

УДК 631.354.2.028

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ТРАКТОРА ПРИ АГРЕГАТУВАННІ ЗЕРНОЗБИРАЛЬНОГО АГРЕГАТУ

Леженкін О.М., д.т.н.,⁽¹⁾ <https://orcid.org/0000-0003-2822-8173>
Рубцов М.О., к.т.н.,⁽²⁾ <https://orcid.org/0000-0003-1916-3602>
Галько С.В., к.т.н.,⁽¹⁾ <https://orcid.org/0000-0001-7991-0311>
Михайленко О.Ю., інж.⁽¹⁾ <https://orcid.org/0000-0001-7587-4544>

⁽¹⁾ Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного.

⁽²⁾ Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького.

e-mail: oleksandr.lezhenkin@tsatu.edu.ua

Анотація. Стаття присвячена розгляду руху колісного трактора, який агрегує збиральний агрегат обчесуючого типу. Дослідження проводилися в 2 етапи. На першому етапі було складено диференціальні рівняння Лагранжа другого роду в узагальнених координатах. Оскільки досліджувані змінні є незалежними, то перше лінійне диференціальне рівняння виявилось однорідним, а друге неоднорідним. Тому при розв'язанні були застосовані відповідні міркування в залежності від типу диференціального рівняння. В обох випадках склалися характеристичні рівняння, які представляли собою алгебраїчні рівняння третього степеня. Перше вирішувалося по загальній теорії за формулами Кардано, а друге мало спрощений вигляд і після винесення загального множника зводилося до квадратного рівняння. Розв'язок диференціальних рівнянь записувався в залежності від виду коренів характеристичних рівнянь, які в свою чергу залежать від експериментальних даних.

Отримані в результаті досліджень залежності дають можливість аналізу і при подальшому моделюванні для виявлення режиму стійкого руху трактора.

Ключові слова: трактор, зернозбиральний агрегат, диференціальні рівняння, формули Кардано.

Постановка проблеми. Як відомо найбільш ефективним способом збирання зернових є спосіб обчисування рослин на кореню, основу якого було закладено у роботах професора Шабанова П.А.

Але ж ці роботи були спрямовані головним чином на розробку конструкції та обґрунтування параметрів і режимів обчисувальних пристроїв. Роботи ж на стійкість руху зернозбиральних агрегатів не були в достатній мірі розглянуті. Тому виникає проблема дослідження динаміки руху зернозбиральних агрегатів.

Аналіз останніх досліджень.

Теоретичні основи стійкості руху динамічних систем вперше розглянуті в роботі Ляпунова А.М. [1]. Продовження робіт Ляпунова у галузі стійкості руху дістало у роботах Малкіна І.Г. та Меркіна Д.Р. [2, 3].

Стосовно сільськогосподарського виробництва питання стійкості руху розглянуті на прикладі роботи культиваторного агрегату академіком Василенко П.М. [4, 5]. Розгляд питань динаміки сільськогосподарських машин та агрегатів та стійкості їх руху продовжено у роботах Гячева Л.В. [6, 7], але для трьох ланкових агрегатів не було розглянуто у відповідній мірі. Спроби розглядати ці питання загалом дуже ускладнювали задачу. Тому виникла необхідність розглядати стійкість руху кожної ланки агрегату окремо. Це було розглянуто на прикладі робіт [9-11]. За основу був взятий принцип теореми Гурвіца, який розглядає на підставі складання нерівностей розв'язок характеристичного рівняння. Але такий підхід не дає можливості отримати точний результат при моделюванні. Тому спроба вирішити проблему, яка виникла є актуальною.

Формування цілей статті. (постановка задачі). Скласти диференціальні рівняння руху трактора і розв'язати їх аналітично методами диференціальних рівнянь.

Основна частина. Для спрощення аналізу стійкості руху агрегату, а також виявлення області припустимих значень факторів, що впливають на стійку роботу збирального агрегату, розглянемо рух трактора, збиральної машини та візка-причепа окремо, замінивши при цьому в'язі їх реакціями.

На першому етапі розглянемо рух трактора. Нехай трактор рухається по полю зі швидкістю $V_0 = \text{const}$. У відносному русі трактор робить плоско-паралельний рух із двома ступенями вільності. На трактор діють наступні сили та моменти сил (рис. 1) [8].

\bar{T}_A, \bar{T}_B – сили пружності шин передніх і задніх коліс трактора;

M_A, M_B – моменти сил пружності передніх і задніх коліс трактора;

\bar{S}_A – сила опору передніх коліс трактора;

\bar{F}_B – рушійна сила трактора;

\bar{R}_{C_i} – реакція в'язі зі збиральною машиною.

Для складання диференціальних рівнянь руху трактора

використаємо рівняння Лагранжа II роду в узагальнених координатах [11].

