

УДК 514.18

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПРОГРАММНОГО
ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОБВОДОВ ПО
ЗАДАНЫМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ УСЛОВИЯМ**

Гавриленко Е.А., к.т.н., <https://orcid.org/0000-0003-4501-445X>
Холодняк Ю.В., к.т.н., <https://orcid.org/0000-0001-8966-9269>

Антонова Г.В., ст. викл. <https://orcid.org/0000-0001-9269-6356>
Чаплинский А.П., ст. викл. <https://orcid.org/0000-0001-9213-5452>

*Таврический государственный агротехнологический университет
имени Дмитрия Моторного*
e-mail: yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua

Аннотация - формирование одномерных обводов по заданным условиям – одна из наиболее востребованных задач геометрического моделирования. В работе предложен алгоритм и его программная реализация для моделирования одномерных обводов с монотонным изменением кривизны. Исходными данными для моделирования являются координаты узлов, порядок гладкости и закономерность изменения радиусов кривизны вдоль обвода. Параметрами управления формой обвода являются положения центров кривизны и нормалей к кривой, которые назначаются в исходных точках. Кривая моделируется по предварительно сформированной эволюте, которая представляет собой выпуклый обвод первого порядка гладкости. Эволюта монотонной кривой формируется с учетом следующих требований: эволюта является выпуклой кривой; нормали к кривой являются касательными к эволюте, которая ее определяет; длина эволюты равна разности радиусов кривизны в точках, ограничивающих соответствующий участок кривой.

Обвод формируется внутри области возможного расположения кривой, отвечающей задаче. Ограниченность диапазона решения позволяет контролировать отсутствие осцилляции и обеспечивать необходимые требования к характеристикам и гладкости обвода. Особенностью метода является многократное повторение расчетных алгоритмов, которое приводит к замене с заданной точностью исходного геометрического образа сопровождающей ломаной линией.

Программное обеспечение, разработанное на основе предложенных в работе алгоритмов, может быть использовано при моделировании линейных элементов каркаса поверхностей с повышенными динамическими качествами. Повышенные динамические свойства необходимы поверхностям, ограничивающим корпусные изделия авиа-, автомобиле-, судостроение, лопасти турбин, смесители, каналы двигателей внутреннего сгорания, трубопроводы, рабочие органы сельскохозяйственных машин.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, эволюта, эвольвента, монотонное изменение кривизны, нормаль, радиус кривизны, центр кривизны.

Постановка проблемы. Конструирование поверхностей с повышенными динамическими свойствами требует разработки методов геометрического моделирования, которые обеспечивают заданную точность, контроль дифференциально-геометрических характеристик, отсутствие осцилляций.

При оценке функциональных качеств изделия динамические свойства поверхности определяются характеристиками потока среды, который возникает в пограничном слое вдоль поверхности. Основным требованием является закономерный, устойчивый, регламентированный характер обтекания [1-3]. С геометрической точки зрения повышенные динамические свойства обеспечивают поверхности с закономерным, плавным изменением дифференциально-геометрических характеристик.

Заданный характер изменения дифференциально-геометрических характеристик поверхности можно обеспечить за счет характеристик кривых, входящих в определитель поверхности. К таким характеристикам относится второй порядок гладкости и монотонное изменение радиусов кривизны вдоль кривой.

Одномерные обводы можно моделировать по заданным условиям методами непрерывного (НГМ) и дискретного геометрического моделирования (ДГМ). Методы НГМ предусматривают получение на основе точечного ряда обвода, состоящего из участков алгебраических кривых, которые стыкуются в исходных точках с заданным порядком гладкости [4, 5]. Исходные данные (координаты точек, положения касательных и значения радиусов кривизны кривой в этих точках) определяют участок кривой. При этом обеспечить желаемый характер изменения характеристик кривой внутри участка сложно или невозможно.

Более широкие возможности для моделирования обводов по заданным условиям предоставляют методы ДГМ, учитывающие

внутреннюю геометрию кривой и позволяющие накладывать на решение любое количество дополнительных условий [6]. Однако ДГМ как направление прикладной геометрии возникло относительно недавно и методы, которые обеспечивают монотонное изменение кривизны разработаны недостаточно.

