

УДК 514.18

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ БН-ЧИСЛЕННЯ В ПРОГРАМНОМУ ПАКЕТІ MAPLE

Літвінов А. І.<sup>1</sup>, викладач, спеціаліст

*e-mail: department.mgt@mctsau.org*

Бодяко К.О.<sup>1</sup>, студент

*e-mail: bodyako.ksenia@mctsau.org*

<sup>1</sup>*Відокремлений структурний підрозділ «Мелітопольський фаховий коледж Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного»*

**Актуальність та постановка проблеми.** Завдяки своїм технологічним властивостям торсові поверхні добре зарекомендували себе у різних галузях промисловості. Для проведення досліджень та інженерних розрахунків важливо мати інструментарій, що дозволяє швидко та точно змодельовати поверхню. На поточному рівні розвитку математичного апарату числення Балюби – Найдиша актуальною проблемою є отримання способів та методів аналітичного опису торсових поверхонь і їх систематизація. Знайдені рішення дозволять значно розширити інструментарій апарату та по-новому розглянути прикладні задачі моделювання торсів. В якості програмного забезпечення для візуалізації отриманих результатів перспективним вважається використання програмного пакету Maple.

Питаннями геометричного моделювання торсових поверхонь займалися видатні вчені, зокрема Обухова В.С., Підгорний О.Л., Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Кривошاپко С.Ф., Балюба І.Г. та ін.. Найбільш повно та систематично питання алгоритмів конструювання, аналітичного опису і класифікації торсових поверхонь виклав у своїй роботі «Енциклопедия аналитических поверхностей» [1] професор Кривошاپко. У роботі надано практично всі можливі види торсових поверхонь, їх векторні та параметричні форми задання. Однак, конструювання поверхонь таким чином призводить до формування складних систем із тригонометричних рівнянь, що, у свою чергу, потребує значних витрат розрахункових ресурсів.

Важливо відзначити дисертаційні дослідження Балюби І.Г. [2], які дозволили створити апарат БН-числення, що відкрив нові можливості у геометричному моделюванні об'єктів. Його учнями, а саме Конопацьким Є.В. та Давиденко І.П. у працях [3, 4] було суттєво розширено інструментарій апарату. Їх наукові здобутки надали можливість аналітичного опису кривих, які є основою побудови різноманітних торсових поверхонь.

**Основні матеріали дослідження.** Побудувати геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються, та отримати їх аналітичний опис засобами математичного апарату БН-числення.

1. Торсова поверхня з двома параболами, осі котрих перетинаються.

Нехай задано симплекс  $ABCD$  (Рис. 1). Відповідно до алгоритму, представленому у роботі [1] розглянемо параболу  $D_1KD_2$ , що розташована у симплексі  $D_1DD_2$ , який належить грані  $BDC$  та параболу  $A_1KA_2$ , що розташована у симплексі  $A_1AA_2$ , яка належить грані  $BAC$ . Згідно із типом шуканої торсової поверхні осі параболічних напрямних повинні перетинатись. У нашому випадку грані  $BDC$  і  $BAC$  перетинаються у ребрі  $BC$ , а отже і осі параболічних напрямних, що знаходяться на відповідних гранях – перетинаються, що забезпечує виконання заданої умови.

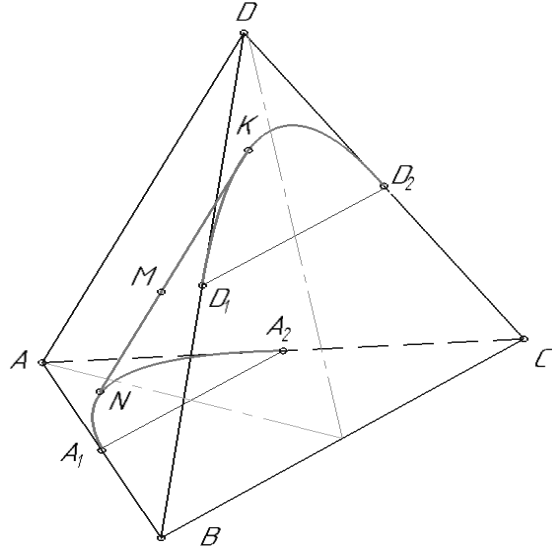


Рис. 1. Геометрична схема конструювання торса з двома параболами, осі котрих перетинаються

