

УДК 621.431.7:681.3

DOI: 10.31388/2078-0877-2020-20-4-203-224

## СВОЙСТВА РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ОТНОШЕНИЯ ОСНОВНЫХ РАЗМЕРОВ ШЕСТЕРЁН МАСЛЯНЫХ НАСОСОВ АВТОТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ОТ РАЗНОСТИ ЭТИХ РАЗМЕРОВ

Стефановский А. Б., к.т.н.

ORCID: 0000-0002-5851-5918

Болтянский О. В., к.т.н.

ORCID: 0000-0002-9543-5538

*Таврический государственный агротехнологический университет  
имени Дмитрия Моторного*

e-mail: mez@tsatu.edu.ua

*Постановка проблемы.* В предыдущей статье [1] предложен ряд регрессионных зависимостей (РЗ) между функциями основных размеров шестерён масляных насосов (МН) с внешним зацеплением, установленных в отечественных автотракторных двигателях, а также дизелях другого назначения. Однако в ней не пояснено, как эти зависимости рациональнее использовать при выборе указанных размеров: ширины  $b$  и наружного диаметра  $d_{ex}$  (или диаметра окружности выступов).

*Анализ последних исследований.* В работе [1] приведены два вида зависимостей: отношения ширины шестерни к наружному диаметру –

от разности этих размеров; функции  $\beta_{b/d} = \sqrt{\frac{b^2 + d_{ex}^2}{bd_{ex}}}$  – от отношения

$b/d_{ex}$ . При этом зависимость 2-го вида оказалась универсальной и весьма близкой к функциональной, в отличие от зависимостей 1-го вида, являющихся регрессионными, то есть в заметной мере нечёткими. Последние приведены в [1] в нескольких вариантах, отражавших специфику расположения точек для различных совокупностей исследованных МН разных двигателей. Большинство этих РЗ близки к линейным, кроме одной (квадратичной), характеризующей МН различных дизелей при  $b \geq d_{ex}$ . Данная статья продолжает изложение, начатое в работе [1], и основывается на тех же источниках, чем объясняется краткость этого раздела.

*Формулирование цели:* выявить и проанализировать на примерах особенности применения РЗ отношения размеров шестерни МН от их разности, если известен или задан один из них. Использование выше упомянутой зависимости 2-го вида будет рассмотрено в другой статье.

*Основная часть.* Рассматриваемые РЗ имеют вид

$$b \hat{d}_{ex} = \begin{cases} 1 + a_0(b - d_{ex})^{b_0} & \text{при } b \geq d_{ex}; \\ 1 - a_0(d_{ex} - b)^{b_0} & \text{при } b < d_{ex}, \end{cases} \quad (1a)$$

$$(1б)$$

где  $a_0$  и  $b_0$  – числовые параметры, значения которых в общем случае не совпадают и для (1а, 1б) устанавливаются при помощи метода наименьших квадратов для исследуемых совокупностей точек, характеризующих различные МН; в (1б)  $a_0$  считается положительным, а минус относится к действию; параметр  $b_0$  не имеет отношения к ширине шестерни  $b$ . Единица измерения  $a_0$  такова, чтобы вторые слагаемые в этих формулах были безразмерными. Значок  $\hat{\phantom{x}}$  над левой частью указывает на то, что формула описывает РЗ, для которой могут быть (или уже) определены такие показатели точности, как средние и локальные отклонения точек от кривой, изображающей РЗ в выбранных координатах, коэффициент корреляции и др.

Ниже для краткости в формулах опущены условия их применения, записанные в (1а) и (1б) в виде неравенств; буквы «а» и «б», сопровождающие номера формул до 9-й включительно, указывают на происхождение формулы, соответственно, от (1а) или (1б).

В работе [1] приведены следующие значения числовых параметров РЗ (1а, 1б). Для исследованных МН отечественных автомобильных двигателей с искровым зажиганием (АДИЗ) величина  $a_0$  близка к 0,03, а  $b_0$  немного меньше единицы. Для исследованных МН отечественных автотракторных и ряда других дизелей при  $b \leq d_{ex}$ , в основном,  $a_0 = 0,020$  и  $b_0 = 1,0$ , то есть РЗ (1) линейная. Но для пяти «выпавших» точек, характеризовавших МН ряда двухцилиндровых тракторных дизелей с  $b < d_{ex}$  и автотракторных дизелей ЯМЗ с  $b > d_{ex}$ , в [1] предложены значения  $a_0 = \pm 0,0161$  (отрицательное значение  $a_0$  здесь соответствует формуле (1б)) и  $b_0 = 1,17$ . Этот частный случай рассматривается менее детально.

Из формул (1а) и (1б) можно выразить оба основных размера шестерён МН, но при  $b_0$ , не равном 1, 2, 3 или 4, полученное выражение будет уравнением, которое нужно решать приближённо, например, методом итераций [2]. Согласно нему, искомая переменная приравнивается к своей же функции, но в последнюю подставляется значение этой переменной, найденное на предыдущем шаге вычислений (или начальное), а эта функция «возвращает» новое значение искомой переменной. Этим методом проще, чем аналитически, было бы отыскивать какой-либо из двух размеров шестерни МН и при  $b_0$ , равном 3 или 4.

Наиболее просто можно выразить размеры  $b$  или  $d_{ex}$  из левой части формул (1а) и (1б). Например, вот выражения для вычисления  $b$ :

$$b = \begin{cases} d_{ex} \left( 1 + a_0 (b - d_{ex})^{b_0} \right); & (2a) \\ d_{ex} \left( 1 - a_0 (d_{ex} - b)^{b_0} \right). & (2б) \end{cases}$$

Соответствующие формулы для вычисления  $d_{ex}$  отличаются от этих тем, что в левой части находится  $d_{ex}$ , а в правой части вместо  $d_{ex}$  будет  $b$ , а выражения в скобках возводятся в степень минус один (то есть будут в знаменателе дроби, выглядящей как  $b$ /скобка).

Также из РЗ (1а) и (1б) можно получить альтернативные формулы для приближённого вычисления размера шестерни  $b$  или  $d_{ex}$ , если выразить разность этих размеров из правых частей формул (1а) и (1б):

$$b - d_{ex} = \left( \frac{b/d_{ex} - 1}{a_0} \right)^{1/b_0}; \quad (3a)$$

$$d_{ex} - b = \left( \frac{1 - b/d_{ex}}{a_0} \right)^{1/b_0}. \quad (3б)$$

Затем из этих формул легко получить выражения для приближённого вычисления размеров  $b$  или  $d_{ex}$ .

Вместо вычисления самих размеров шестерни МН с помощью формул (2а) и (2б), можно вычислить их отношение  $b/d_{ex}$ , беря какой-либо из размеров как постоянный или заданный параметр. Например, если задать величину ширины шестерни  $b$ , то из этих формул получим:

$$b/d_{ex} = \begin{cases} 1 + a_0 \left( b \left( 1 - (b/d_{ex})^{-1} \right) \right)^{b_0}; & (4a) \\ 1 - a_0 \left( b \left( (b/d_{ex})^{-1} - 1 \right) \right)^{b_0}. & (4б) \end{cases}$$

Если же задать наружный диаметр шестерни  $d_{ex}$ , то из формул (2а) и (2б) получим:

$$b/d_{ex} = \begin{cases} 1 + a_0 \left( d_{ex} \left( (b/d_{ex}) - 1 \right) \right)^{b_0}; & (5a) \\ 1 - a_0 \left( d_{ex} \left( 1 - (b/d_{ex}) \right) \right)^{b_0}. & (5б) \end{cases}$$

Формулы для расчёта отношения  $b/d_{ex}$  можно получить и из формул (3а) и (3б), делая один из размеров параметром.

