УДК 515.2

НАЗНАЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК В ТОЧКАХ ОБВОДА С МОНОТОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ КРИВИЗНЫ

Гавриленко Е.А. к.т.н.,
Холодняк Ю.В., к.т.н.,
Ивженко А.В., к.т.н.
Мелитопольская школа прикладной геометрии
Таврический государственный агротехнологический университет имени Дмитрия Моторного (Украина),
Найдиш А.В., д.т.н.
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого (Украина)

Модель поверхности сложной формы, как правило, формируется на основе каркаса, элементами которого являются кривые линии. Задача обеспечения заданных функциональных свойств таких поверхностей требует разработки методов формирования линейных элементов модели в виде одномерных обводов с заданными дифференциально-геометрическими характеристиками. Такими характеристиками являются порядок фиксации и порядок гладкости обвода, динамика изменения значений кривизны вдоль кривой.

В работе исследуются ограничения, которые накладываются на положение касательных, проходящих через точки исходной кривой, законом изменения кривизны вдоль обвода.

Исходными данными для моделирования обвода является упорядоченный точечный ряд. Этот точечный ряд представляет кривую линию, которую будем называть дискретно представленная кривая (ДПК). В результате предварительного анализа исходного точечного ряда определяются участки, на основе которых можно сформировать монотонную кривую. Каждая монотонная кривая моделируется отдельно по участкам, которые ограничены соседними узлами. При этом обеспечивается монотонность изменения кривизны на каждом участке и стыковка участков со вторым порядком гладкости. ДПК могут формироваться на основе любого точечного ряда. При этом существует возможность контроля и коррекции получаемого решения, гарантируется отсутствие осцилляций.

Дальнейшее развитие разрабатываемого метода направлено на повышение его универсальности и возможностей адаптации под требования конкретных прикладных задач. Такая задача может быть решена наращиванием условий, накладываемых на обвод за счёт увеличения числа параметров формообразования.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК), базисный треугольник, касательная, кривизна, барицентрические координаты.

Постановка проблемы. Для достижения оптимального закона изменения положения касательных вдоль обвода с монотонным изменением кривизны, необходимо определить диапазоны возможного положения касательных в точках исходной ДПК.

Алгоритм определения границ диапазонов должен учитывать:

- форму исходной ДПК;
- характер изменения значений кривизны вдоль обвода;
- ограничения, накладываемые выбранным положением касательной в любой точке исходной ДПК, на положения, которые могут занимать касательные в остальных исходных точках.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [2] предложен алгоритм определения положения точек сгущения при формировании обвода с монотонным изменением кривизны. Точки сгущения назначаются внутри базисных треугольников, образуемых хордой, соединяющей две последовательные точки ДПК, и касательными к обводу в этих точках.

В работах [3,4] определены требования, которым должны соответствовать базисные треугольники, определяемые касательными к обводу в точках исходной ДПК. Соотношение сторон базисных треугольников является критерием, позволяющим определить соответствие положения касательных в точках ДПК, задаче формирования обвода с монотонным изменением кривизны.

Однако, для реализации результатов, полученных в работах [2,3], необходимо решить задачу определения положения касательных к обводу в точках исходной ДПК, при которых образуется цепочка базисных треугольников, обеспечивающих формирование обвода с монотонным изменением кривизны.

Формулировка целей статьи. Целью исследований, результаты которых изложены в данной статье, является определение крайних положений, которые могут занимать касательные к обводу в точках исходной ДПК, при формировании обвода с монотонным изменением кривизны.

Основная часть. В работе [4] определены требования, которым должны соответствовать базисные треугольники, при формировании обвода с монотонным возрастанием кривизны:

$$l \le m; \tag{1}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{a}{c}; \tag{2}$$

$$n \le t, \tag{3}$$

где (рис. 1) l, m, n, t - длины сторон базисных треугольников; a, c - расстояния от точек исходной ДПК $i-1$ и $i+1$ до касательной t_i к обводу в точке i.

Определим крайние положения, которые могут занимать касательные к формируемому обводу в точках $i-1, i, i+1$, при выполнении условий (1), (2), (3).

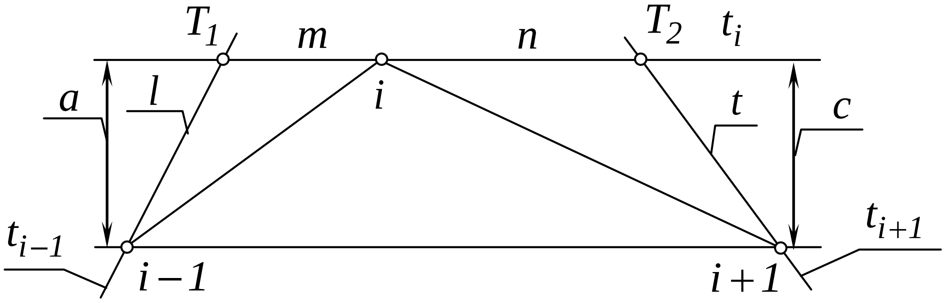

Рис. 1.

