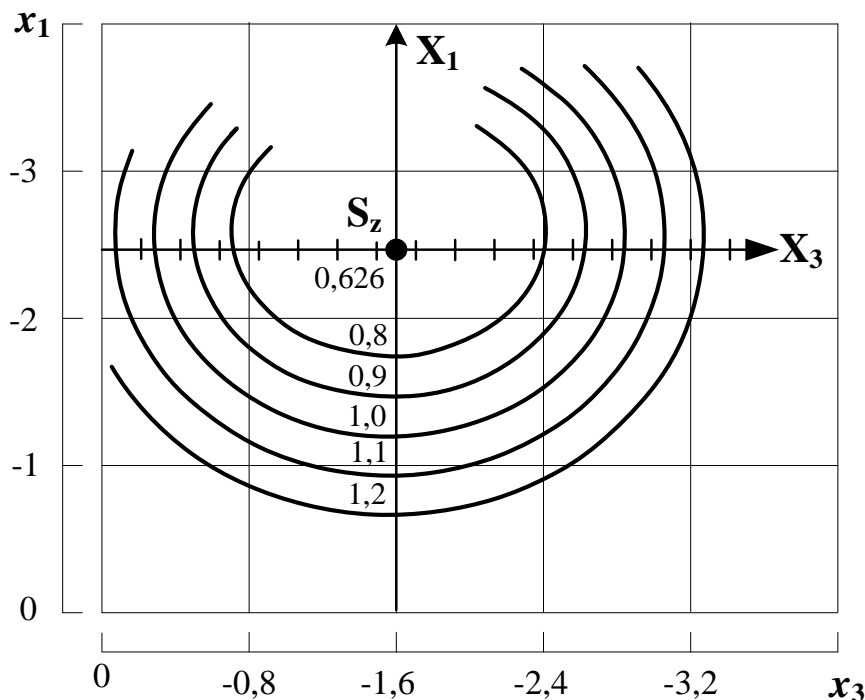


Рисунок 2.2 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_2 = 0$  ( $V = 0,8$  м/с) и значениях  $\mathbf{Y}_S = 0,626$  (центр); 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2.

Согласно рис. 2.2, в рассматриваемом сечении поверхности отклика значение параметра оптимизации равно 0,626 кН, и имеет место при мощности электродвигателя  $x_{1S} = -2,692$  и полной массе  $x_{3S} = -1,636$ . Из области условного оптимума при  $\mathbf{Y}_S = 0,8$  кН следует, что значения рассматриваемых факторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{G}$ , близкие к оптимальным, находятся в пределах  $\mathbf{P} = 0,6 \dots 1,2$  кВт и  $\mathbf{G} = 0,5 \dots 1,0$  кН при  $V = 0,8$  м/с.

3. Принимаем в (2.15)  $x_3 = 0$ , что соответствует значению фактора  $\mathbf{G} = 1,2$  кН. Двумерное сечение поверхности отклика, в этом случае, будет характеризовать параметр оптимизации в зависимости от мощности ( $x_1$ ) и скорости движения ( $x_2$ ).

В этом случае исходное уравнение (2.15) примет вид

$$\hat{y} = 3,1 + 1,4x_1 - 0,75x_1x_2 - 1,03x_2 + 0,26x_1^2 + 0,12x_2^2. \quad (2.33)$$

Определим координаты центра поверхности отклика дифференцированием уравнения (2.33) и решением системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 1,4 - 0,75 x_1 x_2 + 0,52 x_1 = 0 ; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,03 - 0,75 x_1 + 0,24 x_2 = 0 . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Откуда  $x_{1s} = 0,997 = 1,0$ ,  $x_{2s} = 1,175$ ,  $Y_s = 1,797$ .  
что соответствует  $P = 3$  кВт,  $V = 1,26$  м/с и  $F = 1,797$  кН.

Характеристический детерминант уравнения (2.34) будет

$$f(B) = \begin{vmatrix} 0,52 - B & 0 \\ 0 & 0,24 - B \end{vmatrix} = (0,52 - B) \cdot (0,24 - B) - 0,187 = 0 ,$$

откуда  $B_{11} = 0,572$  и  $B_{22} = -0,192$ .

Уравнение регрессии (2.33) в канонической форме примет вид

$$Y - 1,797 = 0,572 X_1^2 - 0,192 X_2^2 .$$

Поскольку коэффициенты канонического уравнения  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют разные знаки, то контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика представляют собой гиперболы. Контурные кривые сечений поверхности отклика при  $x_3 = 0$  и различных значениях  $Y_s$  приведены на рис. 2.3.

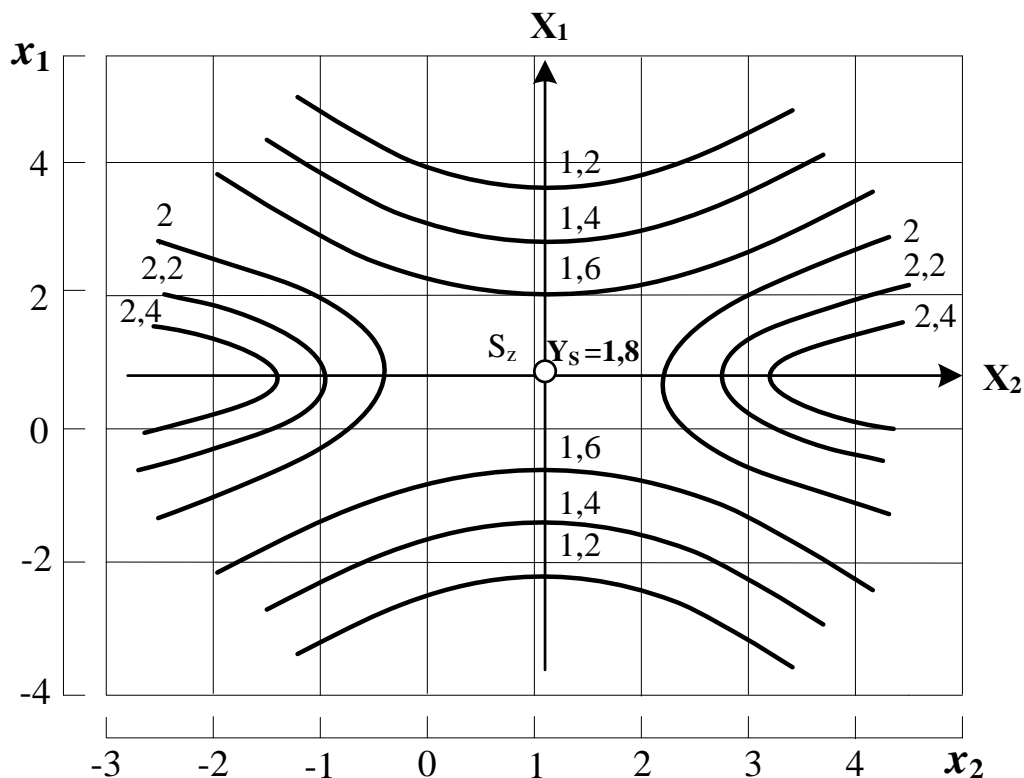


Рисунок 2.3 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_3 = 0$  ( $G = 1,2$  кН) и значениях  $Y_s = 1,8; 1,6; 1,4; 1,2$ .

Из рисунка 2.3 следует, что в рассматриваемом случае в центре поверхности отклика  $S_z$  максимальное значение параметра оптимизации  $Y_S = 1,8$  кН при значениях факторов  $x_{1S} = 1,0$  и  $x_{2S} = 1,175$ . В ближайшей к центру  $S_z$  области оптимума оптимальные значения мощности и скорости движения находятся в пределах  $P = 0,8 \dots 1,5$  кВт,  $V = 0,6 \dots 1,0$  м/с при  $G = 1,2$  кН.

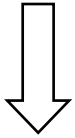
В заключении отметим, что по контурным кривым на рис. 2.1...2.3 можно судить об изменении величины критерия оптимизации  $F$  в зависимости от кодированных и натуральных значений рассматриваемых факторов. Выполнение всех возможных двумерных сечений поверхностей отклика даёт наглядное представление о значениях критерия оптимизации при варьировании уровней каждой пары факторов.

Обобщая полученные результаты для рассматриваемого класса электромоторных блоков основные эксплуатационные показатели, близкие к оптимальным с учётом реальных условий работы агрегатов, могут быть определены в пределах:  $F = 0,6 \dots 1,5$  кН;  $P = 0,6 \dots 1,8$  кВт;  $V = 0,6 \dots 1,0$  м/с;  $G = 0,5 \dots 1,1$  кН.



$$\mathcal{E} = \frac{P_{\Sigma} \cdot K_3}{Q \cdot \eta_{\text{н}} \cdot \lambda_{\text{н}} \cdot K_{\text{вл.}}}$$

ПМЭ



РЦКП



$$\hat{y} = 3,68 + 0,816x_1 - 1,28x_2 + 1,36x_3 - 0,349x_1x_2 + 0,292x_1x_3 - 0,583x_2x_3 + 0,738x_1^2 - 0,524x_2^2 + 0,74x_3^2$$

При решении задачи оптимизации объекта исследования необходимо выбрать параметр оптимизации, по которому оценивается исследуемый объект и который в виде математической зависимости определяется через независимые переменные или факторы. Правильно выбранный параметр оптимизации чётко определяет задачу исследования, для решения которой необходимо получение математической модели, удобной для поиска максимума или минимума параметра оптимизации при соответствующих значениях факторов, определяющих свойства объекта исследования. Такая математическая модель может быть успешно получена перестройкой исходной модели объекта исследования с неопределённой функциональной связью методом планирования математического эксперимента (ПМЭ).

### 3.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов

В качестве параметра оптимизации могут быть выбраны: экономический показатель, характеризующий технологический процесс или рабочую машину, а также производительность производственного оборудования или энергозатраты и т.п. При этом необходимо стремиться к тому, чтобы параметр оптимизации был один, имел ясный физический смысл и количественную оценку, а также являлся бы совокупной и исчерпывающей характеристикой объекта исследования. Применительно к поставленной задаче оптимизации энергоёмкого технологического процесса зернодробилки, в качестве параметра оптимизации целесообразно выбрать величину энергозатрат на единицу готовой продукции, определяемую по уравнению

$$\mathcal{E} = \frac{P_{\Sigma} \cdot K_3}{Q \cdot \eta_{\text{н}} \cdot \lambda_{\text{н}} \cdot K_{\text{вл.}}}, \quad (3.1)$$

где  $\mathcal{E}$  – удельная энергоёмкость, кВт·ч/т;

$P_{\Sigma} = P$  – суммарная номинальная мощность электродвигателей, кВт;

$K_3$  – коэффициент загрузки дробилки;

$Q$  – производительность за час чистой работы при измельчении фуражного зерна, т/ч;

$\eta_{\text{п}}$  – КПД клиноременных передач, о.е.;

$\lambda_{\text{и}}$  – степень измельчения зерна;

$K_{\text{вл.}}$  – коэффициент, учитывающий влажность зерна, о.е.

Согласно технической характеристики дробилки ДБ-5-1:

- установленная мощность электродвигателей  $P_{\Sigma} = 32,2$  кВт;

- производительность  $Q = 4-6$  т/ч;

- удельная энергоёмкость при измельчении зерна  $\mathcal{E} = 5,4 \dots 8$  кВт·ч/т.

В дальнейшем принимаем КПД клиноременных передач  $\eta_{\text{п}} = 0,94 \dots 0,96$  ( $\eta_{\text{п ср}} = 0,95$ ); среднюю влажность зерна 14%, т.е.  $K_{\text{вл.}} = 0,86$ .

Степень измельчения зерна  $\lambda_{\text{и}}$  является одним из факторов, существенно влияющим на энергопотребление дробилки. Однако, в последнее время, на дробилках устанавливаются так называемые дисперсализаторы с непрерывным контролем степени измельчения зерна, входящие в автоматический регулятор загрузки дробилки. Поэтому в работе принимается значение  $\lambda_{\text{и}}$  постоянным и равным  $\lambda_{\text{и}} = 1$ .