Сходимость процесса последовательных приближений при использовании формул (2б – 5б) исследована на персональном компьютере на примере МН автомобильных карбюраторных двигателей ВАЗ, для которого  $b \approx 30$  и  $d_{ex} \approx 34$  мм [3] и также  $a_0 = 0,0284$ ;  $b_0 = 0,96$  [1], а при использовании формул (2а – 5а) – на примере МН

карбюраторного двигателя ЗМЗ- 24Д, для которого  $b \approx 35$  и  $d_{ex} \approx 32,4$  мм [4] и также  $a_0 = 0,032$ ;  $b_0 = 0,95$  [1]. В процессе расчёта размеров шестерён этих МН и их отношения была оценена целесообразная точность итераций  $\Delta$ , то есть такая разность значений искомой величины в двух последовательных шагах, при достижении которой эта величина считается найденной с выбранной точностью (абсолютной погрешностью). Влияние  $\Delta$  на количество шагов вычислений и найденные значения искомых величин показано в таблице 1, где рациональные значения точности итераций подчёркнуты. Единица измерения размеров шестерён и точности  $\Delta$  при их вычислении – миллиметр.

Таблица 1 - Количество шагов вычислений размеров шестерён МН автомобильных двигателей ВАЗ и ЗМЗ-24Д (и отношения этих размеров) при различной точности итераций

Точность итераций $\Delta$	Искомый размер (мм) или показатель			
	Обозначение	Формула	Найденная величина	Количество шагов
0,01	b	(2б)	33,393	44
0,005	то же	то же	33,561	92
<u>0,001</u>	-«-	-«-	33,572	108
0,0005	-«-	-«-	33,581	147
0,0001	-«-	-«-	33,582	164
0,01	$d_{ex}$	Из (2б)	30,125	31
0,005	то же	то же	30,079	38
0,001	-«-	-«-	30,036	58
<u>0,0005</u>	-«-	-«-	30,028	69
0,0001	-«-	-«-	30,021	102
0,00005	-«-	-«-	30,020	117
0,001	$b/d_{ex}$	(5б)	0,9723	25
0,0005	то же	то же	0,9789	35
0,0001	-«-	-«-	0,9856	65
<u>0,00005</u>	-«-	-«-	0,9866	80
0,00001	-«-	-«-	0,9875	117
0,000005	-«-	-«-	0,9876	134
0,0001	$b/d_{ex}$	(4б)	0,9980	43
<u>0,00005</u>	то же	то же	0,9986	52
0,00001	-«-	-«-	0,9992	79
0,000005	-«-	-«-	0,9993	92

Продолжение таблицы 1

Точность итераций $\Delta$	Искомый размер (мм) или показатель			
	Обозначение	Формула	Найденная величина	Количество шагов
0,01	b	(2а)	34,639	20
0,005	то же	то же	34,550	33
0,001	««	««	34,478	64
<u>0,0005</u>	««	««	34,469	77
0,0001	««	««	34,462	108
0,00005	««	««	34,461	121
0,01	$d_{ex}$	Из (2а)	32,556	10
0,005	то же	то же	32,594	16
0,001	««	««	32,622	29
<u>0,0005</u>	««	««	32,625	35
0,0001	««	««	32,6280	48
0,00005	««	««	32,6283	53
0,0001	$b/d_{ex}$	(5а)	1,0654	41
<u>0,00005</u>	то же	то же	1,0645	54
0,00001	««	««	1,0638	86
0,000005	««	««	1,0637	99
0,0001	$b/d_{ex}$	(4а)	1,0734	19
<u>0,00005</u>	то же	то же	1,0731	24
0,00001	««	««	1,07275	38
0,000005	««	««	1,0727	43

Как видно в табл. 1, задавать величину  $\Delta$  меньше 0,001 мм при расчёте  $b$  по формуле (2б) нет смысла, а при снижении  $\Delta$  до 0,0001 мм результат стабилизируется на значении, довольно близком к  $d_{ex} = 34$  мм – параметру расчёта. Процесс вычисления  $d_{ex}$  по формуле, вытекающей из (2б), идёт немного быстрее, а результат стабилизируется при снижении  $\Delta$  до 0,0001 мм на значении, весьма близком к  $b = 30$  мм – параметру расчёта, и достаточно принять  $\Delta = 0,0005$  мм. Вычисление отношения  $b/d_{ex}$  по формуле (5б) при параметре  $d_{ex} = 34$  мм стабилизируется на результате 0,9876 при  $\Delta = 5 \cdot 10^{-6}$ ; брать  $\Delta < 0,00001$  нерационально, и для этого случая можно принять  $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ . Вычисление  $b/d_{ex}$  по формуле (4б) при параметре  $b = 30$  мм стабилизируется на результате около 0,9993 при  $\Delta = 5 \cdot 10^{-6}$ , и можно здесь тоже принять  $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$ . В целом, вычисления по рассмотренным четырём формулам сходятся к результату довольно медленно – в течение 52...108 шагов до достижения требуемой точности.

Также в табл. 1 видно, что для тех же искомых размеров и показателей сходимость вычислений с помощью формул (2а – 5а) при

$b > d_{ex}$  более быстрая, чем при  $b < d_{ex}$  для формул (2б – 5б), но сделанный в последнем случае выбор величин точности  $\Delta$  не требует корректировки.

Что касается степени близости полученных значений искомых размеров шестерён и отношения  $b/d_{ex}$  к фактическим для МН двигателей ВАЗ и ЗМЗ-24Д, то она выше для второго насоса. Для шестерён последнего относительная погрешность (ОП) предсказания размеров  $b$  и  $d_{ex}$  с помощью формулы (2а) близка, соответственно, к  $-0,018$  и  $+0,0085$ , а отношения  $b/d_{ex}$  с помощью формул (5а) и (4а) – к  $-0,019$  и  $-0,011$ . Для второй пары этих формул, итерации быстрее сходятся и результат точнее для формулы (4а).

Для МН ВАЗ соответствующие значения ОП гораздо выше:  $+19\%$  для  $b$ ,  $-16\%$  для  $d_{ex}$  и не менее  $+11\%$  для отношения  $b/d_{ex}$ . Поэтому, несмотря на хорошую чёткость РЗ (1б) для МН АДIZ с  $b < d_{ex}$  [1], этого оказалось недостаточно для корректного определения одного из размеров шестерён и их отношения с помощью формул (2б – 5б) – по крайней мере, для МН ВАЗ.

Рассмотрим далее сходимость итераций при использовании формул (3а) и (3б) для тех же двух МН (см. табл. 2). Как видно из табл. 2, формула (3а) оказалась непригодной для вычисления размеров шестерён МН ЗМЗ-24Д и их отношения. Формула (3б) позволяет вычислить наружный диаметр  $d_{ex}$  шестерён МН ВАЗ при известной их ширине  $b$ , а также отношение этих размеров. Однако вычислить  $b$  или  $b/d_{ex}$  при известном  $d_{ex}$  по формуле (3б) нельзя. ОП результатов вычисления  $d_{ex}$  и  $b/d_{ex}$  при этом составляет  $+13\%$  и  $-13\%$  соответственно, то есть отношение  $b/d_{ex}$  занижено именно потому, что  $d_{ex}$  завышен. Если сопоставить эти значения ОП с выше указанными для тех же переменных ( $d_{ex}$  и  $b/d_{ex}$ ) у МН ВАЗ, то оказывается, что в этих случаях целесообразно вычислять  $d_{ex}$  и  $b/d_{ex}$  обоими способами (с помощью формул (2б) и (3б), (5б) и (3б), соответственно) и брать полусуммы пар получаемых результатов. Тогда ОП таких полусумм составит  $-1,5\%$  и для  $d_{ex}$ , и для  $b/d_{ex}$ . Такой же эффект может наблюдаться и для других МН АДIZ с  $b < d_{ex}$ , что в дальнейшем целесообразно проверить.