Анализ последних исследований. Среди методов ДГМ наиболее широкие возможности локального управления формой кривой при обеспечении граничных условий предоставляют методы вариативного дискретного геометрического моделирования (ВДГМ) [7-10]. Основным свойством методов ВДГМ является выбор решения внутри некоторого диапазона возможных значений. Наличие диапазона дает возможность локального моделирования и корректировки решения, позволяет учитывать дополнительные условия задачи. Ограниченность диапазона решения позволяет контролировать отсутствие осцилляции и обеспечивать необходимые требования к характеристикам и гладкости обвода. Особенностью методов является многократное повторение расчетных алгоритмов (последовательное сгущение), которое приводит к замене с заданной точностью исходного геометрического образа сопровождающей ломаной линией.

Методика, которая позволяет определить возможность обеспечения монотонного изменения кривизны (возрастания или убывания) вдоль дискретно представленной кривой (ДПК), разработана в работе [10]. Исходными данными для проведения анализа является положение узлов исходного точечного ряда.

Геометрическая схема формирования ДПК с закономерным изменением кривизны предложена в работе [9]. ДПК формируется на основе заранее сформированной дискретно представленной эволюты (ДПЭ). ДПЭ определяется положениями нормалей и центров кривизны, назначенных в исходных узлах, и условиями, которые на нее накладываются.

Задача определения области возможного расположения нормалей и центров кривизны в исходных точках ДПК решается в работе [7]. Областью расположения нормалей является сектор, ограниченный граничными положениями. Диапазоном расположения центров кривизны является отрезок, принадлежащий нормали. После назначения положений нормалей и центров кривизны вдоль исходного точечного ряда получается цепочка базисных треугольников, которые ограничены нормалью в исходных точках и хордами, соединяющими центры кривизны, назначенные на этих нормалях.

При моделировании монотонной кривой на основе эволюты необходимо обеспечить контроль следующих условий: порядок гладкости кривой, отсутствие осцилляции, заданную длину эволюты.

Кроме того, для достижения оптимального решения задачи необходимо обеспечить плавное изменение характеристик вдоль кривой. Аналитически обеспечить выполнение указанных требований сложно или невозможно. Поэтому решение поставленной задачи целесообразно выполнять с применением специализированного программного обеспечения.

Формулировка целей статьи. Целью исследования является программная реализация алгоритма, позволяющего сформировать на основе исходного точечного ряда кривую с монотонным изменением дифференциально-геометрических характеристик.

Основная часть. Монотонная кривая, заданная координатами точек, моделируется на основе алгоритма, который предусматривает предварительное формирование эволюты. Эволюта монотонной кривой должна соответствовать следующим требованиям [10]:

- эволюта является выпуклой кривой;
- нормали к кривой являются касательными к эволюте, которая ее определяет;
- длина эволюты равна разности радиусов кривизны в точках, ограничивающих соответствующий участок кривой.

Пусть исходный точечный ряд позволяет обеспечить монотонное возрастание радиусов кривизны вдоль ДПК [7]. Эволюта ДПК моделируется как выпуклый обвод первого порядка гладкости, не содержащий особых точек. Выполнение указанных условий обеспечивает второй порядок гладкости ДПК при монотонном изменении радиусов кривизны вдоль кривой.

Положение нормалей в исходных точках $\dots n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots$ назначаются внутри соответствующих диапазонов их возможного расположения. В результате получаем ломаную линию $\dots T_{i-1}, T_i, \dots$, которая определяет ДПЭ в первом приближении (рис. 1). Центры кривизны $\dots C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots$ являются точками, в которых эволюта касается указанной ломаной линии. Положения центров кривизны назначаются внутри соответствующих звеньев ломаной линии (C_i принадлежит отрезку $[T_{i-1}, T_i]$). В результате последовательных сгущений количество звеньев указанной ломаной линии увеличивается и в пределе получим обводящую линию нормалей, которая является эволютой кривой.

Для того, чтобы сформировать ДПЭ, которая определяет монотонную кривую, соответствующую условиям задачи, необходимо решить следующее:

- определить положение нормалей и центров кривизны в исходных точках ДПК и получить цепочку базисных треугольников, на основе которой возможно сформировать обвод первого порядка гладкости заданной длины;

- внутри каждого базисного треугольника сформировать участок эволюты $C_{i-1}...C_i$, которая касательна к n_i и n_{i+1} в точках C_i и C_{i+1} . Длина участка эволюты должна равняться $|i+1, C_i| - |i, C_i|$ (рис. 1).

