УДК 519.872

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ MAPLE

Зінов’єва О. Г.[1], ст. викл. *e-mail: olha.zinovieva@tsatu.edu.ua*
Іванова А. В. [1] *e-mail: alina.vyunik.999@gmail.com*
[1]*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного*

Актуальність та постановка проблеми. Теорія систем масового обслуговування – область прикладної математики, що займається аналізом процесів в системах виробництва, обслуговування, управління, в яких однорідні події повторюються багато разів, наприклад, на підприємствах побутового обслуговування; в системах прийому, переробки і передачі інформації; автоматичних лініях виробництва та ін.

Для обчислювальних систем характерна робота в режимі розв’язання потоку випадкових задач, що надходять у випадкові моменти часу. Аналіз і синтез таких систем можливий методами теорії масового обслуговування.

Задача аналізу складається у визначенні кількісних показників функціонування систем масового обслуговування і залежності цих показників від параметрів вхідного потоку та структури самої системи масового обслуговування. Задача синтезу складається у визначенні структури систем масового обслуговування при заданих властивостях та обмеженнях на ресурси системи.

Ці задачі можуть бути вирішені як аналітичними методами, так і методами імітаційного моделювання. Обидва підходи до розрахунку обчислювальних систем, як систем масового обслуговування, потребують знання такого математичного апарату, як теорія масового обслуговування.

Моделювання систем масового обслуговування аналітичними методами потребує досить громіздких обчислень. Значну допомогу в цьому можуть надати потужні системи символьних, або аналітичних обчислень, серед яких одним з визнаних лідерів є система Maple, що забезпечує користувачеві зручне і інтелектуальне середовище для математичних досліджень.

Основні матеріали дослідження. В даній роботі наведено, як поєднати аналітичні підходи і візуальне комп'ютерне моделювання для вирішення складних математичних задач, що виникають при дослідженні систем масового обслуговування, за допомогою пакету символьної математики Maple.

Системи масового обслуговування - це такі системи, в які в випадкові моменти часу надходять заявки на обслуговування, при цьому заявки обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

Системи масового обслуговування ділять на два основних типи (класу): СМО з відмовами і СМО з очікуванням (чергою). У СМО з відмовами заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, отримує відмову, залишає СМО і в подальшому процесі обслуговування не бере. У СМО з очікуванням заявка, що прийшла в момент, коли всі канали зайняті, не йде, а поміщається в буфер для очікування на обслуговування.

Для систем з очікуванням можливо очікування в черзі будь-якого числа заявок, які не можуть бути обслужені відразу. Для систем з обмеженим числом місць для очікування очікувати може тільки число заявок, що не перевершує деякого фіксованого цілого числа N. Якщо заявка, що надходить в систему, застає чергу з N заявок, вона втрачається для системи. Для заявок, що стоять в черзі до обслуговуючих приладів, за допомогою деякої дисципліни обслуговування визначається, в якому порядку заявки вибираються з черги на обслуговування. Найбільш поширеними є такі дисципліни обслуговування:

FCFS (first come - first servered) або FIFO (first in - first out) - заявки обслуговуються в порядку надходження;

LCFS (last come - first servered) або LIFO (last in - first out) - інверсійний порядок обслуговування, при якому в першу чергу обслуговується заявка, що надійшла останньою;

PS (processor sharing) - поділу процесора, яка характеризується тим, що якщо в черзі системи знаходиться M заявок, то кожна з них обслуговується за одну секунду в плині часу 1 / M секунд (є різновиди цієї дисципліни, які нерівномірно розподіляють час обслуговування між заявками);

SIRO (service in random order) - чергова заявка вибирається з черги "навмання".

Задача аналізу системи масового обслуговування полягає у визначенні ряду показників її ефективності, які можна розділити на наступні групи:

- показники, що характеризують систему в цілому: число зайнятих каналів обслуговування, середнє число заявок, що обслуговуються в одиницю часу; середнє число заявок в черзі; середній час очікування обслуговування і т.д .;

- імовірнісні характеристики: ймовірність того, що заявка буде обслужена або отримає відмову в обслуговуванні, що всі прилади вільні (p_0) або певне число їх зайнято (p_k), ймовірність наявності черги і т.д .;

- економічні показники: вартість втрат, пов'язаних з догляду не обслужених з тих чи інших причин заявки з системи, економічний ефект, отриманий в результаті обслуговування заявки, і т.д.

В наш час теорію масового обслуговування використовують для визначення найважливіших системних характеристик технічних автоматизованих систем.

Характерною особливістю задач масового обслуговування є виникнення невідповідності між швидкістю надходження вимог і швидкістю обслуговування, в результаті чого або виявляються прилади, що простоюють, або утворюється черга на обслуговування.

Розглянемо задачу знаходження ефективності роботи багатоканальної системи масового обслуговування з обмеженою чергою типу M/M/n/m, де перші дві літери M позначають пуасонівський потік вимог з експоненціальним обслуговуванням, n – число каналів обслуговування, m – допустиме число вимог в системі. Багатоканальні системи масового обслуговування - це системи з паралельно включеними приладами обслуговування

Задана система M/M/4/7, тобто система з пуасонівським вхідним потоком вимог, з експоненціальним законом обслуговування з 4 каналами обслуговування, та припустимим числом вимог в буфері m=7. Вимоги надходять на вхід системи з інтенсивністю λ=1,23 вимоги за хвилину. Інтенсивність обслуговування μ дорівнює 0,678 вимог за хвилину. Необхідно розрахувати операційні характеристики системи.