У симплексі  $D_1DD_2$  визначимо дугу параболи  $D_1KD_2$  як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \bar{u}^2 + 2D \cdot u \cdot \bar{u} + D_2 \cdot u^2. \quad (1)$$

Визначимо точки  $D_1$  і  $D_2$  як середини відрізків  $BD$  и  $DC$ , отже  $D_1 = \frac{B+D}{2}$ , а  $D_2 = \frac{D+C}{2}$ .

Підставимо значення точок  $D_1$  та  $D_2$  до рівняння (1):

$$K = \left[ \frac{B+D}{2} \right] \bar{u}^2 + 2D u \bar{u} + \left[ \frac{D+C}{2} \right] u^2. \quad (2)$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = B \frac{\bar{u}^2}{2} + D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] + C \frac{u^2}{2}. \quad (3)$$

У симплексі  $A_1AA_2$  точки  $A_1$  і  $A_2$  також визначені як середини відрізків  $BA$  і  $AC$  відповідно. Звідси, аналогічно визначимо рівняння для параболи  $A_1NA_2$ :

$$N = B \frac{\bar{u}^2}{2} + A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] + C \frac{u^2}{2}. \quad (4)$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \bar{v}. \quad (5)$$

Підставимо рівняння (3) і (4) до рівняння (5) та після перетворень отримаємо:

$$M = A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + B \frac{\bar{u}^2}{2} + C \frac{u^2}{2} + D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v. \quad (6)$$

Представимо точкове рівняння (6) у параметричному вигляді:

$$x_M = x_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + x_B \frac{\bar{u}^2}{2} + x_C \frac{u^2}{2} + x_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v, \quad (7)$$

$$y_M = y_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2i\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + y_B \frac{\bar{u}^2}{2} + y_C \frac{u^2}{2} + y_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2i\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v,$$

$$z_M = z_A \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2i\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] \bar{v} + z_B \frac{\bar{u}^2}{2} + z_C \frac{u^2}{2} + z_D \left[ \frac{\bar{u}^2}{2} + 2i\bar{u} + \frac{u^2}{2} \right] v.$$

Візуалізація роботи рівняння (6) в програмному пакеті Maple зображено на рис. 2.

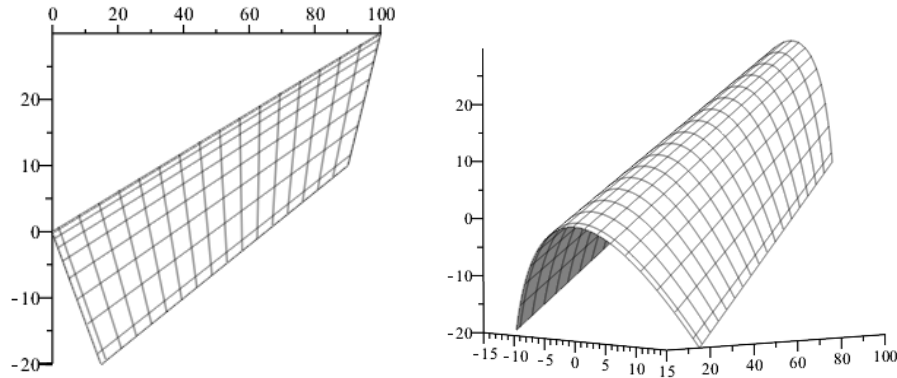


Рис. 2. Торсова поверхня із двома параболою, осі котрих перетинаються

2. Торсова поверхня з двома параболою, що належать площинам, які перетинаються, але з паралельними осями.