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_{s_1}} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_{s_1}} = Q_2. \end{cases} \quad (1)$$

Кінетична енергія трактора у відносному русі визначається із співвідношення:

$$T = \frac{1}{2} \left(I_{s_1} (\dot{\varphi}'_1)^2 + m_{mp} (\dot{x}'_{s_1})^2 \right). \quad (2)$$

Знаходимо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальнених координатах і швидкостям:

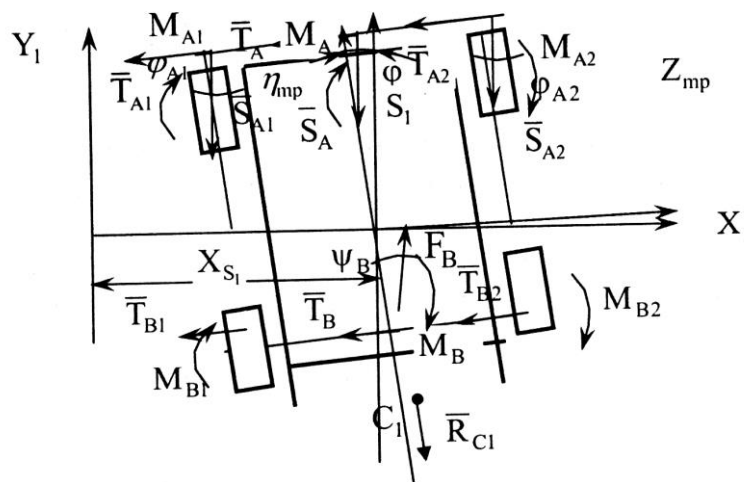


Рис. 1. Схема сил і моментів сил, що діють на трактор

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'_1} = I_{s_1} \dot{\varphi}'_1; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_{s_1}} = m_{mp} \dot{x}'_{s_1}; & \frac{\partial T}{\partial x_{s_1}} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Диференціюємо за часом вираз (3):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'_1} \right] = I_{s_1} \ddot{\varphi}'_1, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_{s_1}} \right] = m_{mp} \ddot{x}'_{s_1}. \quad (4)$$

Підставимо вираження (3) і (4) у рівняння (1)

$$\begin{cases} I_{s_1} \ddot{\varphi}'_1 = Q_1; \\ m_{mp} \ddot{x}'_{s_1} = Q_2. \end{cases} \quad (5)$$

Визначаємо узагальнені сили Q_1 і Q_2 для чого знаходимо суми елементарних робіт:

$$\begin{aligned}
\sum \delta A_{\varphi_1} &= \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_A) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{T}_B) + \delta A_{\varphi_1}(M_A) + \delta A_{\varphi_1}(M_B) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{S}_A) + \\
&+ \delta A_{\varphi_1}(\bar{F}_B) + \delta A_{\varphi_1}(\bar{R}_{C_1}) = T_A \cdot h_1 \cdot \delta \varphi_1 - T_B \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 - M_A \cdot \delta \varphi_1 - \\
&- M_B \cdot \delta \varphi_1 + F_B \cdot \psi_B \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 + R_{C_1} \sin \Theta \cdot h_2 \cdot \delta \varphi_1 + S_A \cdot \psi_A \cdot \delta \varphi_1 \cdot h_1; \\
\sum \delta A_{x_{S_1}} &= \delta A_{x_{S_1}}(\bar{T}_A) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{T}_B) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{S}_A) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{F}_B) + \delta A_{x_{S_1}}(\bar{R}_{C_1}) = (6) \\
&= -T_A \cdot \delta x_{S_1} - T_B \cdot \delta x_{S_1} - S_A \cdot \psi_A \cdot \delta x_{S_1} + F_B \cdot \psi_B \cdot \delta x_{S_1} - R_{C_1} \cdot \sin \Theta \cdot \delta x_{S_1}; \\
Q_1 &= T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + F_B \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \sin \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \\
Q_2 &= -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + F_B \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \sin \Theta,
\end{aligned}$$

де Θ – кут між віссю в і вектором \bar{R}_{C_1} , для спрощення подальшого аналізу стійкості руху прийmemo $R_{C_1} \sin(\Theta) = R_{C_1} \cdot \Theta = \text{const}$.

Виходячи з того, що $\bar{F}_B = \bar{S}_A + \bar{R}_{C_1}$, узагальнені сили Q_1 і Q_2 приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + S_A \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot \psi_B \cdot h_2 + \\
&+ R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \tag{7}
\end{aligned}$$

$$Q_2 = -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + S_A \cdot \psi_B + R_{C_1} \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \Theta.$$

Підставляємо значення узагальнених сил (7) у рівняння (5)

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \varphi_1'' &= T_A \cdot h_1 - T_B \cdot h_2 - M_A - M_B + S_A \cdot \psi_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot \psi_B \cdot h_2 + \\
&+ R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot \psi_A \cdot h_1; \tag{8}
\end{aligned}$$

$$m_{mp} \cdot x_{S_1}'' = -T_A - T_B - S_A \cdot \psi_A + S_A \cdot \psi_B + R_{C_1} \cdot \psi_B - R_{C_1} \cdot \Theta.$$