Таблиця 2 - Параметры сходимости итераций при использовании формул (3а) и (3б) для расчёта размеров шестерён тех же МН и отношения этих размеров

Точность итераций $\Delta$	Искомый размер (мм) или показатель			
	Обозначение	Формула	Найденная величина	Количество шагов
0,001	b	Из (3б)	Неогранич. убывает	$\infty$
<u>0,001</u>	$d_{ex}$	Из (3б)	38,322	38
0,0005	то же	то же	38,325	42
0,0001	-«-	-«-	38,326	49
0,012 и выше	$b/d_{ex}$	Из (3б), задан $d_{ex}$	0,8707	1
0,001	то же	то же	Неогранич. убывает	$\infty$
0,001	$b/d_{ex}$	Из (3б), задана b	0,7868	19
0,0005	то же	то же	0,7850	22
<u>0,0001</u>	-«-	-«-	0,7832	30
0,00005	-«-	-«-	0,7829	34
0,00001	-«-	-«-	0,78278	42
0,000005	-«-	-«-	0,78277	45
0,001	b	Из (3а)	Неогранич. растёт	$\infty$
0,001	$d_{ex}$	Из (3а)	Не опред. (степень отриц. числа)	до 22
0,012 и выше	$b/d_{ex}$	Из (3а), задан $d_{ex}$	1,0812	1
0,001	то же	то же	Неогранич. растёт	$\infty$
0,012 и выше	$b/d_{ex}$	Из (3а), задана b	1,0813	1
0,001	то же	то же	Не опред. (степень отриц. числа)	до 22

Формулы (2а) и (2б) можно упростить следующим образом. Вместо b в них можно выразить разность размеров шестерни ( $b-d_{ex}$ ) и затем правую часть умножить и разделить на эту разность, вследствие чего из показателя степени  $b_0$  вычитается единица:

$$b - d_{\text{ex}} = \begin{cases} a_0 d_{\text{ex}} (b - d_{\text{ex}}) (b - d_{\text{ex}})^{b_0 - 1}; \\ a_0 d_{\text{ex}} (b - d_{\text{ex}}) (d_{\text{ex}} - b)^{b_0 - 1}. \end{cases}$$

Предполагая  $b \neq d_{\text{ex}}$ , можно сократить обе части на эту разность размеров и затем выразить оба размера шестерни МН через парные им:

$$d_{\text{ex}} = \begin{cases} a_0^{-1} (b - d_{\text{ex}})^{1 - b_0}; & (6a) \\ a_0^{-1} (d_{\text{ex}} - b)^{1 - b_0}; & (6б) \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} d_{\text{ex}} + (a_0 d_{\text{ex}})^{1/(1 - b_0)}; & (7a) \\ d_{\text{ex}} - (a_0 d_{\text{ex}})^{1/(1 - b_0)}. & (7б) \end{cases}$$

Как видно, если наружный диаметр шестерни нужно вычислять по-прежнему методом итераций (задав значение  $b$ ), то её ширину уже можно найти непосредственно, задав значение  $d_{\text{ex}}$ .

Если разделить обе части формул (7а, 7б) на те же части формул (6а, 6б), то получатся соответствующие формулы для расчёта отношения размеров шестерён  $b/d_{\text{ex}}$  методом итераций:

$$b/d_{\text{ex}} = \begin{cases} a_0 d_{\text{ex}}^{b_0} \left(1 + d_{\text{ex}}^{-1} (a_0 d_{\text{ex}})^{1/(1 - b_0)}\right) \left((b/d_{\text{ex}}) - 1\right)^{b_0 - 1}; & (8a) \\ a_0 d_{\text{ex}}^{b_0} \left(1 - d_{\text{ex}}^{-1} (a_0 d_{\text{ex}})^{1/(1 - b_0)}\right) \left(1 - (b/d_{\text{ex}})\right)^{b_0 - 1}, & (8б) \end{cases}$$

в которых параметром расчёта является наружный диаметр  $d_{\text{ex}}$ . Если же задать ширину шестерни  $b$ , то формулы для вычисления  $b/d_{\text{ex}}$  упрощаются:

$$b/d_{\text{ex}} = \begin{cases} a_0 b^{b_0} \left(1 - (b/d_{\text{ex}})^{-1}\right)^{b_0 - 1}; & (9a) \\ a_0 b^{b_0} \left((b/d_{\text{ex}})^{-1} - 1\right)^{b_0 - 1}. & (9б) \end{cases}$$

В табл. 3 приведены результаты расчёта размеров шестерён, образующих пары параметр – результат, и их отношения с помощью этих формул для МН ряда автотракторных двигателей. Сопоставим приведенные там значения ОП размеров шестерён МН АДЗ и их отношения с ранее полученными.

При расчёте ширины шестерни  $b$ , когда задан её наружный диаметр  $d_{\text{ex}}$ : формула (7б) дала более точный результат (хотя не слишком точный), чем формула (2б), и, в отличие от последней, за один шаг вычисления; формулами (7а) и (2а) «выданы» примерно равноточные результаты, но первая из них не требовала итераций. При расчёте наружного диаметра  $d_{\text{ex}}$ , когда задана ширина шестерни  $b$ , формулами (6б) и (3б) выданы примерно равноточные результаты, но первая из них



обеспечила более быструю сходимость итераций; то же можно сказать и о формулах (6а) и (3а). Поэтому вместо формул (2а, 2б, 3б) лучше пользоваться формулами (6а – 7б).

Таблица 3 - Результаты вычислений размеров шестерён МН и их отношения с помощью формул (6а – 9б)

Двигатель	АДИЗ		Тракторный дизель	
	ВАЗ*	ЗМЗ-24Д	Д-120	ЯМЗ-236Д
Формула	(6б)	(6а)	(6б)	(6а)
Параметр $b$ , мм	30	35	12	55
Результат $d_{ex}$ , мм	38,3266	32,6287	36,15	38,61
ОП результата	+0,129	+0,0086	-0,060	-0,102
Колич. шагов	8 или 9	23	7 или 8	8 или 9
ОП отношения $b/d_{ex}$	-0,113	-0,0114	+0,064	+0,114
Формула	(7б)	(7а)	(7б)	(7а)
Параметр $d_{ex}$ , мм	34,0	32,4	38,45	43,0
Результат $b$ , мм	33,555	34,348	21,656	51,70
ОП результата	+0,119	-0,0214	0,805	-0,060
ОП отношения $b/d_{ex}$	+0,118	-0,0214	0,805	-0,060
Формула	(8б)	(8а)	(8б)	(8а)
Параметр $d_{ex}$ , мм	34,0	32,4	38,45	43,0
Результат $b/d_{ex}$	0,91347	1,0636	0,5632	1,220
ОП результата	+0,035	-0,020	+0,80	-0,046
Колич. шагов	11	32	7 или 8	27
Формула	(9б)	(9а)	(9б)	(9а)
Параметр $b$ , мм	30	35	12	55
Результат $b/d_{ex}$	0,78275	1,07267	0,3320	1,4245
ОП результата	-0,113	-0,0114	+0,064	+0,114
Колич. шагов	7	23	6 или 7	11 или 12

\* Рабочий объём 1,2...1,7 л.

При расчёте отношения размеров шестерни  $b/d_{ex}$ , когда задан её наружный диаметр  $d_{ex}$ : формула (8б) дала более точный результат, чем формула (5б), за меньшее количество шагов вычисления; формулами (8а) и (5а) «выданы» примерно равноточные результаты, причём первой из них – при меньшем количестве шагов вычисления, но с помощью формулы (4а) более точный результат получен ещё быстрее. Таким образом, для МН ВАЗ отношение  $b/d_{ex}$  лучше вычислять по формуле

(8б), а для МН ЗМЗ-24Д – по формуле (4а). В табл. 3 приведенные также значения  $b/d_{ex}$ , полученные делением соответствующих значений размеров в парах параметр – результат: ОП этих значений  $b/d_{ex}$  примерно такие же, как и полученных ранее, но при более быстрой сходимости итераций при расчёте  $d_{ex}$  (и, следовательно, отношения  $b/d_{ex}$ ) с помощью формул (6а, 6б). Что касается формул (9а, 9б), то полученным с их помощью значениям  $b/d_{ex}$  свойственны такие же значения ОП, как и значениям отношения  $b/d_{ex}$ , полученным после расчёта диаметра  $d_{ex}$  по (6а, 6б), поэтому целесообразнее использовать последние вместо формул (9а, 9б).