Таким образом, в качестве контролируемых и управляемых факторов, определяющих параметр оптимизации  $\mathcal{E}$  принимаются: мощность  $P_{\Sigma}$ , производительность  $Q$  и коэффициент загрузки  $K_3$ .

Обозначения факторов и уровни их варьирования при использовании метода ПМЭ приведены в таблице 3.1. При этом уровни варьирования факторов выбирались с учётом данных технической характеристики и реальной возможности изменения факторов на практике.

Таблица 3.1

Уровни варьирования факторов	Факторы в нормированных единицах	Факторы в физических единицах		
		$P$ , кВт	$Q$ , т/ч	$K_3$ , о.е.
		$X_1$	$X_2$	$X_3$
Верхний $X_{i,\text{в}}$	$x_{i,\text{в}} = +1$	30,0	7,0	0,8
Нижний $X_{i,\text{н}}$	$x_{i,\text{н}} = -1$	20,0	3,0	0,4
Базовый $X_{i,0}$	$x_{i,0} = 0$	25,0	5,0	0,6
Интервалы варьирования $\Delta X_i$	$\Delta x_i = \pm 1$	5,0	2,0	0,2
Размеры звёздного плеча				
$+\alpha$	+1,682			
$-\alpha$	-1,682			

Нормализация или кодирование факторов проводится по соотношению

$$x_i = \frac{X_i - X_{i,0}}{\Delta X_i}. \quad (3.2)$$

В соответствии с (3.2) нормированные значения факторов на разных уровнях будут равны

$$x_{i,0} = \frac{X_{i,0} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = 0; \quad x_{i,b} = \frac{X_{i,b} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = +1; \quad x_{i,n} = \frac{X_{i,n} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = -1. \quad (3.3)$$

### 3.2 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента

Согласно (3.1) между параметром оптимизации Э и факторами Р, Q и K, функциональная зависимость нелинейная, поэтому область оптимума объекта исследования, если она имеется, может быть достоверно (адекватно) описана полиномом или уравнением регрессии второго порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_{ii}^2, \quad (3.4)$$

где  $y$  – функция цели или параметр оптимизации;  
 $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$  – коэффициенты уравнения регрессии;  
 $x_i, x_{ij}, x_{ii}$  – нормированные значения факторов.

Такая математическая модель может быть получена на основе планов второго порядка, например, ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) или ротатабельного центрального композиционного плана (РЦКП) [4, 5]. ОЦКП второго порядка рекомендуется применять, когда не предъявляется особых требований к точности предсказания параметра оптимизации по уравнению регрессии (3.4) в любом направлении от базовой центральной точки. В случае необходимости точности прогнозирования функции цели в разных направлениях целесообразно применять РЦКП, поскольку планы с таким свойством облегчают оптимизацию объекта. Воспользуемся РЦКП второго порядка для решения задачи оптимизации технологического процесса дробилки зерна по минимуму энергопотребления.

Ротатабельность плана обеспечивается тремя путями:

1. Выбором определённой нормированной величины плеча звёздной точки.
2. Выбором необходимого числа опытов в центре плана  $N_0$ .
3. Выбором некоторых констант плана ( $A, C, \lambda$ ), удовлетворяющих условию невырожденности корреляционной матрицы.

В ротатабельном ЦКП предусматривается проведение эксперимента в точках  $N_\phi$  полного факторного эксперимента ПФЭ или дробного факторного эксперимента (ДФЭ), в звёздных точках  $N_\alpha$  и точках центра плана  $N_0$ .

Число точек факторного пространства и величины плеча  $\alpha$  звёздных точек при РЦКП для различного числа факторов “ $n$ ” приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Число факторов	2	3	4	5	5	6
Точек ПФЭ (ДФЭ)	4	8	16	32	( $2^{5-1} = 16$ )	( $2^{6-1} = 32$ )
Звёздных точек, $N_\alpha$	4	6	8	10	10	12
Центральных точек, $N_\phi$	5	6	7	10	6	9
Общее число точек	13	20	31	52	32	53
Размер плеча, $\alpha$	1,414	1,682	2,000	2,378	2,000	2,378

После определения общего числа точек эксперимента строится рабочая матрица планирования математического эксперимента. В таблице 3.3 представлена матрица РЦКП для трёх факторов.

При перестройке исходной математической модели объекта исследования методом ПМЭ, как отмечалось в Предисловии, вместо натуральных опытов, предусмотренных в матрице планирования эксперимента, производится аналитический расчёт функции цели  $y$  по исходной модели (3.1) для каждой строчки матрицы плана с учётом уровней факторов (+1; -1; 0), указанных в столбцах №2...4 и значений факторов в физических единицах, соответствующих этим уровням. При расчётах по уравнению (3.1) в качестве постоянных величин принимаются  $\eta_{\text{п}} = 0,95$ ; ;  $K_{\text{вл.}} = 0,86$  и  $\lambda_{\text{и}} = 1$ . Данные расчётов значений  $y$  по всем 20 строкам записываются в столбец №12 матрицы плана.

### 3.3 Расчёт коэффициентов регрессии и оценка их значимости

Далее производится расчёт коэффициентов уравнения регрессии  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{b}_{ij}$ ,  $\mathbf{b}_{ii}$ . При этом следует заметить, что расчёт коэффициентов регрессии РЦКП отличается большей сложностью и предусматривает расчётное определение ряда коэффициентов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\lambda_4$  и др.

С целью упрощения расчётов коэффициентов уравнения регрессии можно использовать формулы, расчётные коэффициенты которых были получены с помощью ЦВМ и приведены, например, в [4, 5].

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0 &= a_1 \sum_{g=1}^N y - a_2 \sum_1^n \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2 \cdot y; \\
 \mathbf{b}_i &= a_3 \sum_{g=1}^N x_{ig} \cdot y; \quad \mathbf{b}_{ij} = a_4 \sum_{g=1}^N x_{ig} \cdot x_{jg} \cdot y; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\
 \mathbf{b}_{ii} &= a_5 \sum_{g=1}^N x_{ig}^2 \cdot y + a_6 \sum_1^n x_{ig}^2 \cdot y - a_2 \sum_{g=1}^N y.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для числа факторов  $n \leq 7$  значения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_6$  приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.3 – Матрица РЦКП для трёх факторов

№ столбцов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Группы точек	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$	$\hat{y}$
<b>N<sub>φ</sub></b>	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	3,264	3,15
	2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	4,896	4,844
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	1,399	1,4
	4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	2,098	2,15
	5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	6,528	6,4
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	9,792	9,514
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	3,717	3,57
	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	4,96	4,89
<b>N<sub>α</sub></b>	9	+1	-1,682	0	0	0	0	0	+2,829	0	0	4,541	4,395
	10	+1	+1,682	0	0	0	0	0	+2,829	0	0	7,411	7,14
	11	+1	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,829	0	3,938	4,35
	12	+1	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,829	0	1,559	1,41
	13	+1	0	0	-1,682	0	0	0	0	0	+2,829	4,118	4,49
	14	+1	0	0	+1,682	0	0	0	0	0	+2,829	8,231	8,053
	15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672
	16	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672
<b>N<sub>0</sub></b>	17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672
	18	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672
	19	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672
	20	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,672	3,672

Таблица 3.4

Число факторов n	Общее число опытов N	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
2	13	0,2	0,1	0,125	0,25	0,125	0,0187
3	20	0,1663	0,0568	0,0732	0,125	0,0625	0,0069
4	31	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037
5	32	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028
6	53	0,1108	0,0187	0,0231	0,0312	0,0156	0,0012
$2^{6-1}$	32	0,625	0,0098	0,0125	0,0156	0,0078	0,0005
7	92	0,0703	0,0098	0,0125	0,0156	0,0078	0,0005

В результате расчётов коэффициентов регрессии по (3.5) и таблицы 3.4 с учётом данных в матрице плана РЦКП были получены следующие значения коэффициентов

$$b_0 = 3,68 ; \quad b_1 = 0,816 ; \quad b_2 = -1,28 ; \quad b_3 = 1,36 ;$$

$$b_{12} = -0,349 ; \quad b_{13} = 0,292 ; \quad b_{23} = -0,583 ; \quad b_{123} = -0,116 ;$$

$$b_{11} = 0,738 ; \quad b_{22} = -0,524 ; \quad b_{33} = 0,74 .$$

Поскольку при математическом эксперименте отсутствует дисперсия воспроизводимости функции цели  $S_B^2\{y\}$ , необходимо для статистической оценки значимости коэффициентов и проверки адекватности полученной модели объекта, значение  $S_B^2\{y\}$ , как отмечалось в Предисловии, вводится искусственно такой величины, чтобы обеспечивалась необходимая точность расчётов. В данной работе принято

$$S_B^2\{y\} = (3\sigma)^2 = (3 \cdot 0,03)^2 . \quad (3.7)$$

где  $\sigma$  – средняя квадратическая ошибка или стандарт принимается равной 0,03, т.е. погрешность расчётов составит 3%.

Оценка значимости коэффициентов уравнений регрессии (3.6) определяется по  $t$ -критерию Стьюдента по условию

$$t_{pi} = \frac{|b_i|}{S_B\{y\}} > t_T = t_K , \quad (3.8)$$

где  $t_{pi}$ ,  $t_T$  – расчётное и табличное значения критерия, равное критическому  $t_K$ ;

$|b_i|$  - абсолютное значение  $i$ -того коэффициента;

$S_B\{y\}$  - ошибка расчётов функции цели.

При этом, согласно (3.7)

$$S_B\{y\} = \sqrt{S_B^2\{y\}} = \sqrt{(3 \cdot 0,03)^2} = 0,09 . \quad (3.9)$$

Табличное значение критерия Стьюдента  $t_T$  определяется по таблице  $t$ -критерия, приведенной в Приложении А для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и числу степеней свободы  $f_0 = N \cdot (m-1) = 20$  и равно  $t_T = 2,086$ .

При этом, если  $t_{pi} > t_k$ , то коэффициенты регрессии  $b_i$  признаются значимыми и при  $t_{pi} < t_k = t_p$  – незначимыми. Незначимым оказался коэффициент  $b_{123}$  и поэтому уравнение регрессии (3.4) примет вид

$$\hat{y} = 3,68 + 0,816 x_1 - 1,28 x_2 + 1,36 x_3 - 0,349 x_1 x_2 + 0,292 x_1 x_3 - 0,583 x_2 x_3 + 0,738 x_1^2 - 0,524 x_2^2 + 0,74 x_3^2, \quad (3.10)$$

где  $\hat{y}$  – расчётное значение функции цели или параметра оптимизации.

Для оценки адекватности расчётного уравнения регрессии (3.10) необходимо произвести расчёты по (3.10) значений  $\hat{y}$  для каждой строки матрицы плана (таблица 3.3) с учётом значений факторов в столбцах 2...11. Расчётные данные  $\hat{y}$  приводятся в столбце №13.

### 3.4 Проверка адекватности уравнения регрессии

Смысл такой проверки состоит в необходимости убедиться в том, что полученное уравнение регрессии (3.10) с достаточной степенью достоверности, т.е. адекватно, описывает параметр оптимизации или функции цели объекта исследования.

Адекватность уравнения регрессии (3.10), полученного в результате перестройки исходной математической модели объекта исследования (3.1), проверяется по  $F$ -критерию Фишера по условию

$$F_p = \frac{S_{ad}^2 \{ \hat{y} \}}{S_B^2 \{ y \}} < F_T = F_K \quad (3.11)$$

где  $F_p$ ,  $F_T$  – расчётное и табличное значения критерия Фишера, равное критическому  $F_K$ ;

$S_B^2 \{ y \}$  - дисперсия воспроизводимости, определяется по (3.7);

$S_{ad}^2 \{ \hat{y} \}$  - дисперсия адекватности полученной модели (3.10).

При этом, если  $F_p < F_K$  – уравнение регрессии признаётся адекватным, при  $F_p > F_K$  – неадекватным. Дисперсия адекватности определяется по уравнению

$$S_{ad}^2 \{ \hat{y} \} = \frac{m}{N-d} \sum_{g=1}^N (y - \hat{y})^2, \quad (3.12)$$

где  $m$  – число параллельных опытов. При математическом эксперименте принимается  $m = 1$ ;

$d$  – число значимых коэффициентов уравнения регрессии (3.10) с учётом свободного члена  $b_0$ .