Обозначим касательные проведенные через точки i-$1,i,i+1$ соответственно t_{i-1},t,t_{i+1}. Согласно условию (2), при фиксированном положении касательной t_i ($\frac{a}{c} = const$) касательные t_{i-1} и t_{i+1} могут занимать различные положения. При этом поворот касательной t_{i-1} по часовой стрелке (уменьшение величины m) влечет поворот касательной t_{i+1} против часовой стрелки (уменьшение величины n) и наоборот.

Условие (1) ограничивает поворот касательной t_{i-1} по часовой стрелке. Крайнее положение, которое может занять эта касательная, соответствует равенству $l=m$.

Условие (3) ограничивает поворот касательной t_{i+1} по часовой стрелке. Крайнее положение, которое может занять эта касательная, соответствует равенству $n=t$.

Таким образом, при различных фиксированных положениях касательной t_i условия (1), (2), (3) ограничивают одновременный поворот касательных t_{i-1} и t_{i+1} навстречу друг другу (t_{i-1} – по часовой стрелке, t_{i+1} – против) и наоборот.

Поворот касательной t_i против часовой стрелки (величина a – уменьшается, величина c – увеличивается) влечет уменьшение соотношения $\frac{m}{n}$.

Крайнее положение, которое может занимать касательная t_i при повороте против часовой стрелки наступает в тот момент, когда одновременно выполняются условия:

$$l = m;$$
$$n = t;$$

или $\overleftarrow{R}_{i-1} = \overrightarrow{R_i} = \overleftarrow{R_i} = \overrightarrow{R}_{i+1}$, где [3]:

$\overleftarrow{R}_{i-1}$ - значение радиуса кривизны, определяемое в точке $i-1$ базисным треугольником $i-1, T_1, i$;

$\overrightarrow{R}_i$ - значение радиуса кривизны, определяемое в точке i базисным треугольником $i-1, T_1, i$;

$\overleftarrow{R}_i$ - значение радиуса кривизны, определяемое в точке i базисным треугольником $i, T_2, i+1$;

$\overrightarrow{R}_{i+1}$ - значение радиуса кривизны, определяемое в точке $i+1$ базисным треугольником $i, T_2, i+1$.

При этом положении касательной t_i, положение касательных t_{i-1} и t_{i+1} – фиксировано, а конструируемая кривая на участке i-$1 \ldots i$+1 – окружность.

В этом положении, касательные занимают положения:

t_{i-1} – максимально повернутое по часовой стрелке;

t_i – максимально повернутое против часовой стрелки;

t_{i+1} - максимально повернутое по часовой стрелке.

Обозначим эти положения касательных соответственно: $\overrightarrow{t}_{i-1}, \overleftarrow{t}_i, \overrightarrow{t}_{i+1}$ и будем называть «крайние положения касательных в треугольнике i-$1,i,i$+1».

Уравнение прямой t_i в барицентрических координатах (БК) относительно треугольника i-$1,i,i$+1 (см. рис. 1) соответственно имеет вид [1]:

$$aM_1 + cM_3 = 0. \tag{4}$$

Для прямой t_i параметры a и c связаны между собой следующими соотношениями:

$$c = \frac{a(M^2 + N^2 - L^2) + 4S\sqrt{M^2 - a^2}}{2M^2}; \tag{5}$$

$$a = \frac{c(M^2 + N^2 - L^2) + 4S\sqrt{N^2 - c^2}}{2N^2}, \tag{6}$$

где $M = |i-1; i|; N = |i; i+1|; L = |i-1; i+1|$;

S – площадь треугольника i-$1,i,i$+1.

Для вычисления коэффициентов a и c определяющих касательную t_i в положении $\overleftarrow{t}_i$ необходимо решить систему из четырех уравнений:

1. $\frac{m^2}{n^2}=\frac{a}{c}$ – условие равенства радиусов кривизны, определяемых в точке i базисными треугольниками $i-1,T_1,i$ и $i,T_2,i+1$;

2. Условие $l=m$ можно представить в виде:

$$M^2-2n\sqrt{M^2-a^2}=0;$$

3. Условие $n=t$ можно представить в виде:

$$N^2-2n\sqrt{N^2-c^2}=0;$$

4. Четвертым уравнением системы является уравнение (5) или (6).

Положение $\vec{t}_{i-1}$ касательной t_{i-1} определяется в системе БК треугольника i-2,i-1,i, уравнением (4), где ее коэффициент c равен коэффициенту a, определяющему положение $\overleftarrow{t_i}$ касательной t_i в системе БК треугольника i-1,i,$i+1$. Коэффициент a касательной t_{i-1} в положении $\vec{t}_{i-1}$ определяется в системе БК треугольника $i-1,i,i+1$ по уравнению, аналогичному уравнению (6).