Благодаря большему удобству использования формул (6а – 9б) по отношению к предыдущим, с их помощью найдены приведенные в табл. 3 значения размеров шестерён и их отношения для МН двух тракторных дизелей, характеризуемых РЗ (1а, 1б) с числовыми параметрами  $a_0 = \pm 0,0161$  и  $b_0 = 1,17$ . Хотя для МН 2-цилиндрового дизеля Д-120 весьма грубо предсказана ширина шестерни  $b$  при заданном её наружном диаметре, для остальных трёх пар параметр – результат величины ОП результатов можно считать приемлемыми. Величина ОП значений отношения  $b/d_{ex}$  для всех рассмотренных пар параметр – результат близка к ОП вычисленного в них размера шестерни, но при расчёте  $d_{ex}$  имеет обратный знак. Для МН дизеля Д-120 применение формулы (8б) не улучшило точности вычисления отношения  $b/d_{ex}$  по сравнению с более простым его расчётом при помощи формулы (7б), когда задан  $d_{ex}$ . Для МН 6-цилиндрового дизеля ЯМЗ-236Д формула (8а) позволила улучшить точность расчёта отношения  $b/d_{ex}$  по сравнению с применением для этого формулы (7а), но за счёт 27-кратного удлинения вычислений.

Отметим, что если в исходную РЗ (1а, 1б) подставить фактические размеры шестерён МН этих дизелей, то их отношение  $b/d_{ex}$  можно вычислить с ОП около  $-0,18$  (для Д-120) и  $+0,012$  (для ЯМЗ-236Д). По-видимому, для МН дизеля Д-120 причиной низкой точности расчёта ширины шестерни  $b$  и отношения  $b/d_{ex}$  с помощью формул (7б) и (8б) служит повышенное отклонение положения точки в координатах  $b/d_{ex}$  и  $(b-d_{ex})$ , характеризующей этот МН, от линии РЗ (1б).

В отличие от РЗ (1а) и (1б), для МН дизелей при  $b < 1,1d_{ex}$  получена линейная РЗ  $b/d_{ex}$  от  $(b-d_{ex})$ , где  $a_0 = 0,020$  и  $b_0 = 1,0$  [1]. Она позволяет выразить один из размеров шестерни МН через другой в явном виде. Для этого вначале умножим обе части (1а) при  $b_0 = 1$  на  $d_{ex}$ :

$$b = d_{ex} + a_0 d_{ex} (b - d_{ex}). \quad (10)$$

Здесь сразу видно, что решением этого уравнения, не зависящим

от  $a_0$ , является  $b = d_{ex}$ ; его можно назвать «тривиальным», то есть очевидным [5]. Если выразить из (10) ширину шестерни  $b$ , то получится

$$b(1 - a_0 d_{ex}) = d_{ex}(1 - a_0 d_{ex}) \text{ или } b = d_{ex}. \quad (11)$$

Но при особом значении наружного диаметра  $d_{ex} = 1/a_0 = d_{ex}^*$ , равном 50 мм для совокупности исследованных МН дизелей, разности в скобках в (11) обращаются в нуль, и тут, казалось бы, можно допустить неравенство двух размеров шестерни? Пусть  $b = 2d_{ex}^*$  и  $d_{ex} = d_{ex}^*$ ; тогда при допущении, что отношение двух выражений  $(1 - a_0/a_0)$ , как одинаковых бесконечно малых, стремится к единице, подстановка в (11) даст ложное утверждение  $2d_{ex}^* = d_{ex}^*$  или  $2 = 1$ .

Немного иначе обстоит дело, если из (10) выразить наружный диаметр шестерни МН  $d_{ex}$ : получится квадратное уравнение

$$a_0 d_{ex}^2 - (1 + a_0 b) d_{ex} + b = 0, \quad (12)$$

в общем случае имеющее два решения или корня:

$$d_{ex} = \left(1 + a_0 b \pm \sqrt{(1 + a_0 b)^2 - 4a_0 b}\right) / (2a_0) = (1 + a_0 b \pm (1 - a_0 b)) / (2a_0), \quad (13)$$

условием реалистичности или осуществимости которых является  $d_{ex} > 0$ . Заменяя двойной знак  $\pm$  в (13) знаками плюс и минус, получим:

$$d_{ex} = \begin{cases} \frac{1 + a_0 b + 1 - a_0 b}{2a_0} = 1/a_0 = d_{ex}^*; & (14a) \\ \frac{1 + a_0 b - 1 + a_0 b}{2a_0} = b, & (14б) \end{cases}$$

то есть либо особое значение диаметра, либо тривиальное решение. (Далее буквы «а» и «б» в номерах формул могут указывать на варианты решений, обусловленные использованием различных знаков вместо двойного  $\pm$ .)

Таким образом, видна непригодность линейной РЗ отношения  $b/d_{ex}$  от разности этих размеров шестерни МН для отыскания произвольного сочетания последних (среди которых один размер должен быть известным), удовлетворяющего уравнению (10). При произвольной ширине шестерни  $b$  должно выполняться условие (14а), и тогда, согласно (10),

$$b = 1/a_0 + 1 \cdot b - 1/a_0 = b,$$

а погрешность особого значения диаметра  $d_{ex}^*$  относительно фактического (в выбранном прототипе МН) может быть велика.

Отношение  $b/d_{ex}$  при  $b_0 = 1$  можно выразить из (1а) при параметре либо  $b$ , либо  $d_{ex}$ , используя формулы (4а) и (4б):

$$b/d_{ex} = \begin{cases} 1 + a_0 b (1 - (b/d_{ex})^{-1}) & \text{из (4а);} \\ 1 + a_0 d_{ex} ((b/d_{ex}) - 1) & \text{из (4б).} \end{cases} \quad (15а)$$

$$(15б)$$

Из последнего уравнения получается тривиальное решение:

$$b/d_{ex} = \frac{1 - a_0 d_{ex}}{1 - a_0 d_{ex}} = 1.$$

Из (15а) получается квадратное уравнение

$$(b/d_{ex})^2 - (1 + a_0 b)(b/d_{ex}) + a_0 b = 0, \quad (16а)$$

решениями которого являются два значения отношения  $b/d_{ex}$ :

$$b/d_{ex} = \frac{1 + a_0 b \pm (1 - a_0 b)}{2} = \begin{cases} 1 \\ a_0 b \end{cases}, \quad (16б)$$

причём из нижнего варианта  $b/d_{ex} = a_0 b$  получается  $d_{ex} = 1/a_0 = d_{ex}^*$ , как в (14а).