Так как  $N = 20$  и  $d = 10$ , то  $N - d = 10$ .

При расчётах по (3.12) значения  $y$  и  $\hat{y}$  берутся по каждой строке матрицы плана из столбцов №12 и 13.

Табличное значение F-критерия Фишера  $F_T$  определяется по таблице критерия, приведенной в Приложении В, для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и степени свободы адекватности и воспроизводимости

$$f_{ad} = f_1 = N - d = 10 \text{ - по горизонтали таблицы;} \\ f_B = f_2 = N(m - 1) = 20 \text{ - по вертикали таблицы.}$$

Значение критерия при этом равно  $F_T = 2,365$ . По результатам расчётов по (3.12)  $S_{ad}^2\{\hat{y}\} = 0,0175$  с учётом значения по (3.7)  $S_B^2\{y\} = 0,0081$  условие (3.11) можно записать в виде

$$F_p = \frac{0,0175}{0,0081} = 2,16 < F_T = 2,365. \quad (3.13)$$

Следовательно, расчётное уравнение параметра оптимизации (3.10) является адекватным.

С помощью уравнения (3.10) и данных таблицы 3.1 можно также получить уравнение принятого параметра оптимизации  $\Xi$  в функции факторов в физических единицах

$$\Xi = 16,2 - 1,313P + 2,42Q - 15,41K_3 - 0,035PQ + 0,29PK_3 - 1,46QK_3 + \\ + 0,0295P^2 - 0,13Q^2 + 18,5K_3^2. \quad (3.14)$$

### 3.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта

Для исследования области оптимума объекта на основе полученного адекватного уравнения регрессии второго порядка (3.10) воспользуемся одним из эффективных методов поиска оптимума, получившего название канонического преобразования математической модели объекта исследования.

Основным этапом канонического преобразования является перенос начала координат в новую точку  $S$  факторного пространства и поворот старых осей на некоторый угол до совмещения с главными осями геометрической поверхности. В результате чего исчезают линейные члены уравнения и изменяется значение свободного члена в исходном уравнении вида (3.4). Чтобы осуществить перенос начала координат в особую точку поверхности отклика, представляющую собой геометрическую интерпретацию параметра оптимизации, необходимо продифференцировать уравнение (3.4) по каждой независимой переменной  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и приравнять нулю частные производные. Решением системы полученных уравнений в частных производных определяются координаты нового центра  $S_z$  в старых осях  $(x_i, x_j, \dots, x_n)$ . Подставляя найденные значения координат  $x_{is}$  в точку  $S$  в исходное уравнение регрессии (3.4), определяют величину параметра оптимизации  $Y_S$  в центре поверхности  $S_z$ .

После переноса центра в точку  $S$  уравнение (3.4) примет вид

$$Y = Y_S + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2.$$



Затем в новом начале координат поворачивают оси координат на определённый угол  $\alpha$  до совмещения с главными осями геометрической поверхности (см. (2.32) Гл. 2). В результате этих операций окончательно получают типовую каноническую форму уравнения второго порядка без парных взаимодействий факторов в виде

$$Y - Y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \dots + B_{nn}X_n^2. \quad (3.15)$$

При трёх независимых переменных уравнение (3.15) преобразуется к виду

$$Y - Y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{33}X_3^2, \quad (3.16)$$

где  $Y$  – значение параметра оптимизации;

$Y_s$  – значение параметра оптимизации в центре поверхности отклика, т.е. в новом начале координат;

$X_1, X_2, X_3$  – канонические переменные, которые являются линейными функциями факторов  $x_1, x_2, x_3$  и представляют собой новые оси координат в факторном пространстве;

$B_{11}, B_{22}, B_{33}$  – коэффициенты канонического уравнения.

Уравнение в канонической форме (3.16) удобно для анализа и оптимизации, т.к. в него входят все факторы только в квадрате.

Для определения координат нового центра поверхности отклика  $S_z$  уравнение (3.10) следует продифференцировать по каждой переменной  $x_i$  и частные производные приравнять нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 0,816 - 0,349x_2 + 0,292x_3 + 1,476x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,28 - 0,349x_1 - 0,583x_3 - 1,048x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 1,36 + 0,292x_1 - 0,583x_2 + 1,48x_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Решая систему уравнений (3.17), получим значение координат центра поверхности отклика  $S_z$

$$x_{1s} = -0,47; \quad x_{2s} = -0,5; \quad x_{3s} = -1,02. \quad (3.18)$$

При подстановке значений координат в исходное уравнение (3.10) определяем величину параметра оптимизации  $Y_s = 3,11$ .

Координатам  $x_{1s}, x_{2s}$  и  $x_{3s}$ , а также величине  $Y_s$  соответствуют следующие значения факторов и функции цели в физических единицах согласно (3.2) и таблицы 3.1.

$$P = 22,65 \text{ кВт}; \quad Q = 4,0 \text{ т/ч}; \quad K_3 = 0,4; \quad Y_s = \Theta = 3,11 \text{ кВт} \cdot \text{ч/т}. \quad (3.19)$$

Для получения аналитической и графической интерпретации области оптимума параметра оптимизации, описываемого уравнением (3.10), а также определения значений факторов  $P, Q$  и  $K_3$ , близких к оптимальным, воспользу-

емся методом двумерных сечений поверхности отклика [5]. Построение двумерных сечений поверхности отклика параметра оптимизации выполняется в следующей последовательности. В уравнение регрессии вида (3.10), независимо от количества факторов, подставляют близкие к оптимальному значению или равных 0 (нулевому уровню) всех факторов, кроме двух. В результате уравнение (3.10) приводится к уравнению регрессии, выражающему зависимость параметра оптимизации от двух факторов. После дифференцирования такого уравнения по двум переменным, и приравнивая частные производные нулю, определяются координаты центра поверхности отклика  $S_z$  и величины параметра оптимизации в центре  $Y_s$ . Затем, принимая различные значения параметра оптимизации  $Y_s$  в каноническом уравнении, выполняются двумерные сечения поверхности отклика и строятся кривые равного отклика, называемые контурными кривыми поверхности отклика, по которым оценивается изменение величины критерия оптимизации в зависимости от варьирования уровней каждой пары факторов и определяются их значения, близкие к оптимальным.

Рассмотрим, применительно к полученному адекватному уравнению регрессии (3.10), три варианта двумерных сечений поверхности отклика, с построением и анализом семейства контурных кривых.

1. Принимаем в (3.10)  $x_1 = 0$ , что соответствует значению фактора  $P = 25$  кВт. Двумерные сечения поверхности отклика, в этом случае, будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от производительности  $Q$  ( $x_2$ ) и коэффициента загрузки  $K_3$  ( $x_3$ ). Уравнение (3.10) примет вид

$$\hat{y} = 3,68 - 1,28x_2 + 1,36x_3 - 0,583x_2x_3 - 0,524x_2^2 + 0,74x_3^2, \quad (3.20)$$

Определим координаты центра поверхности  $S_z$  в результате решения системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,28 - 0,583x_3 - 1,048x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 1,36 - 0,583x_2 + 1,48x_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$x_{2s} = -0,58; \quad x_{3s} = -1,15; \quad Y_s = 3,27,$$

что соответствует

$$Q = 3,84 \text{ т/ч} \quad \text{и} \quad K_3 = 0,37.$$

Значение  $Y_s$  определяется после подстановки значений  $x_{2s}$  и  $x_{3s}$  в (3.20). Для канонического преобразования (3.20) по (3.21) составляется характеристический детерминант

$$f(B) = \begin{vmatrix} -1,048 - B & 0,5 \cdot (-0,583) \\ 0,5 \cdot (-0,583) & 1,48 - B \end{vmatrix} = (-1,048 - B)(1,48 - B) - 0,085 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{22} = 1,51; \quad B_{33} = -1,08.$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 3,27 = 1,51X_2^2 - 1,08X_3^2. \quad (3.22)$$

Так как коэффициенты в каноническом уравнении  $B_{22}$  и  $B_{33}$  имеют разные знаки, то, в соответствии с табл. 3.5, контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика при принятых значениях параметра оптимизации  $Y_S$  будут гиперболами с вытянутым седлом по оси  $X_3$ . Контурные кривые для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 3.1. Величина  $Y_S$  в центре определяет минимальное значение параметра оптимизации  $\mathcal{E}$ .

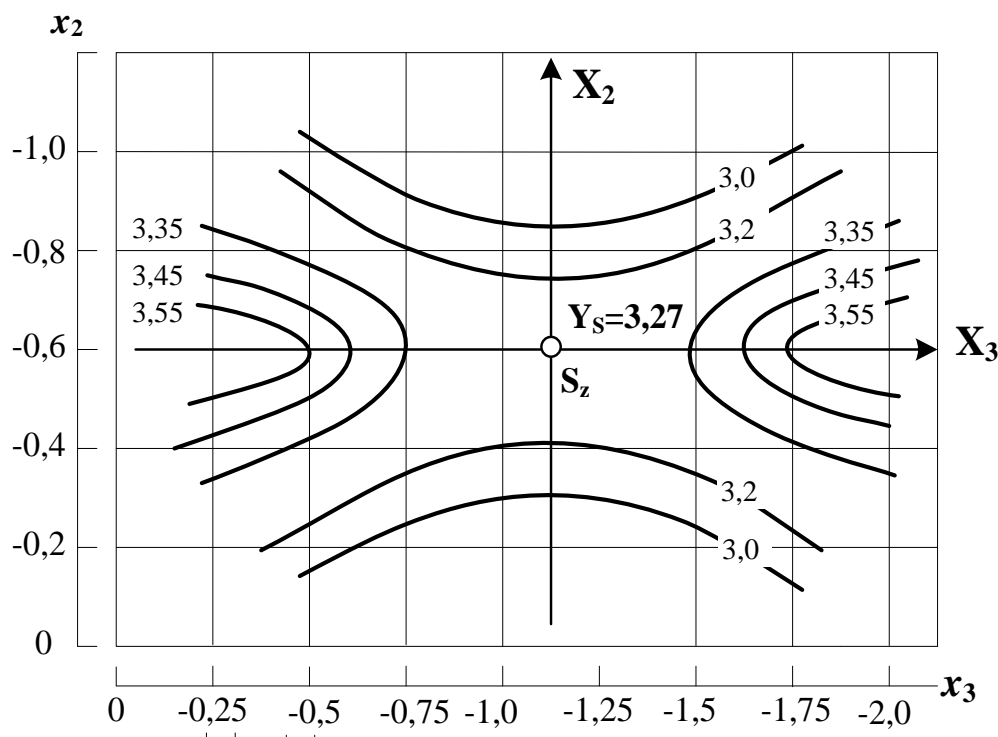


Рисунок 3.1 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_1 = 0$  ( $P = 25$  кВт) и значениях  $Y_S = 3,27; 3,35; 3,45; 3,55$ .

Согласно рис. 3.1, область оптимума вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_2$  и  $x_3$  в пределах

$$\begin{aligned} x_2 & \text{ от } -4,1 \text{ до } -7,5 \text{ и} \\ x_3 & \text{ от } -0,25 \text{ до } -1,5, \end{aligned}$$

что соответствует факторам  $Q = 3,2-3,5$  т/ч и  $K_3 = 0,45-0,3$ .

Минимальное значение параметра оптимизации при этом  $\mathcal{E} = Y_S = 3,27$  кВт·ч/т и мощность  $P = 25$  кВт.