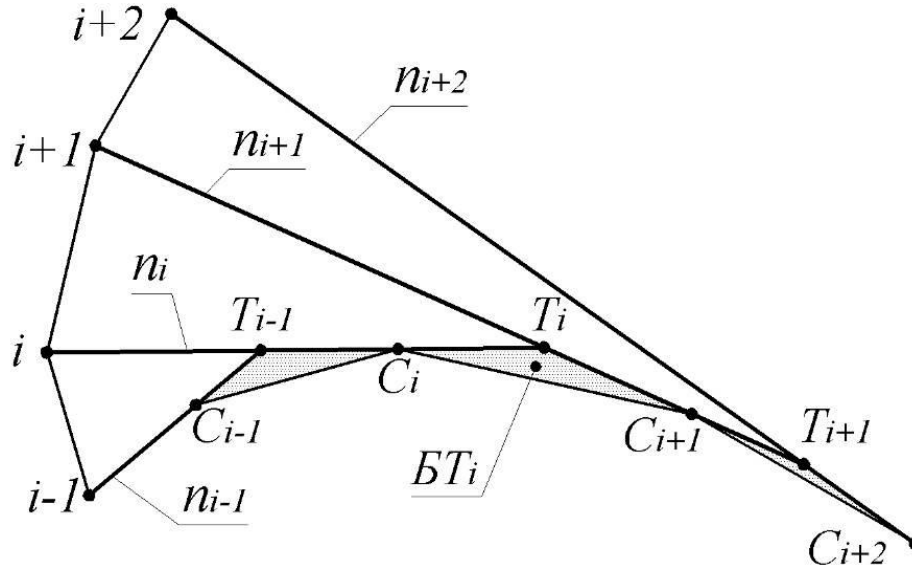


Рис. 1. Исходная цепочка базисных треугольников

Для решения поставленных задач разработано специализированное программное обеспечение, реализующее алгоритмы определения положений центров кривизны в исходных точках ДПК и центров кривизны, которые соответствуют точкам сгущения. Рассмотрим алгоритм определения положений центров кривизны ДПК в исходных точках.

Предварительно ДПЭ формируется как ломаная линия C'_{i-1} , C'_i , C'_i , C'_{i+1} (рис. 2) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|i+1, C'_{i+1}| = |C'_i, C'_{i+1}| + |C'_i, i|, \quad (1)$$

$$|C'_{i-1}, T_{i-1}| = |T_{i-1}, C_i|, \quad |C'_i, T_i| = |T_i, C'_{i+1}|. \quad (2)$$

Полученная ДПЭ определяет эвольвенту как коробовую линию окружностей, радиусы которых монотонно возрастают вдоль кривой. Выполнение условий (1) и (2) однозначно определяет положение точек C'_{i-1} , C'_i , C'_i , C'_{i+1} при зафиксированных положениях нормалей n_{i-1} , n_i , n_{i+1} .

Необходимым условием существования решения задачи является расположение нормалей, при котором выполняется условие $|T_{i-1}, T_i| > |T_{i-1}, C_i| + |C'_i, T_i|$.

Назначение центра кривизны C_i внутри отрезка $[C'_i, C'_i]$ является необходимым условием формирования эволюты как окружности первого порядка гладкости заданной длины.

Выполнение указанных условий контролируется с помощью следующего коэффициента:

$$e_i = \frac{2|C'_i; C'_i|}{|C'_{i-1}; C'_i| + |C'_i; C'_{i+1}|}, \quad (3)$$

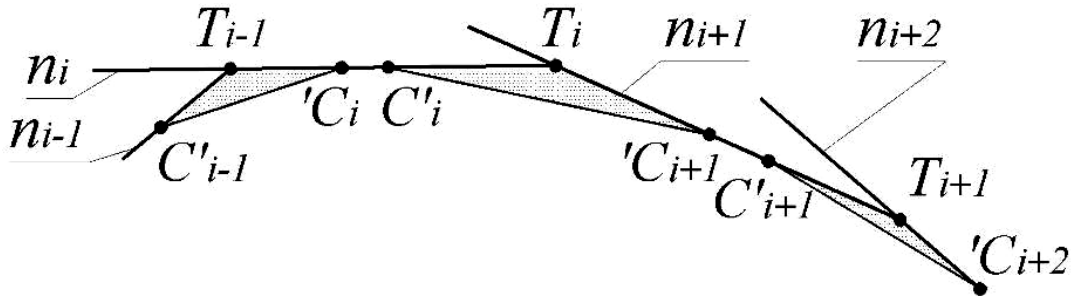


Рис. 2. Определение положений центров кривизны в исходных точках

Обязательным условием существования решения является положительное значение введенного коэффициента. Кроме того с помощью контроля значений e_i можно обеспечить оптимальное решение задачи. Оптимальным решением будем считать такую ДПЭ, которая обеспечивает плавность изменения радиусов кривизны вдоль эвольвенты. Область оптимальных решений определяется выполнением условия $e_i = l \pm \varepsilon$, где ε - заданное значение отклонения от оптимального значения.