Уравнение касательной t_{i+1} в положении $\vec{t}_{i+1}$ определяется в системе БК треугольника $i,i+1,i+2$, аналогично.

Выводы. В работе исследованы ограничения на взаимное расположение касательных к обводу в трех последовательных точках исходной ДПК, при условии, что они образуют базисные треугольники, позволяющие формировать обвод с монотонным изменением кривизны.

На основании приведенных исследований определены крайние положения касательных к обводу в указанных точках, при которых задача имеет решение.

Литература

1. Гавриленко Е. А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны : дис…канд. техн. наук. Мелитополь, 2004. 184 с.
2. Холодняк Ю. В., Гавриленко Е. А., Дубинина А. В. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям. *Сучасні проблеми моделювання.* Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. Вип. 9. С. 162-166.
3. Гавриленко Е. А., Холодняк Ю. В., Пахаренко В. А. Технология компьютерного проектирования функциональных поверхностей технических изделий на основе массива точек. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. Херсон: ХДТУ, 2016. № 3(58). С. 492-496.

4. Холодняк Ю В., Дмитриев Ю. А. Формирование одномерных обводов с закономерным изменением кривизны. *Динамика систем, механизмов и машин*. Омск: Омский ГТУ, 2014. № 3. С. 241-243.

ПРИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК У ТОЧКАХ ОБВОДУ З МОНОТОННОЮ ЗМІНОЮ КРИВИНИ

Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В., Івженко О.В., Найдиш А.В.

Модель поверхні складної форми, як правило, формується на основі каркаса, елементами якого є криві лінії. Завдання забезпечення заданих функціональних властивостей таких поверхонь вимагає розробки методів формування лінійних елементів моделі у вигляді одновимірних обводів з заданими диференційно-геометричними характеристиками. Такими характеристиками є порядок фіксації і порядок гладкості обводу, динаміка зміни значень кривини уздовж кривої.

В роботі досліджуються обмеження, які накладаються на положення дотичних, що проходять через точки вихідної кривої, законом зміни кривизни уздовж обводу.

Вихідними даними для моделювання обводу є упорядкований точковий ряд. Цей точковий ряд представляє криву лінію, яку будемо називати дискретно представлена крива (ДПК). В результаті попереднього аналізу вихідного точкового ряду визначаються ділянки, на основі яких можна сформувати монотонну криву. Кожна монотонна крива моделюється окремо по ділянках, які обмежені сусідніми вузлами. При цьому забезпечується монотонність зміни кривини на кожній дільниці і стикування ділянок з другим порядком гладкості. ДПК можуть формуватися на основі будь-якого точкового ряду. При цьому існує можливість покрокового контролю і корекції одержуваного рішення, гарантується відсутність осциляції.

Подальший розвиток методу, що розробляється, направлено на підвищення його універсальності і можливостей адаптації під вимоги конкретних прикладних задач. Така задача може бути вирішена нарощуванням умов, що накладаються на обвід за рахунок збільшення числа параметрів формоутворення.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), базисний трикутник, дотична, кривина, барицентричні координати.

DETERMING OF CHARACTERISTICS AT POINTS OF CONTOUR WITH MONOTONE CHANGE OF CURVATURE

Gavrilenko E., Kholodnyak Yu., Ivzhenko A., Naidysh A.

A surface model of complex shape, as a rule, is formed on the basis of a skeleton, the elements of which are curved lines. The task of providing the specified functional properties of such surfaces requires the development of methods for forming linear model elements in the form of one-dimensional contours with specified differential geometric characteristics. Such characteristics are the fixation order and the smoothness order of the contour, the dynamics of changes in the values of curvature along the curve.

In this work, we study the constraints that are imposed on the position of the tangents passing through the points of the original curve by the law of curvature changes along the contour.

The initial data for modeling the contour is an ordered points set. This point set represents a curved line, which we will call the discretely presented curve (DPC). As a result of a preliminary analysis of the initial points set, sections are determined on the basis of which a monotonic curve can be formed. Each monotonous curve is modeled separately for areas that are bounded by neighboring points. This ensures the monotone change of curvature in each section and the joining of the sections with the second order of smoothness. DPC can be formed on the basis of any point series. At the same time, it is possible to control and correct the resulting solution, and the absence of oscillations is guaranteed.

Further development of the method is aimed at increasing its versatility and adaptability to the requirements of specific applied problems. This problem can be solved by increasing the conditions imposed on the contour by increasing the number of shaping parameters.

Key words: discretely presented curve (DPC), basic triangle, tangent, curvature, barycentric coordinates.