2. Принимаем в уравнении (3.10)  $x_2 = 0$ , что соответствует значению фактора  $Q = 5$  т/ч. Двумерные сечение поверхности отклика в этом случае будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от мощности  $P$  ( $x_1$ ) и коэффициента загрузки  $K_3$  ( $x_3$ ) дробилки. Уравнение (3.10) при  $x_2 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 3,68 + 0,816x_1 + 1,36x_3 + 0,292x_1x_3 + 0,738x_1^2 + 0,74x_3^2, \quad (3.23)$$

Определим координаты центра поверхности  $S_z$  и величину параметра оптимизации  $Y_S$  в результате решения системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 0,816 + 0,292x_3 + 1,476x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 1,36 + 0,292x_1 + 1,48x_3 = 0.\end{aligned}\tag{3.24}$$

В результате решения системы (3.24) получим значения координат и по (3.23) определится параметр  $Y_S$

$$x_{1S} = -0,39; \quad x_{3S} = -0,84; \quad Y_S = 2,95,$$

что соответствует

$$P = 23,05 \text{ кВт}; \quad K_3 = 0,44.$$

Для канонического преобразования (3.23) по уравнению (3.24) составляется характеристический детерминант

$$f(B) = \begin{vmatrix} 1,476 - B & 0,5 \cdot 0,292 \\ 0,5 \cdot 0,292 & 1,48 - B \end{vmatrix} = (1,476 - B)(1,48 - B) - 0,021 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{11} = 1,62; \quad B_{33} = 1,33$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 2,95 = 1,62X_2^2 + 1,33X_3^2.\tag{3.25}$$

Поскольку коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{33}$  имеют одинаковые знаки  $B_{11} > 0$  и  $B_{33} > 0$ , следовательно, контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика, в соответствии с табл. 3.5, будут эллипсами и центр поверхности отклика будет минимумом параметра  $\mathcal{E}$ . Контурные кривые для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 3.2, из которого следует, что область оптимума вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_1$  и  $x_3$  в пределах

$$x_1 \text{ от } -0,56 \text{ до } -0,24 \text{ и}$$

$$x_3 \text{ от } -0,2 \text{ до } -1,6,$$

что соответствует факторам в физических единицах

$$P = 25,31-23,8 \text{ кВт и } K_3 = 0,56-0,28.$$

Минимальное значение параметра оптимизации в центре при этом равно

$$\mathcal{E} = Y_S = 2,95 \text{ кВт} \cdot \text{ч/т и производительность } Q = 5 \text{ т/ч.}$$

3. Принимаем в уравнении (3.10)  $x_3 = 0$ , что соответствует значению фактора  $K_3 = 0,6$ . Двумерные сечения поверхности отклика будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от мощности  $P(x_1)$  и производительности  $Q(x_2)$ .

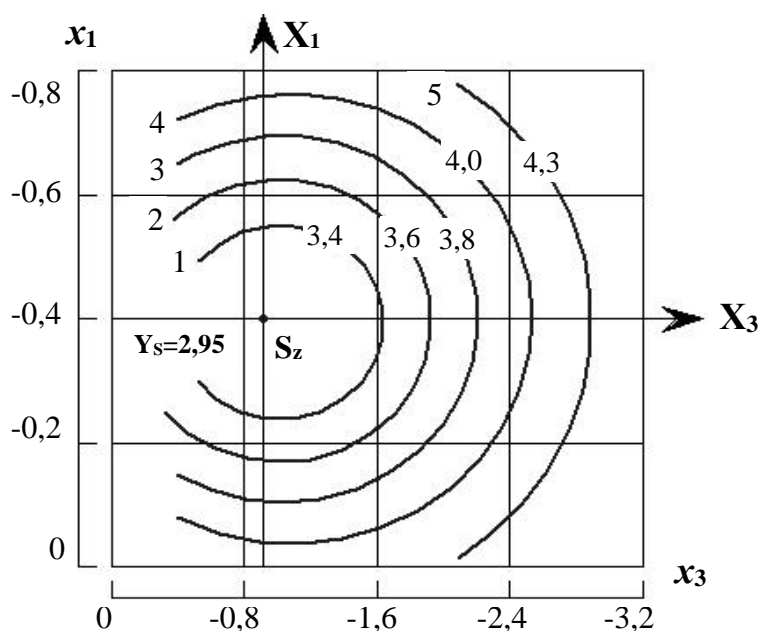


Рисунок 3.2 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_2 = 0$  ( $Q = 5$  т/ч) и значениях  $Y_S = 2,95; 3,4; 3,6; 3,8; 4,0; 4,3$ .

Уравнение регрессии (3.10) при  $x_3 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 3,68 + 0,816x_1 - 1,28x_2 - 0,349x_1x_2 + 0,738x_1^2 - 0,524x_2^2, \quad (3.26)$$

Координаты центра поверхности отклика и величина  $Y_S$  в этом случае также определяется при решении следующей системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= 0,816 - 0,349x_2 + 1,476x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= -1,28 - 0,349x_1 - 1,048x_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В результате решения системы (3.27) получим значения координат центра  $S_z$  и после их подстановки в (3.26) определится параметр  $Y_S$

$$x_{1s} = -0,78; \quad x_{2s} = -0,96; \quad Y_S = 3,98,$$

что соответствует

$$P = 21,1 \text{ кВт}; \quad Q = 3,08 \text{ т/ч}; \quad \Xi = Y_S = 3,98 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}.$$

Характеристический детерминант для системы (3.27) имеет вид

$$f(B) = \begin{vmatrix} 1,476 - B & 0,5 \cdot (-0,349) \\ 0,5 \cdot (-0,349) & -1,048 - B \end{vmatrix} = (1,476 - B)(-1,048 - B) - 0,03 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{11} = 1,49; \quad B_{22} = -1,06$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 3,98 = 1,49X_1^2 - 1,06X_2^2. \quad (3.28)$$

В данном случае коэффициенты в каноническом уравнении  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют разные знаки, поэтому контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика при различных значениях  $Y_S$ , в соответствии с табл. 3.5, будут гиперболами. Контурные кривые при  $x_3 = 0$  для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 3.3.

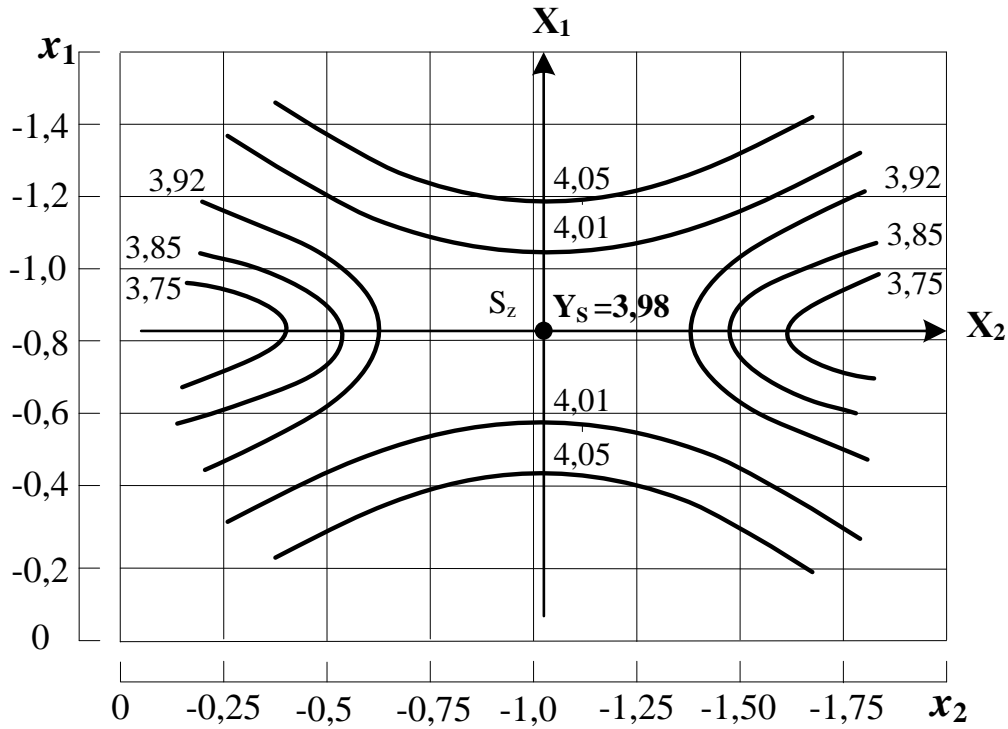


Рисунок 3.3 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_3 = 0$  ( $K_3 = 0,6$ ) и значениях  $Y_S = 3,98; 3,93; 3,85; 3,75$ .

Согласно рис. 3.3, область оптимума параметра оптимизации вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_1$  и  $x_2$  в пределах

$$x_1 \text{ от } -0,55 \text{ до } -1,0 \text{ и}$$

$$x_2 \text{ от } -0,65 \text{ до } -1,35 ,$$

что соответствует факторам в физических единицах

$$P = 22,25 - 20,0 \text{ кВт и } Q = 6,3 - 2,3 \text{ т/ч.}$$

Минимальное значение параметра оптимизации при этом равно

$$\Xi = Y_S = 3,98 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т и коэффициенте загрузки } K_3 = 0,6.$$

### 3.6 К определению типа контурных кривых по каноническому уравнению второго порядка

Типовое каноническое уравнение при  $n$  независимых переменных (3.16) при двух переменных преобразуется к виду

$$Y - Y_S = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2. \quad (3.29)$$

Для уравнения (3.29) в зависимости от знака и величин  $\mathbf{V}_{11}$  и  $\mathbf{V}_{22}$  возможны четыре вида контурных кривых при двумерных сечениях поверхности отклика с равными значениями параметра оптимизации (рис. 3.4).

**Коэффициенты  $\mathbf{V}_{11}$  и  $\mathbf{V}_{22}$  имеют одинаковые знаки.** Контурные кривые в этом случае являются эллипсами. При  $\mathbf{V}_{ii} < 0$  центр эллипсов будет максимумом, при  $\mathbf{V}_{ii} > 0$  – минимумом. Если  $|\mathbf{V}_{22}| < |\mathbf{V}_{11}|$ , то эллипс вытянут по оси  $X_2$ , и наоборот (рис. 3.4, а).

**Коэффициенты  $\mathbf{V}_{11}$  и  $\mathbf{V}_{22}$  имеют разные знаки.** Контурные кривые в этом случае являются гиперболами. Центр фигуры называется “седлом” или “минимаксом”. В зависимости от соотношения абсолютных величин коэффициентов  $\mathbf{V}_{11}$  и  $\mathbf{V}_{22}$  изменение выходной переменной по осям  $X_1$  и  $X_2$  будет различным (рис. 3.4, б).

**Один из коэффициентов близок или равен нулю.** Если один из коэффициентов, например  $\mathbf{V}_{22}$ , равен нулю, центр находится на бесконечности. Поверхность отклика представляет собой возрастающее возвышение “гребень”. Иногда  $\mathbf{V}_{22} \approx 0$  и центр фигуры находится в любом месте оси  $X_2$ . Поверхность отклика представляет собой “стационарное возвышение”. На практике этот случай встречается редко (рис. 3.4, в, г).

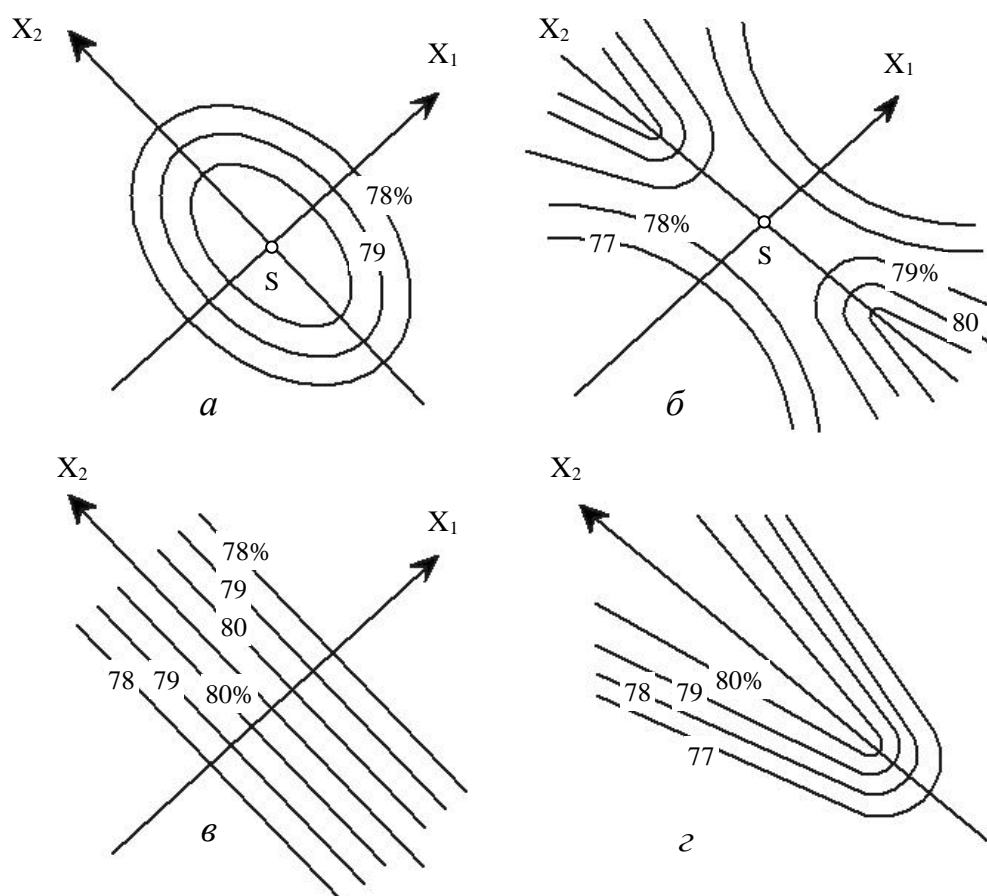


Рисунок 3.4 – Контурные кривые функции отклика области оптимума, описываемой уравнением второго порядка.