З огляду на сили деформацій шин, кути закручування шин, а також моменти сил деформацій шин рівняння (8) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \varphi_1'' &= -C_A \cdot h_1 \cdot \Delta_A + C_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + f_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + f_B \cdot k_B \cdot \Delta_B + \\
&+ S_A \cdot k_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 \cdot \Delta_B + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2 + S_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + \\
&+ R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B \cdot \Delta_B; \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{mp} \cdot x_{S_1}'' &= C_A \cdot \Delta_A + C_B \cdot \Delta_B - S_A \cdot k_A \cdot \Delta_A + S_A \cdot k_B \cdot \Delta_B + \\
&+ R_{C_1} \cdot k_B \cdot \Delta_B - R_{C_1} \cdot \Theta.
\end{aligned}$$

Перетворимо отримані рівняння (9):

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \varphi_1'' &= \Delta_A \cdot (-C_A \cdot h_1 + f_A \cdot k_A + S_A \cdot k_A) + \Delta_B (C_B \cdot h_2 + f_B \cdot k_B + \\
&+ S_A \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B) + R_{C_1} \cdot \Theta \cdot h_2; \tag{10}
\end{aligned}$$

$$m_{mp} \cdot x_{S_1}'' = \Delta_A (C_A - S_A \cdot k_A) + \Delta_B (C_B + S_A \cdot k_B + R_{C_1} \cdot k_B) + R_{C_1} \cdot \Theta.$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
A &= -C_A \cdot h_1 + f_A \cdot k_A + S_A \cdot k_A; \\
B &= C_B \cdot h_2 + f_B \cdot k_B + S_A \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot k_B \cdot h_2 + R_{C_1} \cdot h_2 \cdot k_B; \\
C &= C_A - S_A \cdot k_A; \\
D &= C_B + S_A \cdot k_B + R_{C_1} \cdot k_B; \\
E &= R_{C_1} \cdot \Theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

В результаті матимемо:

$$\begin{aligned}
I_{S_1} \varphi_1'' &= \Delta_A \cdot A + \Delta_B \cdot B + E \cdot h_2; \\
m_{mp} \cdot x_{S_1}'' &= \Delta_A \cdot C + \Delta_B \cdot D + E.
\end{aligned} \tag{12}$$

Замінімо ліві частини рівнянь (12) змінними $f_1(t)$ і $f_2(t)$.

Тоді система рівнянь (12) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \Delta_A \cdot A + \Delta_B \cdot B + E \cdot h_2; \\
f_2(t) &= \Delta_A \cdot C + \Delta_B \cdot D + E.
\end{aligned} \tag{13}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (13) відносно Δ_A і Δ_B :

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= \frac{I_{S_1} \varphi_1'' D - m_{mp} x_{S_1}'' B + E(B - Dh_2)}{AD - CB}; \\
\Delta_B &= \frac{I_{S_1} \varphi_1'' C - m_{mp} x_{S_1}'' A + E(A - Ch_2)}{BC - AD}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Диференціюємо за часом вираз (14):

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta_A}{dt} &= \frac{I_{S_1} \varphi_1''' D - m_{mp} x_{S_1}''' B}{AD - CB}; \\
\frac{d\Delta_B}{dt} &= \frac{I_{S_1} \varphi_1''' C - m_{mp} x_{S_1}''' A}{BC - AD}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Складемо диференціальні рівняння деформацій шин коліс трактора, для чого використаємо векторні рівняння швидкостей центрів еквівалентних коліс:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_A &= \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{AS_1}, \\
\bar{V}_B &= \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{BS_1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

По модулю $V_{S_1} = x'_{S_1}$, $V_{AS_1} = h_1 \varphi_1'$, $V_{BS_1} = h_2 \varphi_1'$.

З іншого боку, швидкість центра кожного колеса дорівнює сумі двох векторів: швидкості поперечної деформації \bar{V}_Δ та швидкості переміщення відбитка шини по опорній поверхні \bar{V}_ω .

Отже, для швидкостей \bar{V}_A і \bar{V}_B одержимо:

$$\begin{cases} \bar{V}_A = \bar{V}_{\Delta A} + \bar{V}_{\omega A}; \\ \bar{V}_B = \bar{V}_{\Delta B} + \bar{V}_{\omega B}. \end{cases} \tag{17}$$

З рівностей (16) і (17) випливає:

$$\begin{cases} \bar{V}_{\Delta A} + \bar{V}_{\omega A} = \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{AS_1} \\ \bar{V}_{\Delta B} + \bar{V}_{\omega B} = \bar{V}_0 + \bar{V}_{S_1} + \bar{V}_{BS_1} \end{cases} \quad (18)$$

Зобразимо векторні рівняння (18) графічно (рис. 2).