Дана система є багатоканальною системою масового обслуговування з обмеженою чергою.

Граф станів системи представлений на рисунку 1.

На графі біля кожної стрілки проставлені відповідні інтенсивності потоків подій, λ - інтенсивність потоку надходження заявок, μ - інтенсивність потоку обслуговування

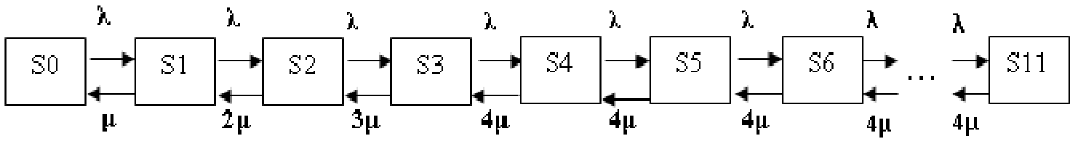

Рис.1. Граф станів системи М/М/4/7

Система може знаходитися в одному з 12 станів:
S0 – всі канали вільні,
S1 – 1 канал зайнятий,
S2 – 2 канали зайняті,
S3 – 3 канали зайняті,
S4 – 4 канали зайняті,
S5 - зайняті всі 4 канали, 1 вимога в черзі,
S6 – зайняті всі 4 канали, 2 вимоги в черзі,
…
S11 - зайняті всі 4 канали, всі 7 місць в черзі.
Показниками ефективності такої системи є:

1) граничні ймовірності станів (при $\frac{\rho}{n}<1$, якщо $\frac{\rho}{n}\geq 1$ черга росте до нескінченності):

$$p_0=\left(1+\frac{\rho^1}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{nn!}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1-\frac{\rho}{n}}\right)^{-1}; \qquad (1)$$

$$p_1=\rho\cdot p_0$$

$$p_n=\frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0\,,$$

$$p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0\,,$$

$$p_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0$$

де $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ - інтенсивність навантаження каналу;

λ - інтенсивність потоку надходження заявок;
μ - інтенсивність потоку обслуговування

2) ймовірність того, що замовлення виявиться в черзі:

$$P_{оч}=\sum_{i=0}^{m-1}p_{n+i}=\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m}{1-\frac{\rho}{n}}p_0; \qquad (2)$$

3) середнє число зайнятих каналів:

$$\bar{k}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho; \qquad (3)$$

4) середнє число замовлень в черзі:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \cdot \frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m+1-\frac{m}{n}\rho\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} p_0; \qquad (4)$$

5) середнє число замовлень в системі:

$$L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}_з. \qquad (5)$$

Запис команд Maple для розв'язання задачі буде мати наступний вигляд:

```
> n:=4;
```

n := 4

```
> m:=7;lambda:=3.52;
```

m := 7
lambda := 3.52

```
> mu:=0.678;
```

mu := .678

```
> rho:=lambda/mu;
```

rho := 5.191740413

```
> alpha:=rho/lambda;
```

α := 1.474926254

```
>p[0]:=1/(sum(rho^i/factorial(i),i=0..n)+rho^(n+1)/(n*factorial(n))*(1-(rho/n)^m)/(1-rho/n));
```

p[0] := .001316234458

```
> for i from 1 to (n+1) do p[i]:=rho^i*p[0]/factorial(i) od;
```

p[1] := .006833547629
p[2] := .01773900270
p[3] := .03069876574
p[4] := .03984500566
p[5] := .04137298522

```
> Pv:=rho^(n+m)/(n^m*factorial(n))*p[0];
```

Pv := .2472548054

```
> Pch:=rho^n/factorial(n)*(1-(rho/n)^m)/(1-rho/n)*p[0];
```

Pch := .6961576442

```
> Q:=1-Pv;
```

Q := .7527451946

```
> A:=lambda*Q;
```

A := 2.613545396

```
> K:=A/mu;
```

K := 3.854786720

```
>    Lch:=rho^(n+1)/(n*factorial(n))*(1-(rho/n)^m*(m+1-m/n*rho))/(1-rho/n)^2*p[0];
```

Lch := 4.694327048

```
> Tch:=Lch/lambda;
```

Tch := 1.333615639

```
> Lsyst:=Lch+K;
```

Lsyst := 8.549113768

```
> Tsyst:=Lsyst/lambda;
```

Tsyst := 2.310143388

За результатами розрахунків отримали наступні операційні характеристики системи:

Ймовірність відмови: Pv=0,24725.

Відносна пропускна спроможність: Q=0,7527.

Абсолютна пропускна спроможність: A=2,6135.

Ймовірність наявності черги: Pch=0,6962.

Середнє число вимог в системі: Lsyst=8,549.

Середній час перебування вимоги в системі: Tsyst=2,31.

Середня довжина черги: Lch=4,694.

Середній час перебування вимог в черзі: Tch=1,334.

Висновки. Запропоновано методику розв'язання задач теорії масового обслуговування за допомогою програмного пакету Maple. Застосування Maple дозволяє підвищити надійність аналітичних обчислень, дає можливість отримати практичні навики роботи з іншими програмними засобами, звільняє від громіздких обчислень та дозволяє сконцентрувати увагу не на алгоритмі обчислення, а безпосередньо на аналізі результатів моделювання.

Список використаних джерел:

1. Аладьев В. В. Основы программирования в Maple. Таллинн, 2006. 234 с.
2. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8. Москва.: Солон-Пресс, 2003. 176 с.
3. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва.: ИД «Вильямс», 2005. 902 с.