Указанные случаи идеализированы, однако они помогают исследователю ориентироваться в структуре поверхности отклика. Основные типы поверхностей отклика для двух переменных приведены в таблице 3.5 [4, табл. 69].

Таблица 3.5 – Типовые поверхности отклика канонического уравнения двух переменных

Номер типа	Коэффициенты			Тип кривых в сечении	Геометрическая интерпретация типа поверхности	Центр
	Соотношение	Знаки				
		$B_{11}$	$B_{22}$			
1	$B_{11} = B_{22}$	–	–	Окружность	Круглая выпуклость	Максимум
2	$B_{11} = B_{22}$	+	+	Окружность	Круглая впадина	Минимум
3	$B_{11} > B_{22}$	–	–	Эллипсы	Эллипсоидная выпуклость	Максимум
4	$B_{11} > B_{22}$	+	+	Эллипсы	Эллипсоидная впадина	Минимум
5	$B_{11} = B_{22}$	+	+	Гиперболы	Симметричное седло	Седловая точка
6	$B_{11} = B_{22}$	–	+	Гиперболы	Типа минимакса	Седловая точка
7	$B_{11} > B_{22}$	+	–	Гиперболы	Вытянутое седло по оси $X_2$	Седловая точка
8	$B_{22} = 0$	–		Прямые	Стационарный гребень	Нет
9	$B_{22} = 0$	–		Парабола	Возрастающий гребень	На бесконечности

### *Анализ и оценка результатов исследования*

На основе аналитического и графического анализа области оптимума параметра оптимизации технологического процесса дробилки зерна тип ДБ-5-1 получены следующие средние оптимальные значения параметра оптимизации и факторов при их различных сочетаниях воздействия:

$$\Theta = 3,33 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}; \quad P = 23 \text{ кВт}; \quad Q = 4 \text{ т/ч} \quad \text{и} \quad K_3 = 0,45.$$

В то же время в паспорте дробилки приводятся следующие данные:

- удельный расход электроэнергии

$$W_{\text{уд.}} = \Theta = 5,4 - 8,0 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т};$$

- установленная мощность электродвигателей

$$P = 32,2 \text{ кВт};$$

- производительность при измельчении фуражного зерна

$$Q = 4 - 6 \text{ т/ч}.$$



Существенное расхождение паспортной энергоёмкости и расчётной оптимальной практически в два раза объясняется очевидно тем, что управление технологическим процессом измельчения зерна в дробилке является неоптимальным по энергозатратам. Кроме того, обращает на себя внимание необоснованное завышение суммарной установленной мощности электродвигателей дробилки, равной 32,2 кВт. По результатам исследования, оптимальной, с точки зрения минимального потребления электроэнергии, является мощность  $P = 23$  кВт.

ОПТИМИЗАЦИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО  
ПРОЦЕССА  
АГРЕГАТА  
ПРИГОТОВЛЕНИЯ  
МУКИ Р6-АВМ-15

$$W_{уд.} = \frac{\sum_1^n P_{1i} \cdot K_3}{Q \cdot K_{заг.}}$$

ПМЭ                      ОЦКП

↓                              ↓

$$\hat{y} = 2,53 - 2,05x_1 + 0,62x_2 - 0,84x_3 - 0,38x_1x_2 + 0,54x_1x_3 - 0,16x_2x_3 + 0,78x_1^2 + 0,89x_2^2 + 0,21x_3^2$$

Целью исследования является обоснование влияния факторов, обеспечивающих минимальный удельный расход электроэнергии технологического процесса мукомольного агрегата Р6-АВМ-15. Суммарная установленная мощность электродвигателей в приводе рабочих машин  $\sum P_{ni} = 36$  кВт. Номинальная производительность агрегата  $Q_n = 20$  т/ч.

В соответствии с поставленной задачей в качестве функции цели принимается удельный расход электроэнергии при технологическом процессе приготовления муки на мельнице  $W_{уд.}$ , кВт·ч/т.

**4.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов**

На основании аналитического обзора литературы по технологическому процессу мукомольного агрегата Р6-АВМ-15 была сформирована исходная математическая модель объекта исследования в виде уравнения

$$W_{уд.} = \frac{\sum_1^n P_{1i} \cdot K_3}{Q \cdot \sum_1^n \eta_{ni} \cdot K_{заг.}}, \tag{4.1}$$

где  $\sum_1^n P_{ni}$  - суммарная номинальная мощность электродвигателей в приводе агрегата, кВт;

$\sum_1^n \eta_{ni}$  - номинальный КПД электродвигателя, о.е.;

$K_3$  - коэффициент загрузки электродвигателей, о.е. Принимается в дальнейшем  $K_3 = 0,8$ , при котором КПД приводных электродвигателей рабочих машин максимальный;

$Q$  - производительность мукомольного агрегата, т/ч;

$K_{\text{заг}}$  – коэффициент, учитывающий степень загрязнения очищаемого зерна, о.е.

Можно уравнение (4.1) представить как зависимость параметра оптимизации  $W_{\text{уд}}$  в функции потребляемой мощности электродвигателей агрегата

$$W_{\text{уд}} = \frac{\sum_1^n P_1 \cdot K_3}{Q \cdot K_{\text{заг}}}, \quad (4.2)$$

где  $\sum_1^n P_i = P_1$  – суммарная потребляемая мощность электродвигателей, кВт.

Выбор факторов и интервалов их варьирования производится на основе анализа априорной информации об объекте исследования, математической модели функции цели (4.2) и общих требований к факторам при использовании методов планирования математического эксперимента [2-5, 7].

В качестве переменных факторов функции цели принимаются:

$Q$  – производительность агрегата, т/ч;

$P_1$  – потребляемая мощность электродвигателей, кВт;

$K_{\text{заг}}$  – коэффициент загрязнения зерна, о.е.

Интервалы варьирования факторов выбираются в соответствии с реальными возможностями настройки рабочих машин мукомольного агрегата и приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Уровни варьирования факторов	Факторы в нормированных единицах	Факторы в физических единицах		
		Q, т/ч	P <sub>1</sub> , кВт	K <sub>заг</sub> , о.е.
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
Верхний X <sub>i,в</sub>	x <sub>i,в</sub> = +1	20,0	36,0	0,8
Нижний X <sub>i,н</sub>	x <sub>i,н</sub> = -1	6,0	26,0	0,5
Базовый X <sub>i,0</sub>	x <sub>i,0</sub> = 0	13,0	31,0	0,65
Интервалы варьирования ΔX <sub>i</sub>	Δx <sub>i</sub> = ±1	7,0	5,0	0,15
Размеры звёздного плеча				
+α	+1,215	24,3	43,74	0,972
-α	-1,215	7,29	31,59	0,608

Нормализация факторов производится по формуле (1.3)

$$x_i = \frac{X_i - X_{i,0}}{\Delta X_i}. \quad (4.3)$$

В соответствии с (4.3) нормированные значения факторов на разных уровнях будут равны

$$x_{i,0} = \frac{X_{i,0} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = 0; \quad x_{i,в} = \frac{X_{i,в} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = +1; \quad x_{i,н} = \frac{X_{i,н} - X_{i,0}}{\Delta X_i} = -1. \quad (4.4)$$

## 4.2 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента

При решении задачи оптимизации сложных объектов исследования для адекватного описания области оптимума, как правило, используются полиномы второго порядка вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i < j}^n b_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (4.5)$$

где  $y$  – функция цели;

$b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$  – коэффициенты уравнения регрессии;

$x_i, x_j, x_i^2$  – нормированные значения факторов.

Такая математическая модель может быть получена на основе планов второго порядка, например, ортогонального центрального композиционного плана (ОЦКП) или ротатабельного центрального композиционного плана (РЦКП).

В [1, 4, 5] рекомендуются для решения задач оптимизации планы ОЦКП второго порядка.

ОЦКП – это планирование эксперимента на пяти уровнях, которые в нормализованных единицах можно представить в виде:

$$1) -\alpha; \quad 2) -1; \quad 3) 0; \quad 4) +1; \quad 5) +\alpha, \quad (4.6)$$

где  $\alpha$  – размер плеча звёздных точек.

Число точек факторного пространства и величины плеч звёздных точек при ОЦКП для различного числа факторов  $n$  приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 [5, 7]

Число факторов	2	3	4	5	6
Точек ПФЭ (ДФЭ)	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^{5-1}$	$2^{6-1}$
Звёздных точек	4	6	8	10	12
Центральных точек	1	1	1	1	1
Общее число точек	9	15	25	27	45
Размер плеча, $\alpha$	1,0	1,215	1,414	1,547	1,727

Матрица ОЦКП для трёх факторов представлена в таблице 4.3.

Для ОЦКП второго порядка критерием оптимальности является ортогональность всех векторов-столбцов матрицы плана, что обеспечивается двумя путями:

1. Преобразованием квадратичных членов  $x_i^2$  в новые, искусственные члены  $\tilde{x}_i^2$  (столбцы 9, 10 и 11) по формуле

$$\tilde{x}_{i,g}^2 = x_{i,g}^2 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2, \quad (4.7)$$

Таблица 4.3 – Матрица ОЦКП при трёх факторах

№ столбцов	1	2	3	4	5	6	7	8	9а	10а	11а	9	10	11	12	13
Группы точек	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$	$\hat{y}$
<b>N<sub>φ</sub></b>	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	6,93	6,68
	2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	2,08	2,26
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	9,6	9,0
	4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	2,88	3,06
	5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	4,33	4,24
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	1,3	1,98
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	6,0	5,92
	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	1,8	2,14
<b>N<sub>α</sub></b>	9	+1	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	5,23	5,36
	10	+1	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	0	+0,746	-0,73	-0,73	1,57	1,26
	11	+1	0	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	-0,73	+0,746	-0,73	2,99	2,8
	12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	0	-0,73	+0,746	-0,73	4,14	4,04
13	+1	0	0	-1,215	0	0	0	0	0	+1,476	+1,476	-0,73	-0,73	+0,746	3,14	3,58
14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	0	0	+1,476	+1,476	-0,73	-0,73	+0,746	1,96	1,9
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	2,93	2,53
<b>N<sub>0</sub></b>																

где  $i$  – номер фактора (1, 2, ..., n);

$g$  – номер строки матрицы плана (1, 2, ..., N);

$N$  – общее число строк матрицы плана, равное числу опытов.

$$N = N_{\phi} + N_a + N_0. \quad (4.8)$$

2. Выбором определённой величины звёздного плеча для различного числа факторов и количества необходимых точек в центре плана  $N_0$  (табл. 4.2).