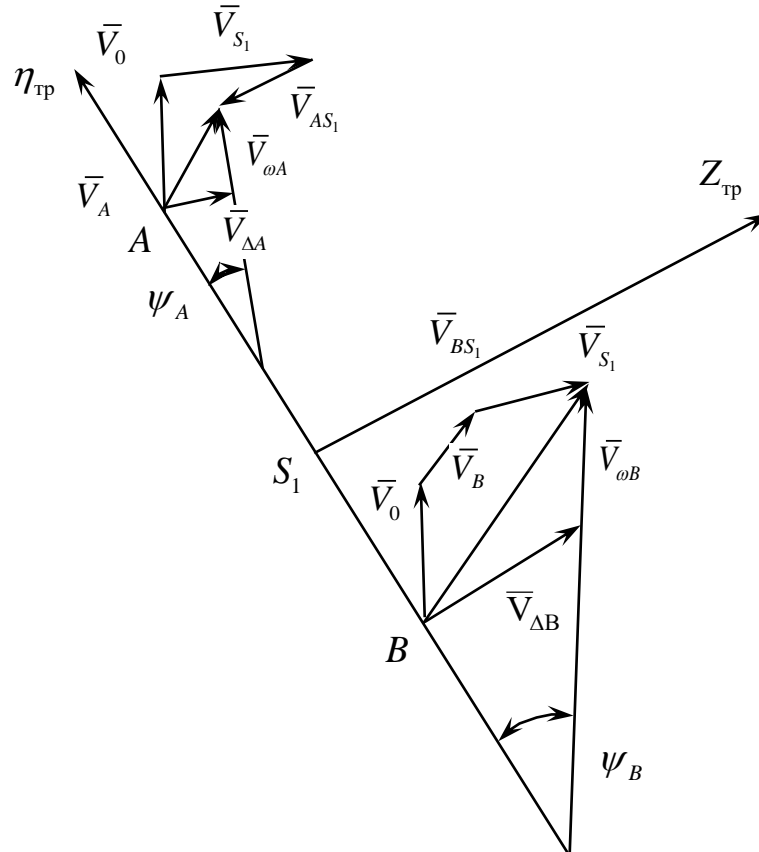


Рис. 2. Графічне визначення швидкостей центрів А і В «еквівалентних» коліс

Спроектуємо векторні рівняння (18) на осі $Z_{тр}$ і $\eta_{тр}$:

$$\begin{aligned} V_{\Delta A} + V_{\omega A} \cdot \sin \psi_A &= V_0 \sin \varphi_1 + V_{S_1} \cos \varphi_1 - V_{AS_1}; \\ V_{\Delta B} + V_{\omega B} \cdot \sin \psi_B &= V_0 \sin \varphi_1 + V_{S_1} \cos \varphi_1 + V_{BS_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

на вісь $\eta_{тр}$:

$$V_{\omega A} \cdot \cos \psi_A = V_0 \cos \varphi_1 - V_{S_1} \sin \varphi_1; \quad V_{\omega B} \cdot \cos \psi_B = V_0 \cos \varphi_1 - V_{S_1} \sin \varphi_1. \quad (20)$$

З огляду на те, що кути φ_1 , ψ_A , ψ_B – малі кути, можемо рівняння (19) і (20) представити у вигляді:

$$\begin{aligned} V_{\Delta A} + V_{\omega A} \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} \varphi_1 - V_{AS_1}; \\ V_{\Delta B} + V_{\omega B} \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} + V_{BS_1}; \\ V_{\omega A} &= V_0 - V_{S_1} \varphi_1; \quad V_{\omega B} = V_0 - V_{S_1} \varphi_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Через те, що V_{S_1} й φ_1 малі величини, їх добутком можна зневажити, тоді:

$$V_{\omega A} \approx V_{\omega B} \approx V_0. \quad (22)$$

Швидкість поперечної деформації шин передніх $V_{\Delta A}$ і задніх $V_{\Delta B}$ коліс трактора можна визначити зі співвідношень:

$$\left\{ \begin{aligned} V_{\Delta A} &= \frac{d\Delta_A}{dt}; \\ V_{\Delta B} &= \frac{d\Delta_B}{dt}. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Підставимо в перше та друге рівняння (21) значення швидкості поперечної деформації шин передніх і задніх коліс трактора:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_A}{dt} + V_{\omega A} \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} - V_{AS_1}; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_{\omega B} \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} - V_{BS_1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Так як $V_{\omega A} \approx V_{\omega B} \approx V_0$, то рівняння (24) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} - V_{AS_1}; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + V_{S_1} + V_{BS_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Підставимо чисельні значення швидкостей \bar{V}_{S_1} , \bar{V}_{AS_1} і \bar{V}_{BS_1} в рівняння (25):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot \psi_A &= V_0 \varphi_1 + x'_{S_1} - \varphi'_1 h_1; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot \psi_B &= V_0 \varphi_1 + x'_{S_1} + \varphi'_1 h_2. \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Кути закручування шин передніх ψ_A й задніх ψ_B коліс визначаємо із залежностей:

$$\psi_A = k_A \cdot \Delta_A; \quad \psi_B = k_B \cdot \Delta_B \quad (27)$$

Тоді диференціальні рівняння (5.26) приймуть вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Delta_A}{dt} + V_0 \cdot k_A \cdot \Delta_A &= V_0 \varphi_1 + x'_{S_1} - \varphi'_1 h_1; \\ \frac{d\Delta_B}{dt} + V_0 \cdot k_B \cdot \Delta_B &= V_0 \varphi_1 + x'_{S_1} + \varphi'_1 h_2. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Підставляємо в систему диференціальних рівнянь (28) значення деформацій шин коліс (14), а також їх похідних (15).