Достижения оптимальных значений вдоль всего точечного ряда выполняется в автоматическом режиме. Для этого выполняются следующие действия.

1) Вдоль точечного ряда назначаются положения n_i по центру диапазонов их возможного расположения.

2) Рассчитываются значения e_i и определяется e_i^{max} - максимальное значение из полученных.

3) Положение n_i , соответствующее e_i^{max} , корректируется с целью обеспечения его приближения к оптимальному. Положение n_i меняется с заданным шагом с контролем значения e_i на каждом шаге.

4) При изменении положения n_i изменяются значения e_{i-1} , e_i и e_{i+1} . На каждом шаге перечисленные значения e_{i-1} , e_i и e_{i+1} сравниваются со значениями на других участках. Если e_i становится максимальным на другом участке, то корректируется положение соответствующей нормали.

После обеспечения на всех участках расположения значений коэффициента e_i внутри области оптимальных решений положения n_i

сформированы. Положения назначаются по центру соответствующих отрезков $|C_i, C'_{i}|$.

Таким образом, получено положение нормалей и центров кривизны в исходных точках ДПК, которые определяют цепочку базисных треугольников. Полученная цепочка базисных треугольников определяет исходную ДПЭ как монотонную кривую линию.

На следующем этапе внутри каждого базисного треугольника формируется участок эволюты кривой в виде точечного ряда, состоящего из любого количества центров кривизны ДПК. Рассмотрим алгоритм определения положения центров кривизны, которые соответствуют точкам сгущения (C_{c2}) и точек сгущения (i_{c2}).

Положение нормали сгущения (n_{c2}) назначается параллельно стороне базисного треугольника $[C_i, C_{i+1}]$ на расстоянии h от нее (рис. 3). Точки пересечения n_{c2} с нормальми n_i и n_{i+1} обозначим как T_1 и T_2 соответственно.

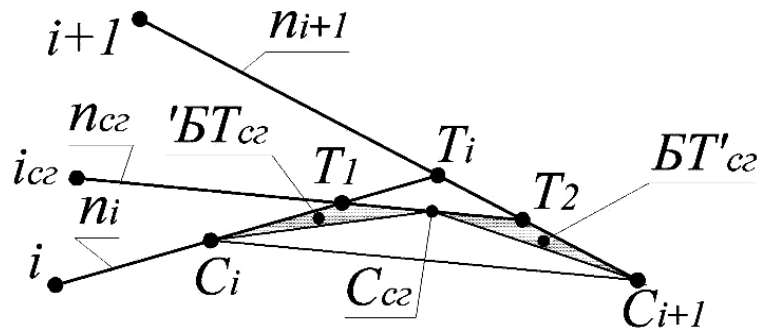


Рис. 3. Формирование участка эволюты ДПК

Диапазон расположения точки сгущения i_{c2} определяется на нормали n_{c2} исходя из назначенного положения центра кривизны C_{c2} . Этот диапазон определяется максимальным и минимальным значениями, которые может принимать радиус кривизны ДПК в точке сгущения:

$$R_{c2}^{min} \leq R_{c2} \leq R_{c2}^{max}. \quad (4)$$

Расположение эволюты ДПК в пределах $'BT_{c2}$ и BT'_{c2} означает:

$$\begin{cases} |C_i, C_{c2}| \leq R_{c2} - R_i \leq |C_i, T_1| + |T_1, C_{c2}|; \\ |C_{i+1}, C_{c2}| \leq R_{i+1} - R_{c2} \leq |C_{c2}, T_2| + |T_2, C_{i+1}|. \end{cases} \quad (5)$$

Исходя из (5) в качестве нижней границы диапазона (4) R_{c2}^{min} назначается большая из величин $R_i + |C_i, C_{c2}|$ или

$R_{i+1} - |C_{c2}, T_2| - |T_2, C_{i+1}|$. Верхняя граница диапазона R_{c2}^{max} равна меньшей из величин $R_i + |C_i, T_1| + |T_1, C_{c2}|$ или $R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{c2}|$.