По матрице плана ОЦКП (табл. 4.3) производится расчёт значений функции цели  $y = f(x_i)$  по исходной математической модели объекта (4.2) для каждой строки  $g$  матрицы плана с учётом уровней факторов, указанных в столбцах матрицы и значений факторов, соответствующих этим уровням, приведенных в таблице 4.1. Результаты расчётов записываются в столбец №12 матрицы плана ОЦКП.

Далее для получения математической модели объекта исследования в виде уравнения регрессии (4.5) производится обработка результатов эксперимента (в нашем случае аналитических расчётов значений функции цели  $y$ ), которая в методе ПМЭ включает в себя:

- определение коэффициентов уравнения регрессии (4.5);
- статистическую оценку значимости коэффициентов регрессии;
- проверку адекватности полученной математической модели.

### **4.3 Расчёт коэффициентов уравнения регрессии и статистическая оценка их значимости**

Для ОЦКП коэффициенты  $\tilde{b}_0$ ;  $b_1 \dots b_n$ ;  $b_{ij}$ ;  $b_{ii}$  регрессии определяются по уравнению

$$b_i = \frac{1}{\sum_{g=1}^N x_{i,g}^2} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g} \cdot y. \quad (4.9)$$

Здесь  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ,

где  $k$  – порядковый номер столбца матрицы плана;

$y$  – значения функции цели, рассчитанные по исходной модели (4.2) и приведенные в столбце №12 матрицы плана.

Расчёты по (4.9) позволяют получить математическую модель для нормированных факторов, включающую преобразованные квадратичные члены

$$\hat{y} = \tilde{b}_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (4.10)$$

где  $\tilde{b}_0$  - преобразованный нулевой член уравнения.

С учётом формулы (4.7) для преобразования членов, получим уравнение регрессии для непреобразованных квадратичных членов

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2, \quad (4.11)$$

При этом

$$\mathbf{b}_0 = \tilde{\mathbf{b}}_0 - \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{i,i} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N x_{i,g}^2. \quad (4.12)$$

Следует отметить, что при расчёте по (4.9) различных коэффициентов регрессии при ОЦКП знаменатель по формуле не будет одинаковым [7, с. 53].

В результате расчётов по уравнению (4.9) и данным матрицы плана были получены следующие значения коэффициентов регрессии (4.10) и (4.11):

$$\begin{aligned} b_0 &= 2,53; & b_1 &= -2,05; & b_2 &= 0,62; & b_3 &= -0,84; \\ b_{12} &= -0,38; & b_{13} &= 0,54; & b_{23} &= -0,16; & b_{123} &= 0,09; \\ b_{11} &= 0,78; & b_{22} &= 0,89; & b_{33} &= 0,21; & \tilde{b}_0 &= 3,79. \end{aligned}$$

Статистическая оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии (4.5) производится по  $t$ -критерию Стьюдента по соотношению

$$t_{pi} = \frac{|\mathbf{b}_i|}{S_B\{y\}} > t_T = t_K, \quad (4.13)$$

где  $|\mathbf{b}_i|$  - абсолютное значение  $i$ -того коэффициента;

$S_B\{y\}$  - среднеквадратичное отклонение дисперсии или ошибки расчётов коэффициентов;

$t_{pi}, t_T$  – расчётное и табличное значения критерия, равное критическому  $t_K$ .

При этом в соответствии с (П.2) дисперсия воспроизводимости функции цели вводится искусственно при принятой ошибке расчётов  $\sigma = 0,02$ , т.е. 2%.

$$S_B\{y\} = \sqrt{S_B^2\{y\}} = 0,06, \quad (4.14)$$

где

$$S_B^2\{y\} = (3\sigma)^2 = (3 \cdot 0,02)^2. \quad (4.15)$$

При этом, если  $t_{pi} > t_K$ , то коэффициенты регрессии  $\mathbf{b}_i$  признаются значимыми и при  $t_{pi} < t_K$  - коэффициенты регрессии  $\mathbf{b}_i$  считаются статистически незначимыми.

Табличное значения критерия  $t_T$  определяется из таблицы критерия Стьюдента (см. Приложение А) по числу степеней свободы  $f_0 = N \cdot (\mathbf{m}-1)$  и уровню значимости  $\alpha$ . При  $f_0 = N \cdot = 15$  и  $\alpha = 0,05$  по таблице Приложения А  $t_T = 2,131$ .

Незначимым признаётся коэффициент регрессии  $b_{123} = 0,09$  и поэтому из уравнения регрессии (4.11) исключается слагаемое  $\mathbf{b}_{123}x_1x_2x_3$  и уравнение регрессии (4.11) с учётом перерасчёта свободного коэффициента  $\mathbf{b}_0$  по (4.12) в конечном варианте примет вид

$$\hat{y} = 2,53 - 2,05x_1 + 0,62x_2 - 0,84x_3 - 0,38x_1x_2 +$$

$$+ 0,54x_1x_3 - 0,16x_2x_3 + 0,78x_1^2 + 0,89x_2^2 + 0,21x_3^2. \quad (4.16)$$

53

Уравнение (4.16) получило название расчётного уравнения регрессии и представляет собой математическую модель рассматриваемого объекта исследования.

С помощью формулы (4.3) и данных табл. 4.1 также получено уравнение удельного расхода электроэнергии агрегата через факторы в физических единицах

$$W_{уд.} = 34,055 - 0,69Q - 1,527P_1 - 4,58K_{зар} - 0,01QP_1 + 0,51QK_{зар} - 0,64P_1K_{зар} + 0,016Q^2 + 0,036P_1^2 + 9,33K_{зар}^2 \quad (4.17)$$

#### 4.4 Проверка адекватности уравнения регрессии

Для проверки адекватности полученной в результате перестройки математической модели по уравнению регрессии (4.16) производится расчёт значений  $\hat{\delta}$  для каждой строки матрицы плана эксперимента с учётом знаков и значений факторов. Результаты расчётов приведены в столбце №13 матрицы. Далее находится дисперсия адекватности полученной модели по уравнению

$$S_{ад}^2 \{ \hat{y} \} = \frac{1}{N-d} \sum_{g=1}^N (y - \hat{y})^2, \quad (4.18)$$

где  $y$  и  $\hat{y}$  берутся из столбцов №12 и 13 плана эксперимента в таблице 4.3;

$d$  – число значимых коэффициентов включая и  $\mathbf{b}_0$  или слагаемых в расчётном уравнении (4.16).

Если при решении конкретной задачи окажется, что все коэффициенты регрессии значимы, т.е.  $\mathbf{d} = \mathbf{N}$ , то следует разность  $(\mathbf{N} - \mathbf{d})$  в знаменателе уравнения (4.18) принять равной единице.

В нашем случае  $N = 15$  и  $d = 10$ , следовательно,  $N - d = 5$ .

Адекватность модели проверяется по **F**-критерию Фишера:

$$F_p = \frac{S_{ад}^2 \{ \hat{y} \}}{S_B^2 \{ y \}} < F_k = F_T, \quad (4.19)$$

где  $F_p, F_k, F_T$  – расчётное, критическое и табличное значения критерия Фишера;

$S_B^2 \{ y \}$  - дисперсия воспроизводимости, определяется по (4.15).

Полученная математическая модель вида (4.16) признаётся адекватной, если для принятого уровня значимости  $\alpha$  и соответствующих чисел степеней свободы выполняется условие

$$F_p < F_k = F_T, \quad (4.20)$$



Если окажется, что  $F_p > F_k = F_T$ , то уравнение признаётся – неадекватным.

Величина критерия  $F_T$  определяется по таблицам  $F$ -критерия Приложения В. При этом степени свободы адекватности и воспроизводимости будут

$$f_{ad} = f_1 = N - d \text{ - по горизонтали таблицы;}$$

$$f_B = f_2 = N(m - 1) \text{ - по вертикали таблицы.}$$

Как отмечалось в случае  $N = d$  принимается  $f_{ad} = 1$ .

В результате расчётов по (4.18) и (4.19) с учётом (П.2) получены значения

$$S_{ad}^2 = 0,0075 \text{ и } F_p = 2,08 .$$

Так как  $f_{ad} = f_1 = N - d = 5$  и  $f_B = f_2 = N = 15$ , то принимая уровень значеня  $F$ -критерия  $\alpha = 0,05$ , получим  $F_T = 2,9$ .

Поскольку  $F_p = 2,08 < F_T = 2,9$ , полученное уравнение регрессии (4.16) признаётся адекватным и с достаточной степенью достоверности описывает свойства объекта исследования.

#### **4.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта**

Для исследования области оптимума объекта на основе полученного адекватного уравнения регрессии второго порядка (4.16) воспользуемся одним из эффективных методов поиска оптимума, получившего название канонического преобразования математической модели объекта исследования.

Основным этапом канонического преобразования является перенос начала координат в новую точку  $S$  факторного пространства и поворот старых осей на некоторый угол до совмещения с главными осями геометрической поверхности. В результате чего исчезают линейные члены уравнения и изменяется значение свободного члена в исходном уравнении вида (4.5). Чтобы осуществить перенос начала координат в особую точку поверхности отклика, представляющую собой геометрическую интерпретацию параметра оптимизации, необходимо продифференцировать уравнение (4.5) по каждой независимой переменной ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) и приравнять нулю частные производные. Решением системы полученных уравнений в частных производных определяются координаты нового центра  $S_z$  в старых осях ( $x_i, x_j, \dots, x_n$ ). Подставляя найденные значения координат  $x_{iS}$  в точке  $S$  в исходное уравнение регрессии (4.5), определяют величину параметра оптимизации  $Y_S$  в центре поверхности  $S_z$ .

После переноса центра в точку  $S$  уравнение (4.5) примет вид

$$Y = Y_S + \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 .$$

Затем в новом начале координат поворачивают оси координат на определённый угол  $\alpha$  до совмещения с главными осями геометрической поверхно-

сти (см. (2.32) Гл. 2). В результате этих операций окончательно получают типовую каноническую форму уравнения второго порядка без парных взаимодействий факторов в виде

$$Y - Y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + \dots + B_{nn}X_n^2. \quad (4.21)$$

При трёх независимых переменных уравнение (4.21) примет вид

$$Y - Y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{33}X_3^2, \quad (4.22)$$

где  $Y$  – значение параметра оптимизации;

$Y_s$  – значение параметра оптимизации в центре поверхности отклика, т.е. в новом начале координат;

$X_1, X_2, X_3$  – канонические переменные, которые являются линейными функциями факторов  $x_1, x_2, x_3$  и представляют собой новые оси координат в факторном пространстве;

$B_{11}, B_{22}, B_{33}$  – коэффициенты канонического уравнения.

Уравнение в канонической форме (4.22) удобно для анализа и оптимизации, т.к. в него входят все факторы только в квадрате.

Для определения координат нового центра поверхности отклика  $S_z$  уравнение (4.16) следует продифференцировать по каждой переменной  $x_i$  и частные производные приравнять нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= -2,05 - 0,38x_2 + 0,54x_3 + 1,56x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= 0,62 - 0,38x_1 - 0,16x_3 + 1,78x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= -0,84 + 0,54x_1 - 0,16x_2 + 0,42x_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Решая систему уравнений (4.23), получим значение координат центра поверхности отклика  $S_z$

$$x_{1s} = 1,11; \quad x_{2s} = -0,06; \quad x_{3s} = 0,55. \quad (4.24)$$

При подстановке значений координат в исходное уравнение (4.16) определяем величину параметра оптимизации  $Y_s = 1,14$ .

