УДК 514:18

К.т.н. Титаренко М.С.
Малкина В.М.

# ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАТЕРНИОНОВ.

*Таврическая государственная агротехническая академия*

Предлагается метод получения бесконечного множества функций, удовлетворяющих лишь дифференциальным уравнениям задачи и чаще всего имеющих вид полиномов. Такие функции в дальнейшем называются элементарными решениями уравнений. Богатые возможности для построения множеств элементарных решений предоставляет аппарат исчисления негамильтоновских кватернионов.

Попытка Гамильтона построить расширение поля комплексных чисел привела его к построению поля кватернионов, для чего были введены четыре базисных четырехмерных объекта – $1, \bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ со специальным определением их попарных произведений. Произвольный кватернион представлялся суммой $K = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} + d1$.

Произведение двух кватернионов Гамильтона оказалось некоммутативным, что не дало возможности построить столь же мощный аппарат анализа функций кватернионного переменного, какой имеется для функций комплексного переменного.

Если для построения кватернионов принять несколько иную таблицу умножения, оказывается возможным построить на их основе коммутативную и ассоциативную алгебру, а затем и анализ функций кватернионного переменного. Предлагается следующая таблица попарных произведений базисных кватернионов $1, \bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ :

$$\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{i} = \bar{k}; \qquad \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{j} = \bar{i}; \qquad \bar{k}\bar{i} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j};$$

$$\bar{i}\bar{i} = 1; \qquad \bar{j}\bar{j} = 1; \qquad \bar{k}\bar{k} = 1; \qquad 1 \cdot 1 = 1;$$

$$1\bar{i} = \bar{i}1 = \bar{i}; \qquad 1\bar{j} = \bar{j}1 = \bar{j}; \qquad 1\bar{k} = \bar{k}1 = \bar{k}.$$

Не имея возможности в рамках настоящей статьи изложить результаты исследования алгебры негамильтоновых кватернионов, отметим их особенности в сравнении с кватернионами Гамильтона. Если произвольный кватернион $R = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + t1$, как четырехмерный объект, считать состоящим из векторной части $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и скалярной –

$\varphi = t \cdot 1$, то произведение кватернионов Гамильтона можно построить с использованием векторного и скалярного произведений векторных его частей. Произведение же предложенных кватернионов строится на тривекторном и скалярном произведениях этих частей.

Понятие тривектора и тривекторного произведения введено нами для выражения дифференциалов высших порядков векторных полей и нашло эффективное применение в теории кватернионных функций.

Для построения тривекторного произведения базисных тривекторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ предложена таблица их попарных произведений:

$$1 \times 1 = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0; \qquad \bar{i} \times \bar{j} = \bar{j} \times \bar{i} = \bar{k};$$
$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{k} \times \bar{j} = \bar{i}; \qquad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}.$$

Произведение тривекторов – коммутативно, но не ассоциативно.

С помощью тривекторов можно представить тензоры второго ранга как линейные тривекторные функции от тривекторов базиса.

Отметим основные свойства алгебраических операций над негамильтоновскими кватернионами. В дальнейшем мы будем говорить исключительно о таких кватернионах.

Произвольная целочисленная степень кватерниона $R = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + t1$ может быть представлена с помощью средств алгебры матриц в виде

$$\begin{aligned} R^n &= \bar{i}\left[\rho_0^n + \rho_1^n - \rho_2^n - \rho_3^n\right] + \bar{j}\left[\rho_0^n - \rho_1^n + \rho_2^n - \rho_3^n\right] + \\ &+ \bar{k}\left[\rho_0^n - \rho_1^n - \rho_2^n + \rho_3^n\right] + \left[\rho_0^n - \rho_1^n + \rho_2^n + \rho_3^n\right] = \\ &= \rho_0^n\left(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k} + 1\right) + \rho_1^n\left(1 + \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}\right) + \rho_2^n\left(1 - \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}\right) + \\ &+ \rho_3^n\left(1 - \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}\right) = \rho_0^n T_0 + \rho_1^n T_1 + \rho_2^n T_2 + \rho_3^n T_3, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= t + x + y + z; \\ \rho_1 &= t + x - y - z; \\ \rho_2 &= t - x + y - z; \\ \rho_3 &= t - x - y + z. \end{aligned} \tag{5'}$$

Произвольная аналитическая функция $f(R)$ от кватернионного аргумента $R$, то есть функция, разложимая в бесконечный сходящийся степенной ряд – $f(R) = \sum_0^\infty a_n R^n$, может быть представлена в виде

$$f(R) = f(\rho_0)T_0 + f(\rho_1)T_1 + f(\rho_2)T_2 + f(\rho_3)T_3,$$

аналогичном (5), с заменами $\rho_k^n$ на $f(\rho_k)$.