Нехай задано симплекс  $ABCD$  (рис. 3.). Відповідно до алгоритму наданому

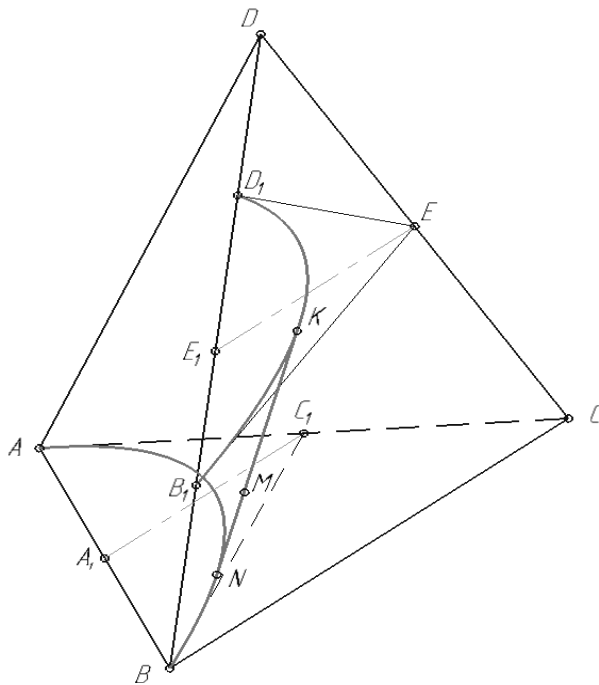


Рис. 3. Геометрична схема конструювання тора із двома параболою, що належать до площин, які перетинаються, але з паралельними осями

напрявні мають належати площинам, які перетинаються. У нашому випадку

у роботі [1] розглянемо відрізок  $E_1E$ , що належить грані  $DCB$  і відрізок  $A_1C_1$ , що належить грані  $ACB$ . Точки  $E_1$  і  $E$  визначені як середини ребер  $DB$  и  $DC$ , утворюючи середню лінію трикутника  $DCB$ , звідси випливає, що  $E_1E \parallel BC$ . Точки  $A_1$  і  $C_1$  визначені як середини ребер  $AB$  і  $AC$ , утворюючи середню лінію трикутника  $ACB$ , звідси випливає, що відрізок  $A_1C_1 \parallel BC$ . Згідно із властивістю паралельності прямих, якщо  $E_1E \parallel BC$  і  $A_1C_1 \parallel BC$ , то  $E_1E \parallel A_1C_1$ , а отже вісі  $E_1E$  та  $A_1C_1$  парабол  $D_1KB_1$  и  $ANB$  паралельні. Перша необхідна умова існування поверхні виконана.

Згідно із типом шуканої торсової поверхні параболічні торсової поверхні параболічні

парабола  $D_1KB_1$  належить грані  $DCB$ , а парабола  $ANB$  належить грані  $ACB$ , які в свою чергу перетинаються у ребрі  $BC$ , що забезпечує виконання другої необхідної умови існування поверхні.

У симплексі  $D_1EB_1$  визначимо дугу параболи  $D_1KB_1$  як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \bar{u}^2 + 2E \cdot u \cdot \bar{u} + B_1 \cdot u^2. \quad (8)$$

Точки  $E_1$  і  $E$  визначені як середини ребер  $DB$  і  $DC$ , отже  $E_1 = \frac{D+B}{2}$  та  $E = \frac{D+C}{2}$ . Точки  $D_1$  і  $B_1$  визначені як середини відрізків  $DE_1$  і  $E_1B$  відповідно.

Звідси:  $D_1 = \frac{D+E_1}{2} = (D + \frac{D+B}{2})/2 = \frac{3D+B}{4}$ ,  $B_1 = \frac{E_1+B}{2} = (\frac{D+B}{2} + B)/2 = \frac{D+3B}{4}$ .

Підставимо значення точок  $D_1$ ,  $E$  і  $B_1$  до рівняння (8):

$$K = \left[ \frac{3D+B}{4} \right] \cdot \bar{u}^2 + 2 \left[ \frac{D+C}{2} \right] \cdot u \cdot \bar{u} + \left[ \frac{D+3B}{4} \right] \cdot u^2. \quad (9)$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = D \left[ \frac{3\bar{u}^2}{4} + u\bar{u} + \frac{u^2}{4} \right] + Cui\bar{u} + B \left[ \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right]. \quad (10)$$