Для МН различных дизелей при  $b \geq d_{ex}$  получена квадратичная РЗ отношения  $b/d_{ex}$  от разности этих размеров, имеющая общий вид

$$b/d_{ex} = 1,0 + a_0(b - d_{ex}) + a_1(b - d_{ex})^2. \quad (17)$$

где числовые параметры  $a_0 = 0,020$  1/мм и  $a_1 = -0,00035$  мм<sup>-2</sup> [1]. Она позволяет явно выразить один из размеров шестерни через другой. Умножая обе части (17) на  $d_{ex}$ , получим после преобразований

$$b - d_{ex} = d_{ex}(b - d_{ex})(a_0 + a_1(b - d_{ex})); \quad 1/d_{ex} = a_0 + a_1(b - d_{ex}),$$

откуда ширина шестерни  $b$  (при параметре  $d_{ex}$ ) выражается непосредственно:

$$b = (1/d_{\text{ex}} - a_0 + a_1(b - d_{\text{ex}}))/a_1 = d_{\text{ex}} + (1/d_{\text{ex}} - a_0)/a_1, \quad (18)$$

а наружный её диаметр  $d_{\text{ex}}$  (при параметре  $b$ ) – из квадратного уравнения:

$$a_1 d_{\text{ex}}^2 - (a_0 + a_1 b) d_{\text{ex}} + 1 = 0, \quad (19)$$

похожего на уравнение (12) и имеющего два решения:

$$d_{\text{ex}} = \left( a_0 + a_1 b \pm \sqrt{(a_0 + a_1 b)^2 - 4a_1} \right) / (2a_1). \quad (20a)$$

Если здесь использовать минус (вместо  $\pm$ ), то вычисление диаметра можно выполнить точнее, умножив и разделив правую часть (20a) на сумму  $a_0 + a_1 b + \sqrt{(a_0 + a_1 b)^2 - 4a_1}$  и затем упростив числитель:

$$d_{\text{ex}} = 2 \left( a_0 + a_1 b + \sqrt{(a_0 + a_1 b)^2 - 4a_1} \right)^{-1}. \quad (20б)$$

Если коэффициент  $a_1 \rightarrow 0$ , то сумма  $a_0 + ba_1 \approx a_0$ , ширина  $b$ , согласно (18), неограниченно растёт по величине, а наружный диаметр шестерни  $d_{\text{ex}}$  стремится к предельным значениям  $d_{\text{ex}}^{***} = a_0/a_1$  (при знаке плюс перед корнем в (20a)) или  $1/a_0$  (при использовании (20б)). Из (18) при этом следует, что в этих случаях ширина шестерни равна  $b^{**} = 1/a_0 = d_{\text{ex}}^*$ .

Значения размеров шестерни МН, полученные с помощью (18) и (20a, 20б), имеют смысл, если они положительные. Так как размеры  $b$  и  $d_{\text{ex}}$ , задаваемые как параметры, положительны, а для исследованной совокупности МН дизелей  $a_0 = 0,02 > 0$ , то знаки  $b$  и  $d_{\text{ex}}$ , согласно формулам (18) и (20a, 20б), зависят от знака коэффициента  $a_1$  и величины упомянутых параметров, то есть известных размеров. Далее величина  $a_1$  предполагается малой, например, меньшей, чем  $a_0^2$ .

Пусть  $a_1 < 0$ , как предложено для РЗ (17) в работе [1]. Тогда, чтобы получить положительное значение  $b$  по (18), нужно выполнить условие или неравенство

$$a_1 d_{\text{ex}} + 1/d_{\text{ex}} - a_0 < 0, \quad (21a)$$

которое приводится к квадратному

$$a_1 d_{\text{ex}}^2 - a_0 d_{\text{ex}} + 1 < 0. \quad (21б)$$

Решения или корни его левой части:

$$d_{\text{ex}}^{***} = \left( a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4a_1} \right) / (2a_1), \quad (22а)$$

причём при использовании минуса перед корнем, как и для формулы (20а), здесь целесообразно преобразование к виду

$$d_{\text{ex}}^{***} = 2 \left( a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4a_1} \right)^{-1}. \quad (22б)$$

Так как предполагается малость  $a_1$ , то корень в скобках (22а) существует. Если предположить малость и наружного диаметра шестерни ( $d_{\text{ex}} \rightarrow 0$ ), то (21б) приводится к ложному утверждению  $1 < 0$ ; в то же время, очень большое значение  $d_{\text{ex}}$ , скорее всего, тоже не удовлетворит неравенству (21б). Так как при  $a_1 < 0$  величина корня в (22а) больше  $a_0$ , то положительное граничное значение наружного диаметра  $d_{\text{ex}}^{***}$  можно получить, если в этой формуле использовать знак минус, то есть воспользоваться формулой (22б). Рассмотрим два числовых примера.

Пусть  $a_0 = 0,02$  и  $a_1 = -10^{-4}$ , тогда, согласно (22б),

$$d_{\text{ex}}^{***} = 2 \left( 0,02 + \sqrt{0,0004 + 0,0004} \right)^{-1} = 41,42 \text{ мм};$$

если теперь принять  $d_{\text{ex}} = 50 \text{ мм} > d_{\text{ex}}^{***}$ , то, согласно (18), ширина шестерни

$$b = 50 + (1/50 - 0,02) / (-10^{-4}) = 50 \text{ мм}.$$

Но если принять  $d_{\text{ex}} = 40 \text{ мм} < d_{\text{ex}}^{***}$ , то

$$b = 40 + (1/40 - 0,02) / (-10^{-4}) = -10 \text{ мм},$$

что невыполнимо. Поэтому при  $a_1 < 0$ , вычисляя  $b$ , нужно задавать наружный диаметр шестерни  $d_{\text{ex}} > d_{\text{ex}}^{***}$ .

При  $a_1 < 0$  корень в скобках (20а) существует, а его величина больше, чем  $a_0 + ba_1$  (в частном случае  $a_0 + ba_1 = 2\sqrt{-a_1}$  она равна этой сумме), поэтому  $d_{\text{ex}} > 0$ , если в (20а) использовать минус, то есть воспользоваться формулой (20б). В пределе при  $b \rightarrow 0$  формула (20а) переходит в (22а).

Теперь рассмотрим случай, когда  $a_1 > 0$ . Тогда условию  $b > 0$  в

(18) отвечает неравенство

$$a_1 d_{\text{ex}} + 1/d_{\text{ex}} - a_0 > 0, \quad (23a)$$

которое приводится к квадратному

$$a_1 d_{\text{ex}}^2 - a_0 d_{\text{ex}} + 1 > 0, \quad (23б)$$

где решения или корни левой части – согласно (22а). Здесь видно, что при  $d_{\text{ex}} \rightarrow 0$  получается верное утверждение  $1 > 0$ . Оба возможных значения  $d_{\text{ex}}^{***}$  положительны. В частном случае  $a_0 = 0,02$  и  $a_1 = 10^{-4}$  оба решения левой части (23б) совпадают:

$$d_{\text{ex}}^{***} = 2 \cdot 0,02 / 10^{-4} = 100 \text{ мм},$$

поэтому в качестве другого примера примем  $a_1 = 10^{-5}$ :

$$d_{\text{ex}}^{***} = \begin{cases} 10^4 (0,02 + \sqrt{0,0004 - 0,00004}) / 2 \approx 1949 \text{ мм}; \\ 2(0,02 + \sqrt{0,0004 - 0,00004})^{-1} = 51,32 \text{ мм}. \end{cases}$$

Неравенство (23а) здесь выполняется, если  $0 < d_{\text{ex}} < 51,32$  мм или  $d_{\text{ex}} > 1949$  мм, но практический смысл есть лишь у первого из этих условий. Поэтому при  $a_1 > 0$  можно получить  $b > 0$ , согласно (18), если  $0 < d_{\text{ex}} < d_{\text{ex}}^{***}$ , где граничное значение наружного диаметра определяется по формуле (22б).

Рассмотрим теперь условие положительности значений  $d_{\text{ex}}$ , вычисляемых с помощью формулы (20а), при  $a_1 > 0$ . В этом случае корень в скобках (20а) по величине меньше суммы  $a_0 + ba_1$ , и потому оба возможных решения уравнения (19) положительны. По-видимому, при малости  $a_1$  использование плюса в (20а) может дать слишком большое значение наружного диаметра, так что более практичным может стать другое решение (19), полученное при использовании минуса в (20а), то есть с помощью (20б).

