МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

**ПОПОВА І.О., КУРАШКІН С.Ф.,
ВОВК О.Ю., ПОПРЯДУХІН В.С.**

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

частина 3

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

І.О. Попова, С.Ф. Курашкін, О.Ю. Вовк, В.С. Попрядухін

Теоретичні основи електротехніки

частина 3

Навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти закладів вищої освіти

Мелітополь,2020

УДК 621.3.01.001 (075.8)

П58

Рекомендовано Вченою радою Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного як навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» III-IV рівня акредитації (Протокол № 8 від 28 травня 2020 р.)

Рецензенти:

Косуліна Н.Г., д.т.н., професор, завідувач кафедри біомедичної інженерії та теоретичної електротехніки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. П. Василенка

Назаренко І.П., д.т.н., професор кафедри «Електротехнології і теплові процеси», декан факультету енергетики і комп'ютерних технологій, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного.

П58 Попова І.О.Теоретичні основи електротехніки, частина 3: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти закладів вищої освіти / І.О. Попова, С.Ф. Курашкін, О.Ю. Вовк, В.С. Попрядухін. – Мелітополь: Видавничо-поліграфічний центр «Люкс», 2020. – 221 с., іл.

У навчальному посібнику зібрані, систематизовані та викладені теоретичний матеріал, який охоплює питання нелінійних кіл постійного струму, магнітних кіл при постійних магнітних потоках і синусоїдній напрузі, перехідні процеси в колах постійного і змінного струму, електричних кіл з розподіленими параметрами і аналізу електромагнітного поля. Структура навчального посібника, зміст та ілюстрації теоретичного матеріалу є методично обґрунтованими та роблять посібник зручним для самостійного опрацювання матеріалу здобувачами вищої освіти як очної, так заочної (дистанційної) форм навчання.

Навчальний посібник розраховано на здобувачів ступенів вищої освіти «Бакалавр» та «Магістр», аспірантів, інженерно-технічних працівників та науковців у закладах вищої освіти III-IV рівня акредитації.

ISBN 978-617-7218-88-2 УДК 621.3.01.001 (075.8)

@ Попова І.О., Курашкін С.Ф., Вовк О.Ю., Попрядухін В.С., 2020
@ Видавничо-поліграфічний центр «Люкс», 2020

ЗМІСТ

Вступ 5

ТЕМА 13 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

13.1 Нелінійні елементи та їх властивості 6
13.2 Розрахунок кіл при послідовному з'єднанні нелінійних елементів 12
13.3 Розрахунок кіл при паралельному з'єднанні нелінійних елементів 11
13.4 Розрахунок кіл при змішаному з'єднанні нелінійних і лінійних елементів 14

ТЕМА 14 МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ

14.1 Явище і закон електромагнетизму 22
14.2 Магнітне коло та його конструктивна схема 27
14.3 Крива намагнічування 29
14.4 Петля гістерезису 31
14.5 Аналогія між електричними і магнітними колами 32
14.6 Розрахункова схема магнітного кола 34
14.7 Закони магнітних кіл 35
14.8 Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл 38
14.9 Розрахунок розгалужених магнітних кіл 41
14.10 Електромагніти та їх розрахунок 47

ТЕМА 15 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

15.1 Загальні положення 52
15.2 Нелінійна індуктивність 53
15.3 Ідеальна котушка з феромагнітним осереддям 56
15.4 Втрати активної потужності на гістерезис 61
15.5 Втрати активної потужності на вихрові струми 64
15.6 Реальна котушка з феромагнітним осереддям 67
15.7 Ферорезонанс напруг і струмів 70
15.8 Трансформатор з феромагнітним осереддям 81
15.9 Приведений трансформатор 90
15.10 Феромагнітні підсилювачі потужності 93

ТЕМА 16 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

16.1 Причини виникнення перехідних процесів 101
16.2 Закони комутації 102
16.3 Класичний метод розрахунку перехідних процесів 105
16.4 Підключення індуктивної котушки до джерела постійної ЕРС 109

16.5 Коротке замикання котушки ……. 113
16.6 Заряд конденсатора через резистор …… 117
16.7 Розряд конденсатора через резистор …… 120
16.8 Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою та конденсатором …… 125
16.9 Розряд конденсатора на котушку ……. 131
16.10 Включення котушки при синусоїдній напрузі …… 135
16.11 Включення реального конденсатора при синусоїдній напрузі …… 139
16.12 Перехідний процес в колі з взаємною індуктивністю …… 143
16.13 Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі ……. 144
16.14 Перетворення Лапласа …… 152
16.15 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі …… 153
16.16 Включення пасивного двополюсника на напругу, що безперервно змінюється (формула або інтеграл Дюамеля…….. 154
1617 Включення пасивного двополюсника на напругу будь-якої форми……. 161
16.18 Часова та імпульсна перехідні характеристики…….. 164
16.19 Перехідні процеси при стрибках струмів в індуктивностях 168