$$\begin{aligned} I_{S_1} D\varphi_1''' - m_{mp} B x_{S_1}''' + I_{S_1} D\varphi_1'' k_A V_0 - m_{mp} x_{S_1}'' B k_A V_0 + E(B - Dh_2) V_0 k_A &= \\ = x'_{S_1} (AD - CB) + V_0 \varphi_1 (AD - CB) - \varphi'_1 (AD - CB) h_1; \\ I_{S_1} C\varphi_1''' - m_{mp} A x_{S_1}''' + I_{S_1} C\varphi_1'' k_B V_0 - m_{mp} x_{S_1}'' A k_B V_0 + E(A - Ch_2) V_0 k_B &= \\ = x'_{S_1} (BC - AD) + V_0 k_B \varphi_1 (BC - AD) - \varphi'_1 (BC - AD) h_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Диференціальні рівняння (5.29) можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} a_0\varphi_1'''' + a_1\varphi_1'''' + a_2\varphi_1'' + a_3\varphi_1 + a_4x_{S_1}'''' + a_5x_{S_1}'' + a_6x_{S_1}' + a_7 = 0; \\ b_0\varphi_1'''' + b_1\varphi_1'''' + b_2\varphi_1'' + b_3\varphi_1 + b_4x_{S_1}'''' + b_5x_{S_1}'' + b_6x_{S_1}' + b_7 = 0, \end{cases} \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} a_0 &= I_{S_1} D; & b_0 &= I_{S_1} C; \\ a_1 &= I_{S_1} Dk_A V_0; & b_1 &= I_{S_1} Dk_A V_0; \\ a_2 &= (AD - CB)h_1; & b_2 &= -h_2 \cdot (BC - AD); \\ a_3 &= (CB - AD) \cdot V_0; & b_3 &= -V_0 \cdot k_A (BC - AD); \\ a_4 &= -m_{mp} \cdot B; & b_4 &= -m_{mp} \cdot A; \\ a_5 &= -m_{mp} \cdot B \cdot k_A \cdot V_0; & b_5 &= -m_{mp} \cdot A \cdot k_A \cdot V_0; \\ a_6 &= CB - AD; & b_6 &= AD - BC; \\ a_7 &= E(B - Dh_2)V_0k_A; & b_7 &= E(A - C \cdot h_2)V_0 \cdot k_A. \end{aligned} \quad (31)$$

Віднявши від першого рівняння системи (31) друге рівняння, отримаємо:

$$(a_0 - b_0)\varphi_1'''' + (a_1 - b_1)\varphi_1'''' + (a_2 - b_2)\varphi_1'' + (a_3 - b_3)\varphi_1 + (a_4 - b_4)x_{S_1}'''' + (a_5 - b_5)x_{S_1}'' + (a_6 - b_6)x_{S_1}' + (a_7 - b_7) = 0. \quad (32)$$

Оскільки змінні φ_1 і x_{S_1} незалежні, то можна вважати, що сума (32) буде дорівнювати нулю коли

$$\begin{aligned} (a_0 - b_0)\varphi_1'''' + (a_1 - b_1)\varphi_1'''' + (a_2 - b_2)\varphi_1'' + (a_3 - b_3)\varphi_1 &= 0 \text{ і} \\ (a_4 - b_4)x_{S_1}'''' + (a_5 - b_5)x_{S_1}'' + (a_6 - b_6)x_{S_1}' + (a_7 - b_7) &= 0. \end{aligned}$$

Зробимо позначення $a_0 - b_0 = C_0$, $a_1 - b_1 = C_1$, $a_2 - b_2 = C_2$, $a_3 - b_3 = C_3$;

$$a_4 - b_4 = R_0, \quad a_5 - b_5 = R_1, \quad a_6 - b_6 = R_2, \quad a_7 - b_7 = R_3.$$

Тоді матимемо систему рівнянь, перше з яких є однорідним, а друге неоднорідним диференціальним рівнянням

$$\begin{cases} C_0\varphi_1'''' + C_1\varphi_1'''' + C_2\varphi_1'' + C_3\varphi_1 = 0, \\ R_0x_{S_1}'''' + R_1x_{S_1}'' + R_2x_{S_1}' = R_3. \end{cases} \quad (33)$$

Перше рівняння системи (33) є однорідним. Щоб розв'язати це рівняння треба привести його до виду, коли коефіцієнт при старшій похідній дорівнює одиниці. Для цього поділимо все рівняння на C_0 .

$$\varphi_1'''' + \frac{C_1}{C_0}\varphi_1'''' + \frac{C_2}{C_0}\varphi_1'' + \frac{C_3}{C_0}\varphi_1 = 0. \quad (34)$$

Для першого рівняння (33) складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + \frac{C_1}{C_0}\lambda^2 + \frac{C_2}{C_0}\lambda + \frac{C_3}{C_0} = 0. \quad (35)$$

Щоб знайти корені цього алгебраїчного рівняння 3-го степеня скористаємося відомою методикою з [12]. Спочатку шляхом заміни

$$\lambda = x - \frac{C_1}{3C_0} \quad (36)$$

позбудемося члена, що містить λ^2 :

Тепер наше рівняння набуде вигляду:

$$x^3 + \left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{C_1^2}{3C_0^2} \right) x + \frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0} = 0.$$

Зробивши позначення $p = \frac{C_2}{C_0} - \frac{C_1^2}{3C_0^2}$ і $q = \frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0}$,

матимемо рівняння

$$x^3 + px + q = 0. \quad (37)$$

Якщо будуть знайдені корені рівняння (37), то з урахуванням (36) будуть отримані і корені рівняння (35).