Определим соотношение величин, из которых выбираются значения R_{c2}^{min} и R_{c2}^{max} .

Если центр кривизны занимает крайнее положение $C_{c2} \equiv C_2$, то величины $R_i + |C_i, C_{c2}|$ и $R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{c2}|$ равны. Очевидно, что тогда $|C_{i+1}, C_{c2}| < |C_{i+1}, T_2| + |T_2, C_{c2}|$ (рис. 3), а значит и

$$R_i + |C_i, C_{c2}| > R_{i+1} - (|C_{i+1}, T_2| + |T_2, C_{c2}|). \quad (6)$$

При перемещении C_{c2} от C_2 в направлении C_1 расстояние $|T_2, C_{c2}|$ увеличивается быстрее, чем $|C_i, C_{c2}|$. Это означает, что соотношение (6) сохраняется, а значение $R_{c2}^{min} = R_i + |C_i, C_{c2}|$.

Аналогичные рассуждения доказывают, что $R_{c2}^{max} = R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{c2}|$.

Исходя из соотношений $|C_i, C_{c2}| < |C_i, C_2|$, $|C_{i+1}, C_{c2}| > |C_{i+1}, C_2|$ и $R_i + |C_i, C_{c2}| = R_{i+1} - |C_{i+1}, C_2|$ можно утверждать, что диапазон (4) существует при условии назначения нормали n_{c2} и центра кривизны C_{c2} в пределах диапазонов их возможного расположения.

Значение радиуса кривизны в точке сгущения назначается равным $R_{c2} = 0,5(R_{c2}^{min} + R_{c2}^{max})$. Положение точки сгущения определяем отложив от C_{c2} отрезок, длина которого равна R_{c2} .

В результате последовательных сгущений количество звеньев ДПЭ увеличивается, в результате чего получается точечный ряд, который с заданной точностью представляет эволюта кривой.

В процессе сгущения существование решения задачи и плавность изменения характеристик вдоль участка кривой контролируется с помощью коэффициента, аналогичного (3).

Выводы. В работе предложен алгоритм и разработано программное обеспечение для моделирования кривой второго порядка гладкости с монотонным изменением дифференциально-геометрических характеристик. Граничными условиями при моделировании кривой являются назначенные положения нормалей и центров кривизны исходной ДПК. Кривая моделируется на основе заранее сформированной эволюты. Предложены критерии оптимальности решения задачи. В процессе дальнейших исследований планируется разработать алгоритмы и программное обеспечение для моделирования ДПК на участках, содержащие особые точки (точки перемены возрастания и убывания радиусов кривизны, точки изменения выпуклости и вогнутости кривой). Это позволит моделировать кривую с закономерным изменением дифференциально-геометрических характеристик на основе произвольного точечного ряда.

Література:

1. Горлова К.О., Зуб А.М., Мовчан С.І., Дереза О.О. Моделювання елементів систем оборотного водопостачання для об'єктів інженерної інфраструктури промислового сектору країни. Матеріали всеукраїнської наукової конференції молодих учених і науково-педагогічних працівників. Умань – 2020 р. С. 131-134.
2. Мацулевич О.Є., Щербина В.М., Залевський С.В. Автоматизація процесу геометричного моделювання робочих поверхонь насадок для фонтанів. Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету: електрон. наук. фах. видання. ТДАТУ. Мелітополь, 2018. Вип. 8, т. 1. С. 55-68.
3. Холодняк Ю.В., Гавриленко Є.А., Івженко О.В., Найдич А.В. Технологія моделювання поверхонь складних технічних виробів за заданими умовами. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. Видання. Мелітополь: ТДАТУ імені Дмитра Моторного, 2019. Вип. 19, т. 2. – С. 257-263.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. 2008. 636 с.
5. Chernousova E., Golubev Y., Krymova E. Ordered smoothers with exponential weighting. Electronic Journal of Statistics. 2013. Vol. 7. P. 2395–2419.
6. Найдич В.М. Дискретна інтерполяція. Мелітополь: Люкс. 2008. 250 с.
7. Gavrilenko E.A., Kholodnyak Yu.V. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics. Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). Omsk. 2014. P. 1-5.
8. Щербина В.М., Мацулевич О.Є., Коломієць С.М. Спосіб побудови дотичних у вузлах спіралеподібних дискретно представлених кривих із використанням спеціальної функції. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання. Мелітополь. ТДАТУ імені Дмитра Моторного. 2019. Вип. 19, т. 2. С. 278-287.
9. Холодняк Ю.В., Гавриленко Е.А., Дубинина А.В. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям. Сучасні проблеми моделювання: наукове фахове видання. Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького. Мелітополь, 2017. Вип. 9. С. 162-166.
10. Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Балюба И.Г., Пахаренко В.А. Определение области возможного расположения пространственной кривой с заданными характеристиками. Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання. Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького. Мелітополь, 2019. Вип. 14. С. 72-78.