Координатам  $x_{1s}, x_{2s}$  и  $x_{3s}$ , а также величине  $Y_s$  соответствуют следующие значения факторов и функции цели в физических единицах согласно (4.3) и таблицы 4.1.

$$P_1 = 30,7 \text{ кВт}; \quad Q = 20,8 \text{ т/ч}; \quad K_{\text{зар}} = 0,73; \quad Y_s = W_{\text{уд.}} = 1,14 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}. \quad (4.25)$$

Для получения аналитической и графической интерпретации области оптимума параметра оптимизации, описываемого уравнением (4.16), а также определения значений факторов  $Q, P_1$  и  $K_{\text{зар}}$ , близких к оптимальным, воспользуемся методом двумерных сечений поверхности отклика [5]. Построение двумерных сечений поверхности отклика параметра оптимизации выполняется в следующей последовательности. В уравнение регрессии вида (4.16), независимо от количества факторов, подставляют близкие к оптимальному значению или

равных 0 (нулевому уровню) всех факторов, кроме двух. В результате уравнение (4.16) приводится к уравнению регрессии, выражающему зависимость параметра оптимизации от двух факторов. После дифференцирования такого уравнения по двум переменным, и приравнивая частные производные нулю, определяются координаты центра поверхности отклика  $S_z$  и величина параметра оптимизации в центре  $Y_s$ . Затем, принимая различные значения параметра оптимизации  $Y_s$  в каноническом уравнении, выполняются двумерные сечения поверхности отклика и строятся кривые равного отклика, называемые контурными кривыми поверхности отклика, по которым оценивается изменение величины критерия оптимизации в зависимости от варьирования уровней каждой пары факторов и определяются их значения, близкие к оптимальным.

Рассмотрим, применительно к полученному адекватному уравнению регрессии (4.16), три варианта двумерных сечений поверхности отклика, с построением и анализом семейства контурных кривых.

1. Принимаем в (4.16)  $x_1 = 0$ , что соответствует значению фактора  $Q = 13$  т/ч. Двумерные сечения поверхности отклика, в этом случае, будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от мощности  $P_1$  ( $x_2$ ) и коэффициента загрязнения  $K_{заг}$  ( $x_3$ ). Уравнение (4.16) примет вид

$$\hat{y} = 2,53 + 0,62x_2 - 0,84x_3 - 0,16x_2x_3 + 0,89x_2^2 + 0,21x_3^2 \quad (4.26)$$

Определим координаты центра поверхности  $S_z$  в результате решения системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} &= 0,62 - 0,16x_3 + 1,78x_2 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= -0,84 - 0,16x_2 + 0,42x_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$x_{2s} = -0,17; \quad x_{3s} = 1,93; \quad Y_s = 1,66,$$

что соответствует

$$P_1 = 30,15 \text{ кВт} \quad \text{и} \quad K_{заг} = 0,94.$$

Значение  $Y_s$  определяется после подстановки значений  $x_{2s}$  и  $x_{3s}$  в (4.26). Для канонического преобразования (4.26) по (4.27) составляется характеристический детерминант

$$f(B) = \begin{vmatrix} 1,78 - B & 0,5 \cdot (-0,16) \\ 0,5 \cdot (-0,16) & 0,42 - B \end{vmatrix} = (1,78 - B)(0,42 - B) - 0,0064 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{22} = 0,42; \quad B_{33} = 1,79$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 1,66 = 0,42X_2^2 + 1,79X_3^2. \quad (4.28)$$

Так как коэффициенты в каноническом уравнении  $B_{22}$  и  $B_{33}$  имеют одинаковые знаки, то, в соответствии с табл. 3.5, контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика при принятых значениях параметра оптимизации  $Y_S$  будут эллипсами и геометрическая интерпретация типа поверхности отклика будет впадина. Контурные кривые для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 4.1. Величина  $Y_S$  в центре определяет минимальное значение параметра оптимизации  $W_{уд.} = 1,66$  кВт·ч/т.

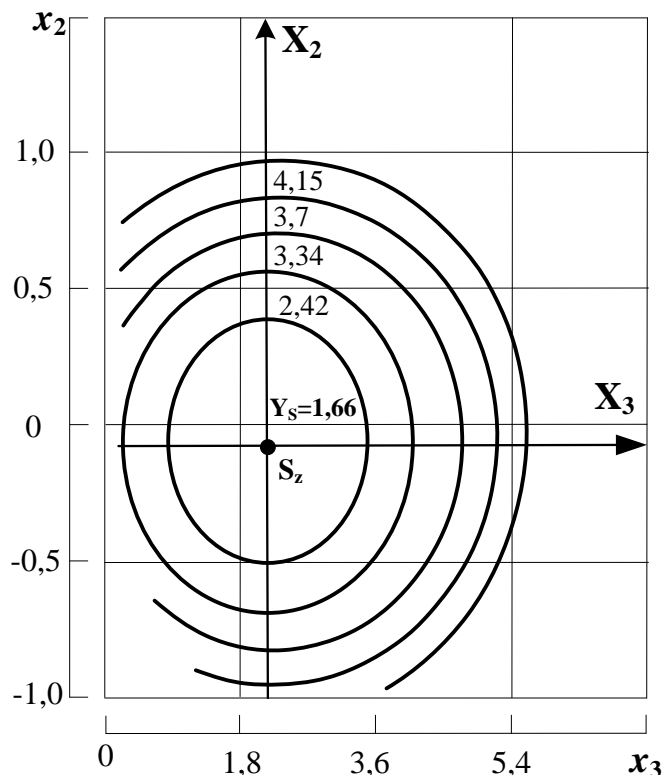


Рисунок 4.1 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_1 = 0$  ( $Q = 13$  т/ч) и значениях  $Y_S = 1,66; 2,42; 3,34; 3,7$  и  $4,15$ .

Согласно рис. 4.1, область оптимума вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_2$  и  $x_3$  в пределах

$$x_2 \text{ от } -0,4 \text{ до } +0,4 \text{ и}$$

$$x_3 \text{ от } 1,46 \text{ до } 3,4,$$

что соответствует факторам  $P_1 = 29-33$  кВт и  $K_{заг.} = 0,87-1,16$ .

Минимальное значение параметра оптимизации при этом

$$W_{уд.} = Y_S = 1,66 \text{ кВт·ч/т и производительность } Q = 13 \text{ т/ч.}$$

2. Принимаем в уравнении (4.16)  $x_2 = 0$ , что соответствует значению фактора  $P_1 = 31$  кВт. Двумерные сечения поверхности отклика в этом случае будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от производительности  $Q$  ( $x_1$ ) и коэффициента загрязнения  $K_{заг.}$  ( $x_3$ ). Уравнение (4.16) при  $x_2 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 2,53 - 2,05x_1 - 0,84x_3 + 0,54x_1x_3 + 0,78x_1^2 + 0,21x_3^2 \quad (4.29)$$

Определим координаты центра поверхности  $S_z$  и величину параметра оптимизации  $Y_S$  в результате решения системы уравнений в частных производных

$$58 \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= -2,05 + 1,56x_1 + 0,54x_3 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= -0,84 + 0,54x_1 + 0,42x_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$x_{1S} = 1,12; \quad x_{3S} = 0,56; \quad Y_S = 1,15,$$

что соответствует

$$Q = 20,84 \text{ т/ч}; \quad K_{\text{заг}} = 0,73, \quad W_{\text{уд.}} = 1,15 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т}.$$

Для канонического преобразования уравнения (4.29) составляется характеристический детерминант

$$f(B) = \begin{vmatrix} 1,56 - B & 0,5 \cdot 0,54 \\ 0,5 \cdot 0,54 & 0,42 - B \end{vmatrix} = (1,56 - B)(0,42 - B) - 0,0729 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{11} = 0,36; \quad B_{33} = 1,62$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 1,15 = 0,36X_1^2 + 1,62X_3^2. \quad (4.31)$$

Поскольку коэффициенты  $B_{11}$  и  $B_{33}$  имеют одинаковые знаки  $B_{11} > 0$  и  $B_{33} > 0$ , следовательно, контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика, в соответствии с табл. 3.5, будут эллипсы и геометрическая интерпретация типа поверхности отклика будет впадина. Контурные кривые для различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 4.2, из которого следует, что область оптимума вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_1$  и  $x_3$  в пределах

$$\begin{aligned} x_1 &\text{ от } 0,65 \text{ до } 1,5 \text{ и} \\ x_3 &\text{ от } 0,14 \text{ до } 1,0, \end{aligned}$$

что соответствует факторам в физических единицах

$$Q = 17,5 - 23,5 \text{ т/ч и } K_{\text{заг.}} = 0,67 - 0,8.$$

Минимальное значение параметра оптимизации в центре при этом равно

$$W_{\text{уд.}} = Y_S = 1,15 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т при мощность } P_1 = 31 \text{ кВт}.$$

3. Принимаем в уравнении (4.16)  $x_3 = 0$ , что соответствует значению фактора  $K_{\text{заг}} = 0,65$ . Двумерные сечения поверхности отклика будут характеризовать параметр оптимизации в зависимости от производительности  $Q$  ( $x_1$ ) и мощности  $P_1$  ( $x_2$ ).

Уравнение регрессии (4.16) при  $x_3 = 0$  примет вид

$$\hat{y} = 2,53 - 2,05x_1 + 0,62x_2 - 0,38x_1x_2 + 0,78x_1^2 + 0,89x_2^2 \quad (4.32)$$

Координаты центра поверхности отклика и величина  $Y_S$  в этом случае также определяется при решении следующей системы уравнений в частных производных

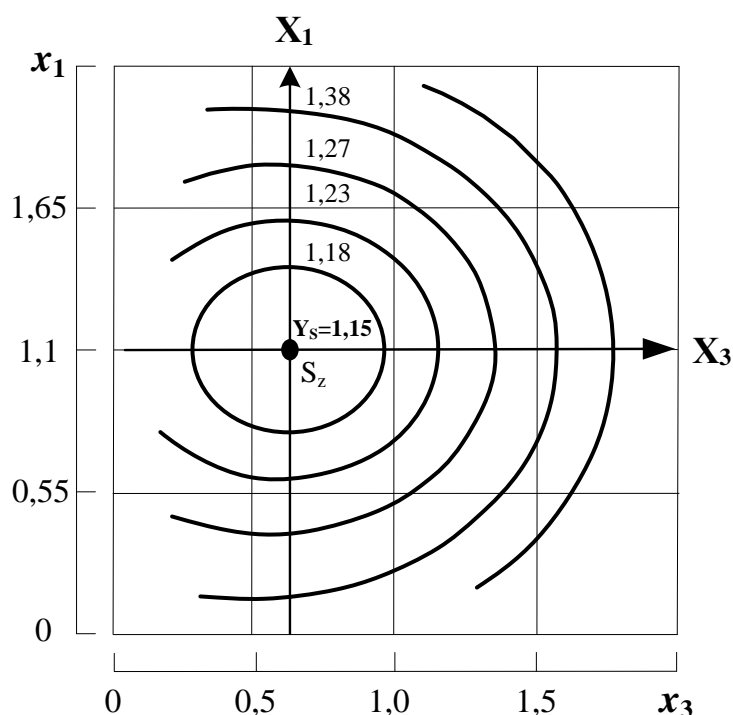


Рисунок 4.2 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_2 = 0$  ( $P_1 = 31$  кВт) и различных значениях  $Y_S = 1,15; 1,18; 1,23; 1,27$  и  $1,38$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} &= -2,05 - 0,38x_2 + 1,56x_1 = 0; \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} &= 0,62 - 0,38x_1 + 1,78x_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$x_{1s} = 1,3; \quad x_{2s} = -0,07; \quad Y_S = 1,18,$$

что соответствует

$$Q = 22,1 \text{ т/ч}; \quad P_1 = 30,65 \text{ кВт}; \quad W_{\text{уд.}} = Y_S = 1,18 \text{ кВт}\cdot\text{ч/т} \text{ при } K_{\text{заг.}} = 0,65.$$

Для канонического преобразования уравнения (4.32) по (4.33) составляется характеристический детерминант

$$f(B) = \begin{vmatrix} 1,56 - B & 0,5 \cdot (-0,38) \\ 0,5 \cdot (-0,38) & 1,78 - B \end{vmatrix} = (1,56 - B)(1,78 - B) - 0,0361 = 0.$$

Собственными числами данного характеристического уравнения будут:

$$B_{11} = 1,45; \quad B_{22} = 1,89$$

При этом каноническое уравнение имеет вид

$$Y - 1,18 = 1,45X_1^2 + 1,89X_2^2. \quad (4.34)$$

В данном случае коэффициенты в каноническом уравнении  $B_{11}$  и  $B_{22}$  имеют одинаковые знаки, поэтому контурные линии при двумерных сечениях поверхности отклика при различных значениях  $Y_S$ , в соответствии с табл. 3.5, будут эллипсы и геометрическая интерпретация типа поверхности отклика будет впадина. Контурные кривые при  $x_3 = 0$  и различных значений  $Y_S$  приведены на рисунке 4.3.