Рівняння (37) володіє за основною теоремою алгебри трьома комплексними коренями. Нехай x_0 буде будь-яким з цих коренів. Введемо допоміжне невідоме u та розглянемо многочлен

$$f(u) = u^2 - x_0u - \frac{p}{3}.$$

Його коефіцієнти – комплексні числа, і тому мають два комплексних кореня α і β , причому за формулою Вієта

$$\alpha + \beta = x_0, \quad (38)$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}. \quad (39)$$

Підставивши в (36) вираз (37), матимемо

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0,$$

або

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Зробимо перетворення:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = 0,$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Вираз $3\alpha\beta + p$ дорівнює нулю в силу (39), і тому ми отримаємо

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q \quad (40)$$

З іншого боку з (39), маємо

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (41)$$

Рівності (40) і (41) показують, що числа α^3 і β^3 служать коренями квадратного рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^2}{27} = 0 \quad (42)$$

з комплексними коренями. Розв'язавши (42),

отримаємо: $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$,

звідки

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (43)$$

Тоді за формулою Кардано

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Оскільки кубічний радикал має в полі комплексних чисел три значення, то формули (43) дають три значення для α і β .

Наше вихідне рівняння (37) має дійсні коефіцієнти, тому в [12] показано, що при цьому основну роль буде відігравати знак виразу $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, який в формулі Кардано стоїть під знаком квадратного кореня. Замітимо, що знак цього виразу протилежний знаку дискримінанта $D = -4p^3 - 27q^2 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$.

Тоді, як і для квадратного рівняння, дискримінант може приймати 3 значення в залежності від знака. Зробимо дослідження в залежності від дискримінанту.

1) Нехай $D < 0$. В цьому випадку в формулі Кардано під знаком кожного з квадратних радикалів стоїть додатне число, а тому під знаком кожного із кубічних радикалів маємо дійсні числа. Однак, кубічний корінь з дійсного числа має один дійсний і два спряжених комплексних значення. Тоді:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1; \\ x_2 &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}; \\ x_3 &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}. \end{aligned} \right. \quad (44)$$

Для нашого рівняння

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{C_1^2}{3C_0^2}\right)^3}}; \quad (45)$$

$$\beta_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2C_1^3}{27C_0^3} - \frac{C_1C_2}{3C_0^2} + \frac{C_3}{C_0}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{C_1^2}{3C_0^2}\right)^3}}. \quad (46)$$

Отже,

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 - \frac{C_1}{3C_0}; \\ \lambda_2 = x_2 - \frac{C_1}{3C_0}; \\ \lambda_3 = x_3 - \frac{C_1}{3C_0}. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 - \frac{C_1}{3C_0}; \\ \lambda_2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - \frac{C_1}{3C_0} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}; \\ \lambda_3 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - \frac{C_1}{3C_0} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}. \end{cases} \quad (47)$$

З урахуванням (47) розв'язок рівняння (34) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & A_1 e^{\left(\alpha_1 + \beta_1 - \frac{C_1}{3C_0}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{C_1}{3C_0}\right)t} \cos \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} t + A_3 e^{-\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{C_1}{3C_0}\right)t} \\ & \cdot \sin \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} t, \end{aligned} \quad (48)$$

де A_1, A_2, A_3 – довільні сталі, які можна знайти з початкових та граничних умов, а α_1, β_1 знаходяться за формулами (15) і (16).

Таким чином, якщо $D < 0$, то рівняння (37) має один дійсний і два спряжених комплексних корені.

Аналізуючи формулу (48) можна сказати, що при $t \rightarrow \infty$ останні два доданки будуть прямувати до нуля і фактично ми будемо мати експоненціальну залежність, коливання будуть загасаючими.

$$2) \text{ Нехай } D = 0. \text{ Тоді } \alpha = \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Нехай α_1 буде дійсним значенням радикала α , тоді і β_1 також буде в силу (9) дійсним числом, причому $\alpha_1 = \beta_1$. Тоді маємо:

$$x_1 = 2\alpha_1, \quad x_2 = -\alpha_1, \quad x_3 = -\alpha_1.$$

Звідки

$$\lambda_1 = 2\alpha_1 - \frac{C_1}{3C_0}, \quad \lambda_2 = -\alpha_1 - \frac{C_1}{3C_0}, \quad \lambda_3 = -\alpha_1 - \frac{C_1}{3C_0}. \quad (49)$$

Тобто, якщо $D = 0$, то всі корені рівняння (37) дійсні, причому два з них рівні між собою. Враховуючи (49), розв'язок (34) можна записати у вигляді:

$$\varphi_1 = A_1 e^{\left(2\alpha_1 - \frac{C_1}{3C_0}\right)t} + (A_2 + A_3 t) e^{-\left(\alpha_1 + \frac{C_1}{3C_0}\right)t}, \quad (50)$$

де A_1, A_2, A_3 – довільні сталі.