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ОБВОДІВ ЗА ЗАДАНИМИ ГЕОМЕТРИЧНИМИ УМОВАМИ

Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк, Г.В. Антонова, А.П. Чаплінський

Анотація - формування одновимірних обводів за заданими умовами - одна з найбільш затребуваних завдань геометричного моделювання. В роботі запропонований алгоритм і його програмна реалізація для моделювання одновимірних обводів з монотонною зміною кривини. Вихідними даними для моделювання є координати вузлів, порядок гладкості і закономірність зміни радіусів кривини уздовж обводу. Параметрами управління формою обводу є положення центрів кривини і нормалей до кривої, які призначаються в початкових точках. Крива моделюється на основі попередньо сформованої еволюти, яка представляє собою опуклий обвід першого порядку гладкості. Еволюта монотонної кривої формується з урахуванням наступних вимог: еволюта є опуклою кривою; нормалі до кривої є дотичними до еволюти, яка її визначає; довжина еволюти дорівнює різниці радіусів кривини в точках, що обмежують відповідну ділянку кривої.

Обвід формується всередині області можливого розташування кривої, що відповідає задачі. Обмеженість діапазону рішення дозволяє контролювати відсутність осциляцій і забезпечувати необхідні вимоги до характеристик і гладкості обводу. Особливістю методу є багаторазове повторення розрахункових алгоритмів, яке призводить до заміни із заданою точністю вихідного геометричного образу супроводжуючою ламаною лінією

Програмне забезпечення, розроблене на основі запропонованих в роботі алгоритмів, може бути використано при моделюванні лінійних елементів каркасу поверхонь з підвищеними динамічними якостями. Підвищені динамічні властивості необхідні поверхням, які обмежують корпусні вироби авіа-, автомобіле-, суднобудування, лопати турбін, змішувачі, канали двигунів внутрішнього згоряння, трубопроводи, робочі органи сільськогосподарських машин.

Ключові слова: дискретно представлена крива, еволюта, евольвента, монотонна зміна кривини, нормаль, радіус кривини, центр кривини.

DEVELOPMENT OF AN ALGORITHM FOR SOFTWARE FOR FORMING CONTOURS ACCORDING TO THE GIVEN GEOMETRIC CONDITIONS

E. Gavrilenko, Yu. Kholodnyak, H. Antonova A. Chaplinskyi

Summary

The formation of one-dimensional contours according to specified conditions is one of the most demanded tasks of geometric modeling. The paper proposes an algorithm and its software implementation for modeling one-dimensional contours with a monotonic change of curvature. The initial data for modeling are the coordinates of the nodes, the order of smoothness and the regularity of changes in the radii of curvature along the path. The shape control options for the path are the positions of the centers of curvature and curve normals, which are assigned at the origin. The curve is modeled according to a previously formed evolve, which is a convex outline of the first order of smoothness. The evolution of a monotone curve is formed taking into account the following requirements: the evolution is a convex curve; the normals to the curve are tangent to the evolution that defines it; the length of the evolute is equal to the difference between the radii of curvature at the points bounding the corresponding section of the curve.

The contour is formed within the area of possible location of the curve corresponding to the task. The limited range of the solution allows you to control the absence of oscillations and provide the necessary requirements for the characteristics and smoothness of the bypass. A feature of the method is the multiple repetition of the computational algorithms, which leads to the replacement with a given accuracy of the original geometric image by the accompanying broken line

The software developed on the basis of the algorithms proposed in the work can be used to simulate linear elements of the frame of surfaces with increased dynamic qualities. Increased dynamic properties are required for surfaces limiting body products for aircraft, automobile, shipbuilding, turbine shovels, mixers, channels of internal combustion engines, pipelines, working bodies of agricultural machines.

Keywords: discrete represented curve, evolute, evolvent, monotonous change of curvature, normal, radius of curvature, center of curvature.