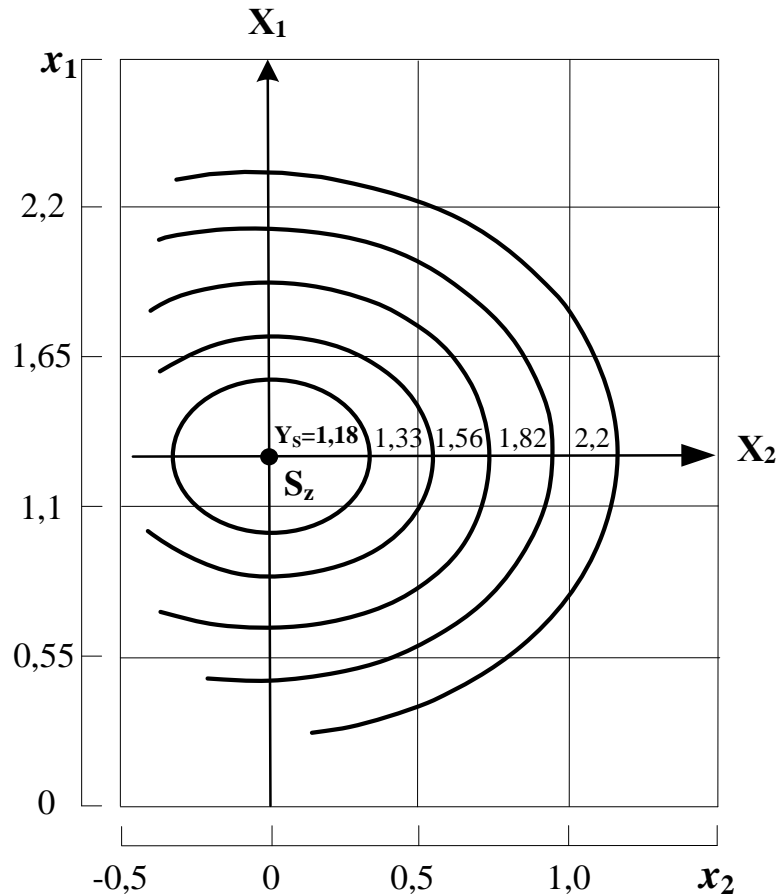


Рисунок 4.3 – Контурные кривые двумерных сечений поверхности отклика при  $x_3 = 0$  ( $K_{заг.} = 0,65$ ) и значениях  $Y_S = 1,18; 1,33; 1,56; 1,82$  и  $2,2$ .

Согласно рис. 4.3, область оптимума параметра оптимизации вблизи центра  $S_z$  характеризуется значениями факторов  $x_1$  и  $x_2$  в пределах

$$x_1 \text{ от } 0,97 \text{ до } 1,59 \text{ и}$$

$$x_2 \text{ от } -0,33 \text{ до } 0,33 ,$$

что соответствует факторам в физических единицах

$$Q = 19,8-24,1 \text{ т/ч} \quad \text{и} \quad P_1 = 31,8-35,2 \text{ кВт.}$$

Минимальное значение параметра оптимизации при этом равно

$$W_{уд.} = Y_S = 1,18 \text{ кВт} \cdot \text{ч/т} \text{ и коэффициенте загрязнения } K_{заг.} = 0,65.$$

Обобщая полученные результаты, можно отметить, что оптимальный по энергоёмкости технологический процесс агрегата приготовления муки типа Р6-АВМ-15 характеризуется следующими показателями:

$$W_{уд.} = 1,15-1,18 \text{ кВт} \cdot \text{ч/т} \quad Q = 20-23 \text{ т/ч} \quad P_1 = 29-32 \text{ кВт} \text{ и } K_{заг.} = 0,75-0,8.$$

Эти данные могут быть использованы для практического руководства при решении задачи энергосбережения в мукомольном производстве.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Значение *t*-критерия Стьюдента для уровня значимости  
и числа степеней свободы  $f = N(m-1)$

<i>f</i>	$\alpha$				
	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	6,314	12,706	25,452	63,657	127,32
2	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
3	2,353	3,182	4,176	5,841	7,435
4	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
5	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
6	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
7	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
8	1,860	2,306	2,751	3,355	3,832
9	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
10	1,812	2,228	2,634	3,169	3,581
11	1,796	2,201	2,593	3,106	3,497
12	1,782	2,179	2,560	3,054	3,428
13	1,771	2,160	2,533	3,012	3,372
14	1,761	2,145	2,510	2,977	3,326
15	1,753	2,131	2,490	2,947	3,286
16	1,746	2,120	2,473	2,921	3,252
17	1,740	2,110	2,458	2,898	3,222
18	1,743	2,101	2,445	2,878	3,197
19	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
20	1,725	2,086	2,423	2,845	3,153
25	1,708	2,059	2,385	2,787	3,078
30	1,697	2,042	2,360	2,750	3,030
40	1,684	2,021	2,329	2,705	2,971
60	1,671	2,000	2,299	2,660	2,915
120	1,658	1,980	2,270	2,617	2,860



## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Значения F-критерия Фишера  
для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и  
числа степеней свободы  $f_1 = N - d$ ;  $f_2 = N(m-1)$

$f_2$	$f_1$											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	$\infty$
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	230,2	234,0	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	19,51	19,0	19,6	19,24	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,47	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,39	6,39	6,26	6,16	6,07	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
100	3,94	3,09	2,60	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
$\infty$	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью Пособия является возможность показать на примерах решения оптимизационных задач большие возможности и эффективность метода планирования математического эксперимента (ПМЭ), а также стимулирования его широкого применения при проведении НИР в условиях вузов с минимальными затратами времени и материальных средств. Основными предпосылками для этого являются доступность в настоящее время для исследователей современных средств вычислительной техники: многофункциональных микрокалькуляторов, ноутбуков, персональных ЭВМ и др.; наличие банка прикладных математических программ типа Microsoft Excel 2000, Matchad-2000 и др. для графоаналитического анализа результатов решения задач оптимизации объектов исследования различной сложности и физической природы.

Перспективными, по наш взгляд, являются следующие направления применения метода:

- при оптимизации энергоёмких многофакторных технологических процессов отдельных машин, агрегатов и поточных технологических линий с обеспечением минимальных энергозатрат;

- при оптимальном проектировании новых машин, устройств, приборов и элементов различных конструкций с обеспечением высоких эксплуатационных характеристик при минимальных затратах материальных средств;

- при создании новых образцов продукции, сплавов, смесей, при синтезе химических веществ, обладающих наилучшими свойствами;

- при оптимизации электрических потерь в энергосистемах ЛЭП и внутренних распределительных электрических сетях;

- при оптимизации эксплуатационных показателей мобильных транспортных средств и др.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Налимов В.В.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / *В.В. Налимов, Н.А. Чернова.* – М.: Наука, 1965. – 340 с.
2. Планирование эксперимента в исследованиях технологических процессов / *К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер; Под ред. Э.К. Лецкого.* – М.: Мир, 1977. – 55 с.
3. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / *Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.Б. Грановский.* – М.: Наука, 1976. – 280 с.
4. *Бондарь А.Г.* Планирование экспериментов в химической технологии / *А.Г. Бондарь, Г.П. Статюха.* – К.: Вища школа, 1976. – 184 с.
5. *Мельников С.В.* Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов / *С.В. Мельников, В.Р. Алёшин, П.М. Роцин.* – Л.: Колос, 1980. – 168 с.
6. *Ивоботенко Б.А.* Планирование эксперимента в электромеханике / *Б.А. Ивоботенко, Н.Ф. Ильинский, И.П. Копылов.* – М.: Энергия, 1975. – 184 с.
7. *Назарьян Г.Н.* Практический курс планирования эксперимента / *Г.Н. Назарьян.* – Мелитополь: ТГАТА, 1999. – 66 с.
8. *Новаковская З.Д.* Применение методов планирования эксперимента для решения задач синтеза при проектировании шаговых двигателей / *З. Д. Новаковская* // Труды МЭИ. – М.: МЭИ, 1972, Вып. 138. – С. 165-169.
9. *Адаменко А.И.* Применение методов планирования эксперимента для построения математической модели серии оптимальных вариантов асинхронных двигателей / *А.И. Адаменко, В.И. Кисленко, Г.В. Лукина, Л.Б. Ракицкий* // Проблемы технической электродинамики. Республиканский межведомственный сборник. – К.: Наук. думка, 1973, Т. 39. – С. 3-14.
10. *Дидур В.А.* Научное обоснование удельных расходов электроэнергии при очистке зерна методом математического планирования эксперимента / *В.А. Дидур, Е.П. Масюткин, М.В. Постникова, В.А. Масловский* // Праці інституту електродинаміки НАН України. – Київ, 2008. – Вип. 19. – С. 94-98.
11. *Назарьян Г.Н.* Методологія перестройки складної математическої моделі об'єкта дослідження методом планування математического експеримента для аналізу і рішення задачі оптимізації об'єкта / *Г.Н. Назарьян, А.П. Карпова, М.В. Постникова* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: Наукове фахове видання. – Мелітополь: ТДАТУ. – Вип. 12, Т. 2. – 2012. – С. 93-105.
12. *Постникова М.В.* Энергосберегающие режимы работы электромеханических систем обработки зерна на зернопунктах: дис... канд. техн. наук: 05.09.03 / *М.В. Постникова;* ТДАТУ. – Мелитополь, 2011. – 189 с.
13. *Ковальов О.В.* Оптимізація експлуатаційних показників електромоблоку методом планування експерименту / *О.В. Ковальов, Ю.М. Куценко, М.А. Рубцов, Г.Н. Назар'ян* // Праці ТДАТУ. – Вип. 11, Т. 4. – Мелітополь, ТДАТУ, 2011. – С. 187-200.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ И ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ПМЭ .....	3
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ ОБРАБОТКИ ЗЕРНА АГРЕГАТА ЗАВ-20 .....	5
1.1 Исходная математическая модель объекта исследования .....	5
1.2 Выбор факторов и интервалов их варьирования .....	6
1.3 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента .....	7
1.4 Определение коэффициентов уравнения регрессии и статистическая оценка их значимости .....	9
1.5 Проверка адекватности модели .....	11
1.6 Решение задачи оптимизации объекта исследования .....	12
ГЛАВА 2 ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПОКАЗА- ТЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОМОТОБЛОКА .....	18
2.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов .....	18
2.2 Выбор типа плана и построение матрицы математического эксперимента .....	20
2.3 Определение коэффициентов уравнения регрессии и ста- тистическая оценка их значимости .....	22
2.4 Проверка адекватности уравнения .....	23
2.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта .....	24
ГЛАВА 3 ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА МОЛОТКОВОЙ ДРОБИЛКИ ЗЕРНА ДБ-5-1 .....	31
3.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов .....	31
3.2 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента .....	33
3.3 Расчёт коэффициентов регрессии и оценка их значимости .....	34
3.4 Проверка адекватности уравнения регрессии .....	37
3.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта .....	38
3.6 К определению типа контурных кривых по каноническому уравнению второго порядка .....	44

ГЛАВА 4 ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА	
АГРЕГАТА ПРИГОТОВЛЕНИЯ МУКИ Р6-АВМ-15 . . . . .	48
4.1 Выбор параметра оптимизации и основных факторов . . . . .	48
4.2 Выбор типа плана и матрицы планирования математического эксперимента . . . . .	50
4.3 Расчёт коэффициентов уравнения регрессии и оценка их значимости . . . . .	52
4.4 Проверка адекватности уравнения регрессии . . . . .	54
4.5 Аналитическое и графическое исследование области оптимума объекта . . . . .	55
ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	64
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	65

Учебное издание

Назарьян Гайк Назарович  
Постникова Марина Викторовна  
Карпова Александра Петровна

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
ОБЪЕКТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ  
МЕТОДОМ ПЛАНИРОВАНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Научно-методическое пособие

Издательско-полиграфический центр “Люкс”  
свидетельство ДК №1125  
г. Мелитополь, ул. К. Маркса, 10, тел. 6-88-38