Вопрос о выборе рациональной малой величины коэффициента  $a_1$ , когда расчёт размеров шестерён МН основан на использовании РЗ (17) (в предположении, что последняя справедлива), можно решить посредством проведения «вычислительного» эксперимента. Он состоит в том, что при  $a_0 = 0,02$  и ряде малых значений  $a_1$  вычисляется ширина  $b$  по (18), когда задаётся наружный диаметр  $d_{\text{ex}}$  как параметр, и затем вычисляется последний, когда задана ширина  $b$  тоже как параметр. Затем строятся графики кривых, изображающих

математические зависимости одного размера от другого, и с этими кривыми сопоставляется расположение точек, соответствующих фактическим сочетаниям размеров  $b$  и  $d_{ex}$ . Приемлемые значения  $a_1$  – такие, для которых построенные кривые на этих графиках пройдут около наибольшего количества упомянутых точек.

На рис. 1 показаны графики математических зависимостей  $b$  от  $d_{ex}$  и  $d_{ex}$  от  $b$  для  $a_1 = 10^{-6} \dots 0,0005$  (для 1-й зависимости) и  $10^{-5} \dots 0,0003$  (для второй), построенные в логарифмических координатах. На первом графике (рис. 1,а) видно, что при расчёте ширины шестерни  $b$  по (18) не следует принимать  $a_1 < 10^{-4}$ , так как это ведёт к отрицательности  $b$  при  $d_{ex} > 50 \dots 80$  мм (тем меньшем, чем ниже  $a_1$ ) и слишком большим, непрактичным значениям  $b$  при  $d_{ex} < 50$  мм. Наиболее плавна зависимость  $b$  от  $d_{ex}$  при  $a_1 = (3 \dots 5)10^{-4}$ .

На втором графике (рис. 1,б) видно, что величина наружного диаметра шестерни  $d_{ex}$  по  $b$  определяется двузначно, когда  $b > (2\sqrt{a_1} - a_0)/a_1$ , и не может быть определена, когда  $b$  меньше этой дроби. Чем ниже  $a_1$ , тем ближе меньшее значение  $d_{ex}$  к  $1/a_0 = 50$  мм и выше большее значение  $d_{ex}$ ; последнее непрактично велико при  $a_1 < 10^{-4}$ . Чем выше  $a_1$ , тем правее вдоль шкалы  $b$  сдвигается кривая зависимости  $d_{ex}$  от  $b$ , не позволяя получить результат левее, в том числе – в практически важной области. Поэтому, видимо, при расчёте  $d_{ex}$  с помощью формул (20а, 20б) следует принимать  $a_1 = (1 \dots 1,5)10^{-4}$ , если ширина шестерни МН  $b \leq 40$  мм, и  $a_1 = (1,5 \dots 3)10^{-4}$ , если  $b = 40 \dots 60$  мм; более широкие шестерни в исследованных МН автотракторных дизелей не применяются. Однако далее эти интервалы  $a_1$  скорректированы с учётом фактических сочетаний размеров шестерён МН дизелей.

На рис. 2 показана увеличенная левая нижняя часть рис. 1,б, где также нанесены: прямые  $b = d_{ex}$  и  $d_{ex} = 50$  мм; кривая для  $a_1 = (-4 \dots -3)10^{-4}$  (что в среднем свойственно совокупности исследованных МН дизелей при  $b > d_{ex}$  [1]) и точки, соответствующие реальным сочетаниям размеров шестерён для большинства исследованных МН дизелей. Подсчёт количества этих точек, попавших в различные угловые зоны между изображёнными кривыми (пересёкшимися при  $b = d_{ex} = 50$  мм), дал следующие результаты.

При  $b < 50$  мм наиболее «заселены» точками такие угловые зоны: между прямой  $b = d_{ex}$  и кривой для  $a_1 = (-4 \dots -3)10^{-4}$ ; между последней кривой и прямой  $d_{ex} = 50$  мм. Менее «заселены» две зоны, прилегающие к кривой для  $a_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Поэтому для МН с  $b < 50$  мм целесообразно вычислять  $d_{ex}$  с помощью (20а, 20б), принимая  $a_1 < 0$ , но не ниже  $(-4 \dots -3)10^{-4}$ , или принимая  $a_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  (только для нижней ветви зависимости, когда в (20а) используется минус).



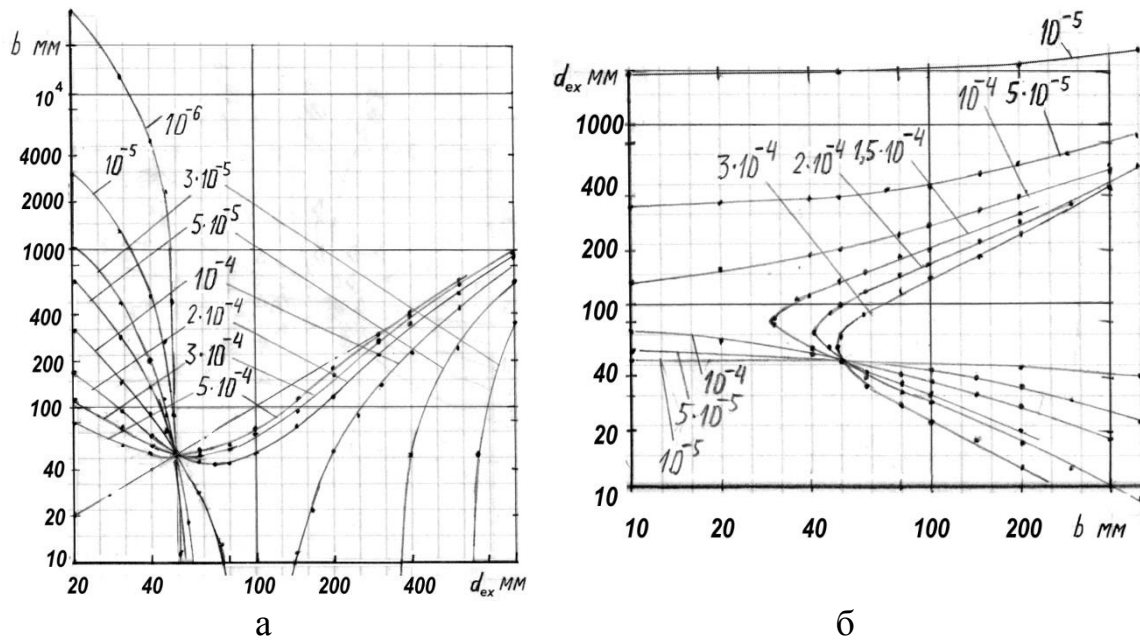


Рис. 1. Графики зависимостей между размерами шестерён МН при  $a_0 = 0,02$  и различных значениях коэффициента  $a_1$  в (17): а –  $b$  от  $d_{ex}$ ; б –  $d_{ex}$  от  $b$ .