При $t \rightarrow \infty$ другий доданок буде прямувати до нуля і знову ми отримуємо експоненціальну залежність.

3) Нехай $D > 0$. В цьому випадку в формулі Кардано під знаком квадратного кореня стоїть від'ємне дійсне число, а тому під знаками кубічних радикалів стоять спряжені комплексні числа. Таким чином, всі значення радикалів α і β будуть комплексними числами. Серед коренів рівняння (7) повинен, однак міститися хоча б один дійсний. Нехай це буде корінь $x_1 = \alpha_0 + \beta_0$.

Так як дійсні і сума чисел α_0 і β_0 , то і їх добуток, що дорівнює $-p/3$, то числа α_0 і β_0 спряжені між собою як корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами. З [12] доведено, що всі три кореня рівняння (37) будуть дійсними і різними, а формула Кардана в цьому випадку не застосовна. Отже, рівняння (35) має 3 дійсних корені:

$$\lambda_1 = x_1 - \frac{C_1}{3C_0}, \quad \lambda_2 = x_2 - \frac{C_1}{3C_0}, \quad \lambda_3 = x_3 - \frac{C_1}{3C_0}. \quad (51)$$

Враховуючи (50) розв'язок (33) можна записати у вигляді:

$$\varphi_1 = A_1 e^{\left(x_1 - \frac{C_1}{3C_0}\right)t} + A_2 e^{\left(x_2 - \frac{C_1}{3C_0}\right)t} + A_3 e^{\left(x_3 - \frac{C_1}{3C_0}\right)t}, \quad (52)$$

де A_1, A_2, A_3 – довільні сталі.

Переходимо до розв'язання другого диференціального рівняння системи (33), позначивши для спрощення $y = x_{s_1}$:

$$R_0 y''' + R_1 y'' + R_2 y' = R_3. \quad (53)$$

Оскільки воно є неоднорідним, то його розв'язок складається з суми розв'язків, а саме: із загального розв'язку однорідного диференціального рівняння і будь-якого частинного розв'язку усього диференціального рівняння.

$$y = y_{\text{заг. одн.}} + y_{\text{част.}}$$

Знаходимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$R_0 y''' + R_1 y'' + R_2 y' = 0. \quad (54)$$

Знову розділимо все рівняння на R_0 , матимемо:

$$y''' + \frac{R_1}{R_0} y'' + \frac{R_2}{R_0} y' = 0. \quad (55)$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^3 + \frac{R_1}{R_0} k^2 + \frac{R_2}{R_0} k = 0.$$

$$k \left(k^2 + \frac{R_1}{R_0} k + \frac{R_2}{R_0} \right) = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad k^2 + \frac{R_1}{R_0} k + \frac{R_2}{R_0} = 0. \quad \text{Це квадратне}$$

рівняння і воно має 2 корені.

$$D = \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0};$$

$$k_2 = \frac{-\frac{R_1}{R_0} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2}; k_3 = \frac{-\frac{R_1}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2}.$$

Тоді в залежності від D матимемо 3 розв'язки

$$\text{а) } D > 0; y_{\text{заг. одн.}} = B_1 + B_2 e^{\frac{-\frac{R_1}{R_0} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2} t} + B_3 e^{\frac{-\frac{R_1}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2} t};$$

$$\text{б) } D = 0; y_{\text{заг. одн.}} = B_1 + (B_2 + B_3 t) e^{-\frac{R_1}{2R_0} t};$$

в) $D < 0$;

$$y_{\text{заг. одн.}} = B_1 + B_2 e^{-\frac{R_1}{2R_0} t} \cos \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}} \frac{t}{2} + B_3 e^{-\frac{R_1}{2R_0} t} \sin \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}} \frac{t}{2}.$$

Права частина рівняння (53) може бути представлена у вигляді $e^{at} \cdot P_n(t)$. Так як $k_1 = a = 0$, то маємо однократний резонанс, а це означає, що вибраний розв'язок треба помножити на t . Многочлен $P_n(t) = A$, оскільки в правій частині стоїть многочлен нульового степеня (R_3). Тоді $y_{\text{част.}} = At$.

Визначимо коефіцієнт A , що входить у $y_{\text{част.}}$. Для цього знайдемо $(y_{\text{част.}})' = A$; $(y_{\text{част.}})'' = 0$; $(y_{\text{част.}})''' = 0$ і підставимо всі ці значення в рівняння (53). $R_2 A = R_3 \Rightarrow A = \frac{R_3}{R_2}$. Отже, $y_{\text{част.}} = \frac{R_3}{R_2} t$.

Тоді матимемо:

$$x_{S_1} = B_1 + B_2 e^{\frac{-\frac{R_1}{R_0} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2} t} + B_3 e^{\frac{-\frac{R_1}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}}}{2} t} + \frac{R_3}{R_2} t. \quad (56)$$

$$x_{S_1} = B_1 + B_1 + (B_2 + B_3 t) e^{-\frac{R_1}{2R_0} t} + \frac{R_3}{R_2} t. \quad (57)$$

$$x_{S_1} = B_1 + B_2 e^{-\frac{R_1}{2R_0} t} \cos \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}} \frac{t}{2} + B_3 e^{-\frac{R_1}{2R_0} t} \sin \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 4 \frac{R_2}{R_0}} \frac{t}{2} + \frac{R_3}{R_2} t. \quad (58)$$

За формулами (56)-(58) знаходимо відповідні переміщення.