ТЕМА 17 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

17.1 Загальні відомості …… 180
17.2 Диференціальні рівняння однорідних ліній ……. 181
17.3 Сталий режим однорідної лінії …… 183
17.4 Хвилі в лінії при сталому режимі …… 186
17.5 Лінія без спотворень …… 190

ТЕМА 18 ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТА МЕТОДИ ЙОГО АНАЛІЗУ

18.1 Основні параметри електростатичного поля …… 194
18.2 Електричне поле постійного струму в електропровідному середовищі та його основні параметри …… 206
18.3 Магнітне поле постійного струму. Зв’язок основних величин, що характеризують магнітне поле …… 211
18.4 Основні рівняння змінного електромагнітного поля …… 214

Список рекомендованої літератури …… 220

ВСТУП

Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) є фундаментальною дисципліною, на базі якої вивчаються всі інші електротехнічні дисципліни навчального плану спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

Запропонований навчальний посібник сприяє самостійній пізнавальній діяльності студентів під час вивчення дисципліни ТОЕ, ч. 3, забезпечуючи як вивчення навчального матеріалу, так і розвиток мислення, що є основною вимогою болонського процесу.

Посібник дає можливість змінити парадигму навчального процесу від простої передачі знань викладача до самостійного здобування знань і вмінь студентами шляхом поєднання аудиторних та поза аудиторних занять в єдиний безперервний ланцюг самостійної пізнавальної діяльності на інформаційно-репродуктивному і практично-стереотипному рівнях. З огляду на це навчальний посібник є досить актуальним і доцільним для організації пізнавальної діяльності студентів.

Науково-методична цінність навчального посібника полягає у тому, що він містить приклади розв’язання стереотипних задач і питання для самоконтролю – це дає можливість організувати аудиторну і самостійну діяльність студентів з вивчення дисципліни і є базою для складання науково-методичного комплексу дисципліни ТОЕ, ч. 3.

ТЕМА 13
НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

13.1. Нелінійні елементи та їх властивості

Нелінійними електричними колами є кола, параметри яких залежать від струму та напруги. Взагалі, всі електричні кола є нелінійними, однак, в багатьох практичних випадках ця нелінійність настільки слабо виражена, що під час аналізу процесів, які відбуваються в колі нею можна знехтувати. Таким чином, це дає змогу застосовувати теорію лінійних електричних кіл для розрахунку багатьох електротехнічних пристроїв.

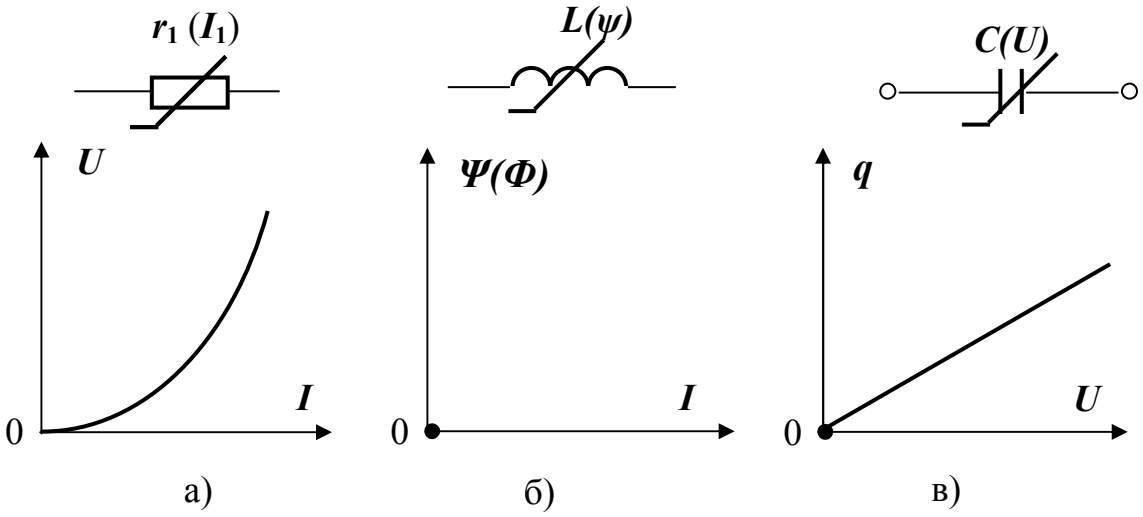
Однак існують елементи, нелінійність характеристик яких значно виражена. Кола, які містять такі елементи називаються нелінійними і мають ряд властивостей, що відсутні у лінійних кіл. Ці властивості дозволяють створювати засновані на них автоматичні системи управління і регулювання, пристрої для перетворення електромагнітної енергії, пристрої для виробництва електричних вимірювань і передачі інформації, швидкодіючі обчислювальні машини тощо.