Скалярные функции $f(\rho_k)$ принимают одинаковые значения во всех точках каждой плоскости семейства $\rho_k = t \pm x \pm y \pm z = const$ . Это одно из наиболее важных свойств аналитических функций кватернионного переменного.

С помощью степенных кватернионов (5) удается построить простейшие функции, удовлетворяющие тем или иным дифференциальным уравнениям задач математической физики. Так, векторная часть кватернионной функции $R^n$ задает некоторое элементарное потенциальное векторное поле, так как ее слагаемые – поля вида $U_k = (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})\rho_k^n$ – потенциальны.

Векторная же часть кватернионной функции $\tilde{R}^n$, где

$\tilde{R} = (y - z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$ , задает элементарное соленоидальное поле.

Очевидно, компоненты как первого, так и второго поля есть полиномы степени $n$ , каждое слагаемое в которых имеет одну и ту же степень.

Ортогональные преобразования кватернионных функций $R^n$ и $\tilde{R}^n$ задают повернутые в пространстве векторные и скалярные поля. Более того, если исходная векторная функция удовлетворяет какому-либо иному линейному уравнению в инвариантных дифференциальных операторах, то этому уравнению удовлетворяют и повернутые поля.

Путем всевозможных поворотов векторной части кватернионов $R^n$ и $\tilde{R}^n$ можно строить линейно независимые векторные поля, соответственно потенциальные и соленоидальные. Существует $k = 3(n + 1)$ линейно независимых взаимно повернутых полей, где $k$ – число одночленов в составе компонент $u, v$ и $w$ . При большем числе повернутых полей они неизбежно линейно зависимы.

Действие дифференциального оператора градиента на скалярную часть произвольно повернутого кватерниона $R^n$ задает векторную часть повернутого кватерниона – производной $nR^{n-1}$, а действие оператора дивергенции на векторную часть $R^n$ – задает скалярную часть повернутого $3nR^{n-1}$. Эта особенность кватернионов позволяет весьма просто выражать результаты действия на скалярную и векторную их части обратных операторов к упомянутым. Действие обратных операторов сводится к интегрированию кватернионов, при этом с той особенностью, что интегрирование каждого повернутого кватерниона выполняется в его базисе операций. Короче говоря, «первообразная» для $R^n$ имеет вид $\frac{1}{(n+1)} R^{n+1}$ .

Если для векторного поля $U$, компоненты которого $u, v, w$ – многочлены степени $n$, требуется получить результат действия некоторого дифференциального оператора или обратного ему, можно поле разложить по векторным частям кватернионов $R^n$, последние продифференцировать (соответственно, проинтегрировать), и затем сложить. Разложение может быть выполнено бесконечным множеством вариантов. Результат действия дифференциального оператора $L$ на разлагаемое поле не зависит от варианта разложения, так как сводится к суммированию производных. Результат же «интегрирования», то есть действия обратного оператора $\tilde{L}$ к оператору $L$, естественно зависит от варианта разложения. Он неоднозначный, находится с точностью до функции $f$, для которой $\tilde{L}(f) = 0$. Для операторов, обратных операторам градиента, ротора, дивергенции, скалярная или векторная функция $f$ – гармоническая.

Гармонические векторные поля, ротор и дивергенция которых равны нулям, могут быть включены как в состав потенциальной, так и соленоидальной составляющей векторного поля общего вида.

Полный набор элементарных решений линейных задач предлагается строить в виде полных комплектов линейно независимых, взаимно повернутых потенциальных, соленоидальных и гармонических полей, получаемых с помощью кватернионов.

Компоненты $u, v$ и $w$ произвольного непрерывного векторного поля могут быть представлены с произвольно малой погрешностью приближениями в виде полиномов Вейерштрасса. Эти приближения всегда можно выразить через компоненты кватернионных полей $R^n$ и $\tilde{R}^n$ путем соответствующих подстановок. Следовательно, произвольное непрерывное векторное поле можно приблизить сколь угодно точно кватернионными многочленными потенциальными и соленоидальными полями.

Таким образом, элементарные решения задачи теории упругости и других задач математической физики можно построить довольно эффективным методом с использованием кватернионов.

Из элементарных решений строится суперпозиция так, чтобы на границе она сходилась к граничным условиям, что позволяет найти решение задачи.

Литература:

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2, Гостезиздат, М:, 1957, – с. 628.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, М:, 1961, – с. 400.