Висновки. Отримані аналітичні залежності можуть в подальшому бути використані при моделюванні руху трактора на різних режимах, що дозволять забезпечити його стійкий рух.

Література:

1. *Ляпунов А.М.* М.Общая задача об устойчивости движения // – М.: Гостехиздат, 1950. – 479 с.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения //– М.: Наука, 1966. – 530 с.
3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
4. *Василенко П.М.* Элементы теории устойчивости движения прицепных сельскохозяйственных машин и орудий / П. М. Василенко // Сборник трудов по земледельческой механике. – М., 1954. – С. 73-92.
5. *Василенко П.М.* О методике механико-математических изысканий при разработке сельскохозяйственной техники // – М.: Бюл. технической информации ГОСНИТИ, 1962. – 230 с.
6. *Гячев Л.В.* Динамика машино-тракторных агрегатов / Л. В. Гячев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1976. – 192 с.
7. *Гячев Л.В.* Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов / Л. В. Гячев. – М.: Машиностроение, 1981. – 206 с.
8. *Леженкин А.Н.* Дифференциальные уравнения движения уборочного агрегата //Актуальные проблемы инженерного обеспечения АПК: междунар. науч. конф. – Ярославль, 2004. – Ч. III. – С. 107-117.
9. *Леженкин А.Н.* Динамика очесывающего агрегата при уборке зерновых культур // Механиз. и электриф. сел. хоз-ва. – 2004. – №12. – С. 24-25.
10. *Леженкин О. М.* Стійкість руху причіпного збирального агрегату очісуючого типу // Праці ТДАТА. – Мелітополь, 2006. – Вип. 42. – С. 91-101.
11. *Леженкин А.Н.* Дифференциальные уравнения прицепного уборочного агрегата при прямолинейном и равномерном движении центра масс трактора // Механизация и электрификация технологических процессов АПК / Известия междунар. академии аграрного образования. – СПб., 2008. – Вып. 6. Т. 1. – С. 76-84.3

12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 432 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТРАКТОРА ПРИ АГРЕГАТИРОВАНИИ ЗЕРНОУБОРОЧНОГО АГРЕГАТА

Леженкин А.Н., Рубцов Н.А., Галько С.В., Михайленко Е.Ю.

Аннотация.

Статья посвящена рассмотрению движения колесного трактора, который агрегирует уборочный агрегат обчесывающего типа. Исследования проводились в 2 этапа. На первом этапе были составлены дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода в обобщенных координатах. Поскольку исследуемые переменные являются независимыми, то первое линейное дифференциальное уравнение оказалось однородным, а второе неоднородным. Поэтому при решении были применены соответствующие соображения в зависимости от типа дифференциального уравнения. В обоих случаях составлялись характеристические уравнения, представлявшие собой алгебраические уравнения третьей степени. Первое решалось по общей теории по формулам Кардано, а второе имело упрощенный вид и после вынесения общего множителя сводилось к квадратному уравнению. Решение дифференциальных уравнений записывалось в зависимости от вида корней характеристических уравнений, которые в свою очередь зависят от экспериментальных данных.

Полученные в результате исследований зависимости дают возможность анализа и при дальнейшем моделировании для выявления режима устойчивого движения трактора.

Ключевые слова: трактор, зерноуборочный агрегат, дифференциальные уравнения, формулы Кардано.

MATHEMATICAL MODEL OF TRACTOR MOTION WHEN UNITING GRAIN HARVESTING UNIT

A.Lezhenkin, N.Rubtsov, S.Halko, O.Mykhailenko

Summary

The article has been devoting to the study of the movement of a wheeled tractor, which aggregates the combing unit of the combing type. For simplify the analysis of the stability of the unit, as well as to identify the range of allowable values of factors affecting the stable operation of the harvesting unit, the movement of the tractor, harvesting machine and trailer was considered separately.

The first considered movement of the tractor. The investigation was conducted in 2 stages. At the first stage, a system of forces and moments acting on the tractor was discovered and Lagrange differential equations of the second kind in generalized coordinates were compiled. The second stage of investigation was devoted to solving a system of differential equations. Since the studied variables are independent, the first linear differential equation turned out to be homogeneous and the second to be inhomogeneous. Therefore, the appropriate considerations depending on the type of differential equation were used in the solution.

In both cases, characteristic equations were formed, which were algebraic equations of the third degree. The first was solved by the general theory according to Cardano's formulas, and the second had a simplified form and after removal of the general factor was reduced to the quadratic equation. The solution of the differential equations was recorded depending on the type of roots of the characteristic equations, which in turn depend on the experimental data. All dependences which are received as a result of researches represent oscillatory contours with a variety of final result. Over time, they come to stabilize movement. The dependences obtained according to the results of researches give the chance of the analysis and at the further modeling detection of a mode of steady movement of a tractor.

Key words: tractor, grain harvester, differential equations, Cardano's formulas.