Процеси, що відбуваються у нелінійних колах описуються нелінійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями.

Нелінійний елемент – це елемент, в якому параметри (електричний опір, індуктивність, ємність) залежать від значень або від напрямку струмів і напруги. Електричне коло вважається нелінійним, якщо в своєму складі має хоча б один нелінійний елемент з нелінійною вольт-амперною характеристикою (ВАХ).

Нелінійні елементи можуть бути класифіковані за різними ознаками:

1. В залежності від здібності розсіювати електричну енергію у вигляді тепла або накопичувати магнітну і електричну енергії, розрізняють нелінійний резистор, та нелінійні накопичувачі енергії – нелінійну індуктивну котушку і нелінійний конденсатор. Характеристики цих нелінійних елементів отримують експериментально, задаються графіками, таблицями, або приблизними аналітичними рівняннями. Вони представляють собою відповідно нелінійні залежності струму від напруги – ***I = f(U)*** (**вольт-амперна характеристика**), потокозчеплення або магнітного потоку від струму – ***ψ, Φ = f(I)*** (**вебер-амперна характеристика**), електричного заряду від напруги – ***q = f(U)*** – (**кулон-вольтна характеристика**) нелінійного конденсатора. ВАХ нелінійних елементів мають вигляд кривих (рисунок 13.1).



а) нелінійний резистора, (б) нелінійна індуктивність,
(в) нелінійна ємність.

Рисунок 13.1 – Графічні, літерні позначення і характеристики нелінійних елементів

2. В залежності від наявності керуючого струму або напруги, що додатково пливають на елементи розрізняються **некеровані** (наприклад, діод, стабілітрон) або **керовані** (наприклад, тиристор, біполярний транзистор) нелінійні елементи. ВАХ некерованих елементів задають-

ся однією природною характеристикою. ВАХ основного кола керованого елемента змінюється під впливом керуючого сигналу, тому керовані елементи мають сімейство кривих, параметром яких є керуючий вплив.

3. В залежності від виду ВАХ відносно початку координат розрізняють **симетричні** та **несиметричні** нелінійні елементи. Симетричними називають нелінійні елементи, ВАХ яких не залежить від напряму струму в них і полярності прикладеної напруги (наприклад, варистор, симістор). Несиметричними є нелінійні елементи, вигляд ВАХ яких залежить від напрямку струму в них і полярності прикладеної напруги (наприклад, діод, диністор).

Властивості нелінійного елемента можуть бути охарактеризовані його ВАХ, або залежностями його **статичного** і **динамічного (диференціального)** опорів від струму (напруги).

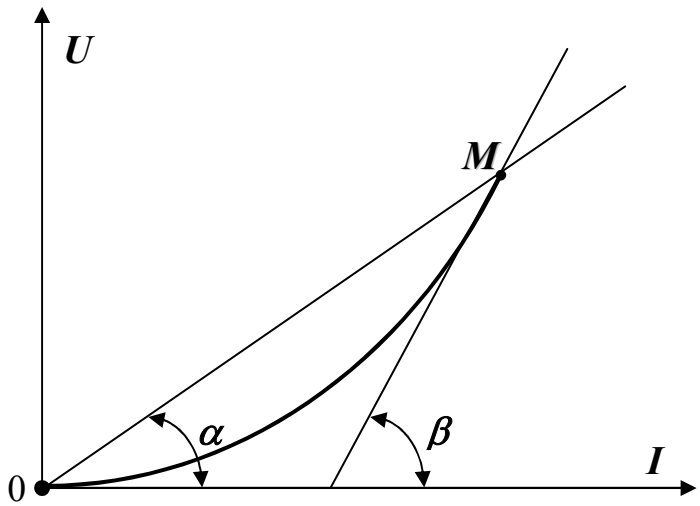


Рисунок 13.2 – ВАХ нелінійного елементу

Тобто, робоча точка ВАХ нелінійного елемента характеризується **статичним** і **динамічним (диференціальним)** опорами.