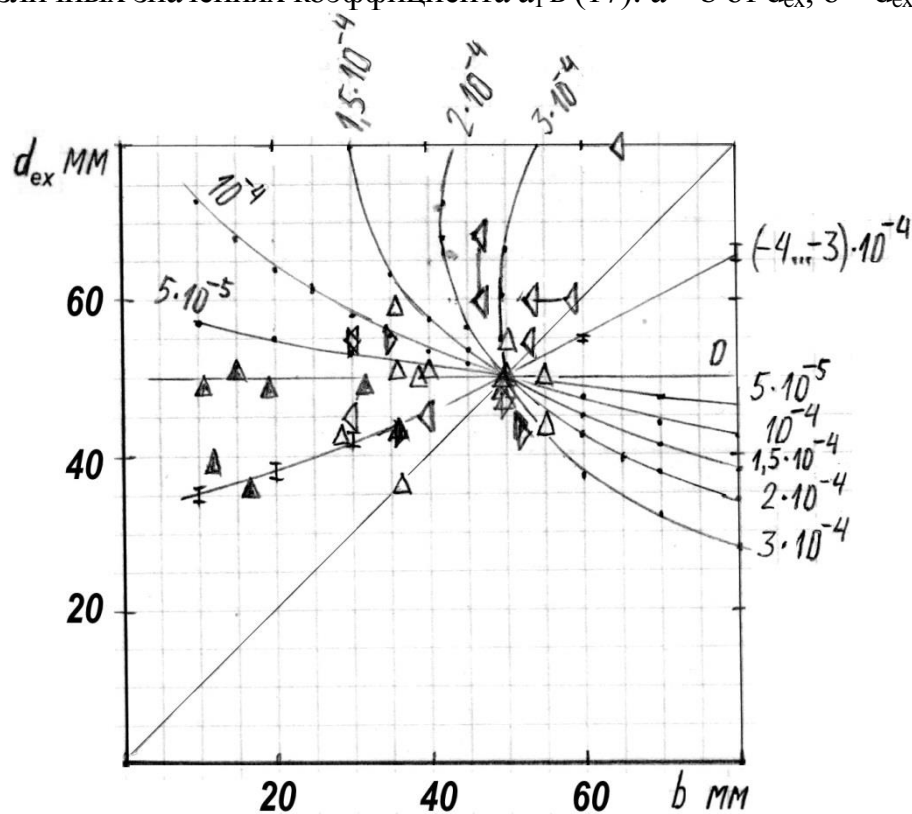


Рис. 2. Увеличенный фрагмент графика рис. 1, б и фактические сочетания размеров шестерён МН различных дизелей ( $\triangleright$  автотракторных,  $\triangleleft$  стационарных и судовых,  $\Delta$   $\blacktriangle$  тракторных).

Для МН с более широкими шестернями наиболее «заселена» точками угловая зона между прямой  $b = d_{ex}$  и кривой для  $a_1 = 3 \cdot 10^{-4}$  (верхним участком зависимости, когда в (20а) используется плюс).

Также есть точки и около нижней ветви зависимости для  $a_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ . Поэтому для МН с  $b > 50$  мм целесообразно вычислять  $d_{ex}$ , принимая  $a_1$  несколько выше 0,0003, например  $(4...5)10^{-4}$ , и рассмотреть оба значения наружного диаметра. Наконец, несколько точек расположены при  $b = 50$  мм, соответствуя интервалу  $d_{ex} = 46...55$  мм. Для этого случая можно принять оба размера шестерни одинаковыми и близкими к 50 мм.

Если при вычислении  $d_{ex}$  известна ширина шестерни  $b$  и нужно обосновать значение  $a_1$  для использования формул (20а, 20б), то для существования вычисляемых значений наружного диаметра должно выполняться условие или неравенство

$$(a_0 + a_1 b)^2 - 4a_1 \geq 0. \quad (24)$$

После преобразований, корни соответствующего квадратного уравнения

$$a_1^* = b^{-2} (2 - a_0 b \pm 2\sqrt{1 - a_0 b}). \quad (25)$$

Если  $a_1 \rightarrow 0$ , то из (24) следует истинное утверждение  $a_0^2 \geq 0$ . Очень большое положительное значение  $a_1$  также удовлетворяет неравенству (24), так как  $(a_1 b)^2 > 4a_1$  при  $b > 2/\sqrt{a_1}$  мм. Так как отрицательные значения  $a_1$  заведомо удовлетворяют неравенству (24), то его невыполнение возможно в интервале между двумя положительными значениями  $a_1^*$  по (25).

В качестве примера использования формул (18) и (20а, 20б) рассмотрим МН автомобильных 8-цилиндровых дизелей КамАЗ-740.11 и -740.50, размеры шестерён которого (в среднем для опубликованных полей допусков) равны  $b = 34,944$  и  $d_{ex} = 55,455$  мм [6]. На рис. 2 точка  $\triangleright$  с такими координатами находится слева от узловой точки, между кривыми для  $a_1 = 5 \cdot 10^{-5}$  и  $10^{-4}$ . Если взять  $a_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ , то для заданной величины  $d_{ex}$  расчётная ширина шестерни по (18) равна 16,11 мм – слишком мала; при  $a_1 = 8 \cdot 10^{-5}$  получится  $b = 30,86$  мм, что на 12% меньше фактического значения, а при  $a_1 = 10^{-4}$  получится уже  $b = 35,78$  мм – на 2,4% выше фактической.

Граничные значения коэффициента  $a_1^*$ , согласно (25), при заданной ширине шестерни  $b$  равны  $\{1,66763 \cdot 10^{-4}; 1,96433 \cdot 10^{-3}\}$ . Принимая  $a_1 = 10^{-4}$  – ниже меньшего из этих граничных значений, по формуле (20б) получим меньшее из двух возможных значений наружного диаметра шестерни, равное 55,83 мм и практически совпадающее с фактическим. Если же взять  $a_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ , то получится значение  $d_{ex} = 52,26$  мм, которое примерно на 6% меньше фактического. Значит, этот размер менее чувствителен, чем ширина

шестерни, к величине коэффициента  $a_1$ .

Таким образом, при расчёте ширины шестерни рассмотренного МН по формуле (18) следует принять  $a_1 = 10^{-4}$ , а при вычислении наружного её диаметра по формуле (20б) – выбрать этот коэффициент в интервале  $a_1 = (0,8...1,0)10^{-4}$ .

Из формулы (18) следует, что коэффициент  $a_1$  можно выразить через размеры шестерни МН:

$$a_1 = (1/d_{ex} - a_0)/(b - d_{ex}). \quad (26)$$

Поэтому, если считать их известными в последнем примере, то получится значение  $a_1 \approx 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-2}$  – весьма близкое к выше рекомендованному. Хотя этот коэффициент может быть коррелирован с функциями размеров шестерён исследованных МН дизелей, пока не удалось получить РЗ, пригодные для предсказания  $a_1$ , и вместо них можно совместно пользоваться рис. 2 и формулами (18, 20а, 20б). В то же время, формулой (26) и выражением  $a_0 = 1/d_{ex}$ , вытекающим из (10), нарушается предположение о том, что  $a_1$  и  $a_0$  – это постоянные числовые параметры РЗ.

*Выводы.* 1. Регрессионные зависимости (РЗ) отношения  $b/d_{ex}$  ширины шестерён исследованных МН отечественных АДІЗ к их наружному диаметру от их разности  $(b - d_{ex})$ , в которых последняя возведена в нецелую степень, близкую к единице, позволяют вычислять методом итераций этот диаметр  $d_{ex}$  для известной ширины шестерни  $b$ , а также последнюю для известного диаметра. Однако возможность и скорость сходимости итераций к результату существенно зависят от вида применяемого уравнения и того, меньше или больше единицы отношение  $b/d_{ex}$ , что показано на примерах для двух МН.

2. Для МН, применявшегося в карбюраторных двигателях ВАЗ ( $b/d_{ex} < 1$ ), процессы итераций, основанные на формулах (2б) и (3б) или (6б), при задании фактической ширины шестерни приводят к значениям наружного диаметра шестерни, полусумма которых весьма близка к его фактическому значению. Для МН двигателя ЗМЗ-24Д ( $b/d_{ex} > 1$ ) процессы итераций, основанные на формулах (2а) и (6а), и расчёт по формуле (7а) приводят к значениям обоих размеров шестерён, достаточно близким к фактическим.

Для двух МН тракторных дизелей (Д-120 и ЯМЗ-236Д) процессы итераций, основанные на формулах (6а) и (6б), приводят к значениям наружного диаметра шестерни, которые выше фактических на 6...11%; вычисленная ширина шестерни МН 2-го дизеля по формуле (7а) на 6% меньше фактической.