У симплексі  $AC_1B$  точки  $A_1$  і  $C_1$  визначимо як середини відрізків  $AB$  і  $AC$ , а отже  $A_1 = \frac{A+B}{2}$  і  $C_1 = \frac{A+C}{2}$ . Визначимо дугу параболи  $ANB$  як криву одного відношення [4] і задамо точковим рівнянням, підставив значення точок  $A_1$  і  $C_1$ .

$$N = A \cdot \bar{u}^2 + 2 \left[ \frac{A+C}{2} \right] \cdot u \cdot \bar{u} + B \cdot u^2. \quad (11)$$

Після перетворень отримаємо:

$$N = A\bar{u} + Cui\bar{u} + Bu^2. \quad (12)$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \bar{v}. \quad (13)$$

Підставимо рівняння (10) і (12) до рівняння (13) та після перетворень отримаємо:

$$M = A\bar{u}\bar{v} + B \left[ u^2\bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + Cui\bar{u} + D \left[ \frac{3u^2}{4} + u\bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v. \quad (14)$$

Представимо точкове рівняння (14) у параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A \bar{u}\bar{v} + x_B \left[ u^2\bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + x_C u\bar{u} + x_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u\bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v, \\ x_M &= y_A \bar{u}\bar{v} + y_B \left[ u^2\bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + y_C u\bar{u} + y_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u\bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v, \\ x_M &= z_A \bar{u}\bar{v} + z_B \left[ u^2\bar{v} + \left( \frac{3u^2}{4} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right) v \right] + z_C u\bar{u} + z_D \left[ \frac{3u^2}{4} + u\bar{u} + \frac{\bar{u}^2}{4} \right] v. \end{aligned} \quad (15)$$

Візуалізація роботи рівняння (14) в програмному пакеті Maple зображено на рис. 4.

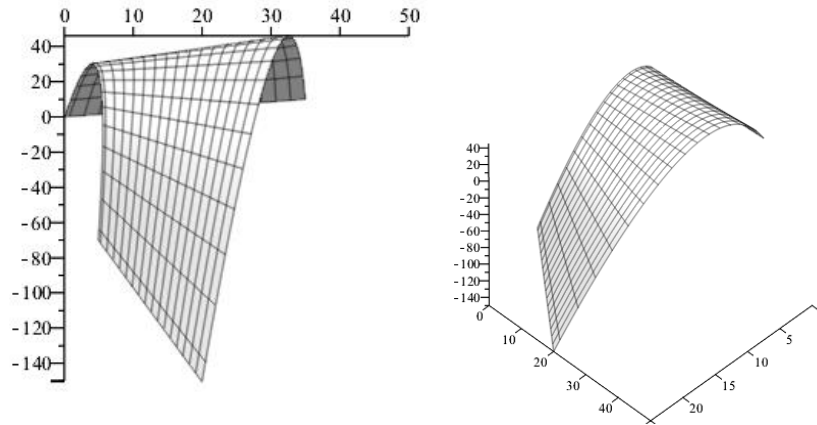


Рис. 4. Торсова поверхня із двома параболою, що лежать у площинах, які перетинаються, але з паралельними осями

**Висновки.** Побудовано геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються та сформовано їх аналітичний опис у БН-численні. Отримані точкові рівняння розширили інструментарій математичного апарату БН-числення та дозволяють розглядати прикладні задачі, що стосуються зазначених у статті типів торсових поверхонь. Зокрема, ці результати дозволяють використовувати у якості напрямних інші криві другого порядку. Зменшення кількості тригонометричних функцій в аналітичному описі та його обсягу дозволило зменшити розрахункову похибку та підвищити швидкість розрахунків.

Також важливо відмітити перспективні властивості програмного пакету Maple, що дозволяють візуалізувати результати роботи точкових рівнянь математичного апарату БН-числення.

**Список використаної літератури:**

1. Кривошاپко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 560 с.
2. Балюба И. Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01. Київ, 1995. 36 с.
3. Конопацький С. В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01: Мелітополь, 2012. 26 с.
4. Давиденко І. П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01: Донецьк, 2012. 169 с.
5. Несвідомін В. М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01.: Київ, 2008. 34 с.