3. Линейная РЗ (6) отношения размеров шестерни МН  $b/d_{ex}$  от их

разности, характеризующая исследованные МН различных отечественных дизелей при  $b/d_{ex} < 1,1$ , не позволяет получить сочетания этих размеров, отличные от  $b = d_{ex}$ , или такие, в которых  $d_{ex} \neq 50$  мм. Указанные сочетания можно получить с помощью квадратичной РЗ (17), если выполнены условия положительности значений размеров шестерни для выбранного знака коэффициента  $a_1$  при квадрате разности этих размеров.

4. При расчёте ширины шестерни  $b$  для заданного её наружного диаметра  $d_{ex}$  с помощью формулы (18) не следует принимать коэффициент  $a_1 < 10^{-4}$ ; математическая зависимость  $b$  от  $d_{ex}$  наиболее плавная в логарифмических координатах, если  $a_1 = (3 \dots 5) \cdot 10^{-4}$ .

5. При расчёте наружного диаметра шестерни  $d_{ex}$  для заданной её ширины  $b$  с помощью формул (20а, 20б) рациональная величина коэффициента  $a_1$  зависит от величины  $b$ : при  $b < 50$  мм следует принять его значение либо по условию  $(-4 \dots -3) \cdot 10^{-4} < a_1 < 0$ , либо  $a_1 \approx 5 \cdot 10^{-5}$  (во 2-м случае – только для нижней ветви зависимости (20а)); при  $b = 50$  мм целесообразно принять  $d_{ex} = b$ ; при  $b > 50$  мм следует принять данный коэффициент несколько выше 0,0003 и рассмотреть оба значения  $d_{ex}$  по (20а). Для конкретной модели МН эти рекомендации могут быть скорректированы с учётом неодинаковой чувствительности расчётных размеров шестерни к  $a_1$ .

#### Список использованных источников:

1. Стефановский А. Б. Соотношения между основными размерами шестерён масляных насосов отечественных автотракторных двигателей. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету імені Д. Моторного*. Мелітополь, 2020. Вып. 20, т. 4. С. 156-167.

2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва: ГИТТЛ, 1953. 608 с.

3. Автомобили «Жигули» моделей ВАЗ-2101, -2102, -21011, -21013: Устройство и ремонт / В. А. Вершигора и др. Москва: Транспорт, 1990. 240 с.

4. Автомобиль «Волга» ГАЗ-24. Конструктивные особенности, техническое обслуживание и текущий ремонт / А. И. Гор и др. Москва: Транспорт, 1989. 352 с.

5. Вайсштейн Э. В. Тривиально. *MathWorld*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Trivial.html>. (дата звернення: 11.10.2020).

6. Двигатели КамАЗ 740.11-240, 740.14-300, 740.30-260, 740.50-360, 740.51-320. Руководства по эксплуатации, техническому обслуживанию и ремонту. Набережные Челны, 2002. 248 с.

## **СВОЙСТВА РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ОТНОШЕНИЯ ОСНОВНЫХ РАЗМЕРОВ ШЕСТЕРЁН МАСЛЯНЫХ НАСОСОВ АВТОТРАКТОРНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ОТ РАЗНОСТИ ЭТИХ РАЗМЕРОВ**

**Стефановский А. Б., Болтянский О. В.**

### *Аннотация*

В статье рассмотрены свойства и особенности регрессионных зависимостей между отношением и разностью основных размеров (ширины и наружного диаметра) шестерён масляных насосов с внешним зацеплением, установленных в системах смазки отечественных автотракторных двигателей. Проанализирован ряд способов вычисления одного из этих размеров с помощью указанных зависимостей, если известен другой размер; приведены числовые примеры. Для квадратичной регрессионной зависимости выявлены особенности расчёта размеров шестерён при различном знаке коэффициента при квадрате разности этих размеров. Даны рекомендации для выбора этого коэффициента с учётом фактических сочетаний размеров шестерён масляных насосов различных дизелей.

**Ключевые слова** : двигатель, масляный насос, ширина шестерни, наружный диаметр шестерни, зависимость, коэффициент.

## **ВЛАСТИВОСТІ РЕГРЕСІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ВІДНОШЕННЯ ОСНОВНИХ РОЗМІРІВ ШЕСТЕРЕНЬ МАСЛЯНИХ НАСОСІВ АВТОТРАКТОРНИХ ДВИГУНІВ ВІД РІЗНИЦІ ЦИХ РОЗМІРІВ**

**Стефановський О. Б., Болтянський О. В.**

### *Анотація*

У статті розглянуто властивості і особливості регресійних залежностей між відношенням і різницею основних розмірів (ширини і зовнішнього діаметра) шестерень масляних насосів із зовнішнім зачепленням, встановлених в системах змащення вітчизняних автотракторних двигунів. Проаналізовано ряд способів обчислення одного з цих розмірів за допомогою зазначених залежностей, якщо відомий інший розмір; наведені числові приклади. Для обчислення одного з цих розмірів у шестерень масляних насосів вітчизняних автомобільних двигунів з іскровим запалюванням можна використовувати метод ітерацій, можливість та швидкість досягнення результату яким суттєво залежить від вигляду застосовуваного рівняння та відмінності відношення цих розмірів від одиниці. Встановлена непридатність лінійної і придатність квадратичної регресійної залежності між вище вказаними змінними для розрахунку одного з вказаних розмірів, якщо відомий інший. Для останньої отримано вирази для безпосереднього обчислення цих розмірів, визначено умови отримання їх позитивних значень та виявлено особливості розрахунку розмірів шестерень при різному знаку коефіцієнта при квадраті різниці цих розмірів. Надано рекомендації для вибору величини цього коефіцієнта з урахуванням фактичних сполучень розмірів шестерень масляних насосів різних дизелів, відбитих на графіку залежності зовнішнього діаметра шестерні від її ширини. При ширині шестерні менше 50 мм слід приймати значення цього коефіцієнта, яке за абсолютною величиною, як правило, менше, чим при цієї ширині більше 50 мм. У першому випадку цей коефіцієнт може бути негативним, а у другому повинен бути позитивним, і також треба розглянути два можливих значення зовнішнього

діаметра.

**Ключові слова** : двигун, масляний насос, ширина шестерні, зовнішній діаметр шестерні, залежність, коефіцієнт.

**PROPERTIES OF REGRESSIONS OF THE RATIO OF THE MAIN DIMENSIONS OF GEARS OF OIL PUMPS OF THE AUTOMOTIVE ENGINES AGAINST THE DIFFERENCE OF THESE SIZES**

**A. Stefanovsky, O. Boltyansky**

*Summary*

The article considers the properties and features of regressions of the ratio against the difference of the main dimensions (width and outer diameter) of gears of oil pumps with external gearing installed in lubrication systems of domestic automotive engines. A number of ways to calculate one of these dimensions using these regressions, if another is known, is analyzed and numerical examples are given. The method of iterations can be used to calculate one of these dimensions for the gears of oil pumps of domestic automobile engines with spark ignition. The possibility and speed of these iterations depends significantly on the type of equation used and the difference between these dimensions. The unsuitability of the linear and the suitability of the quadratic regression of the abovementioned variables are proved for the calculation of one of the specified dimensions, if another is known. For the latter regression, expressions for direct calculation of these dimensions are obtained, the conditions for obtaining their positive values are determined, and peculiarities of calculating the gear dimensions at different sign of the coefficient at the square of their difference are revealed. Recommendations are given for the choice of the value of this coefficient taking into account the actual combinations of the gear dimensions of oil pumps of different diesel engines, reflected in the graph of the dependence of the gear outer diameter on the gear width. If the gear width is less than 50 mm, the absolute value of this coefficient should be taken usually less than when this width exceeds 50 mm. In the first case, this coefficient may be negative, and in the second one, it must be positive and two possible values of the gear outer diameter should be considered.

**Key words** : engine, oil pump, gear width, gear outer diameter, regression, coefficient.