Під **статичним опором** розуміють величину, яка дорівнює відношенню постійної напруги на нелінійному елементі до постійного струму в ньому у робочій точці.

$$r_{\text{С}} = \frac{U}{I}, \tag{13.1}$$

де $r_{\text{С}}$ – статичний опір нелінійного елементу, *Ом*.

На рисунку 13.2 показана ВАХ нелінійного елементу, побудована в масштабах для струму m_I та напруги m_U . Припустимо, що робочий режим заданий елемента заданий точкою М. Відношення напруги, що вимірюється відрізком Мб до струму, що вимірюється відрізком 0б, визначається в деякому масштабі опору m_r . Для визначення статичного опору графоаналітичним методом необхідно з'єднати робочу точку M з початком координат лінією (рисунок 13.2), яка утворює з віссю струму кут β. Значення статичного опору визначають за рівнянням

$$r_{\text{С}} = m_{\text{r}}\ tg\beta\ . \tag{13.2}$$

З рисунку 13.2 видно, що статичний опір пропорційний тангенсу кута β між прямою, що з’єднує точку М з початком координат, і віссю струму.

Під **динамічним (диференціальним)** опором розуміють скалярну величину, яка дорівнює межі відношення приросту напруги на нелінійному елементі до приросту струму в ньому, коли приріст струму прагне до нуля.

$$r_{\text{Д}} = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI}\ . \tag{13.3}$$

Динамічний опір нелінійного елемента можна визначити графоаналітичним способом, для чого необхідно в робочій точці M провести дотичну (рисунок 13.2), яка утворює з віссю струму кут α. Значення динамічного опору визначають за рівнянням

$$r_{Д} = m_{г}\ tg\alpha\ , \tag{13.4}$$

де $r_{Д}$ – динамічний опір нелінійного елементу, *Ом*;

$m_{г}$ – масштаб опору, *Ом*/*мм*.

Масштаб опору дорівнює частці від ділення масштабу осі напруги на масштаб осі струму

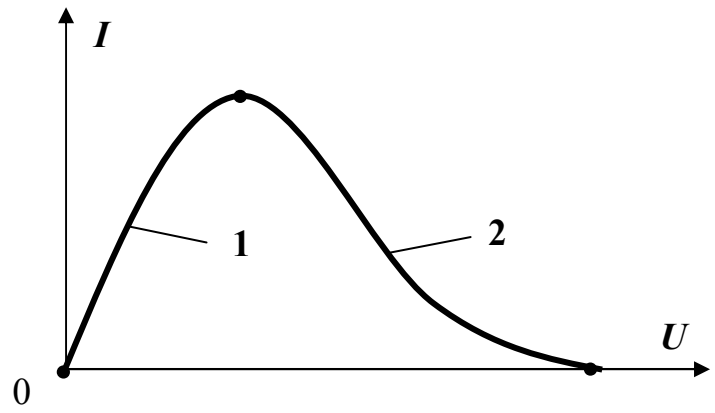
$$m_{г} = \frac{m_{U}}{m_{I}}, \tag{13.5}$$

де m_{U} – масштаб осі напруги, *В*/*мм*;

m_{I} – масштаб осі струму, *А*/*мм*.

Динамічний опір пропорційний тангенсу кута α між дотичною до ВАХ в точці М і віссю струму. Динамічний опір визначає крутизну ВАХ у кожній її точці.

Для нелінійних елементів з падаючою ВАХ динамічний опір негативний, тому що позитивне прирощення струму супроводжується негативним прирощенням напруги(рисунок 13.3).



1 – ділянка з позитивним динамічним опором;
2 – ділянка з негативним динамічним опором

Рисунок 13.3 – ВАХ лямбда-діода

Тобто якщо динамічний опір $r_{Д}$ зростає при збільшенні струму в нелінійному елементі, то опір є **позитивним** і навпаки, у разі збільшення опору $r_{Д}$ при зменшенні струму, динамічний опір є **негативним**. Не-

гативним динамічним опором володіють деякі напівпровідникові пристрої. Наприклад, ділянки з позитивним і негативним опором $r_Д$ має ВАХ лямбда-діода.

В загальному випадку статичний і динамічний опори нелінійного елементу **різні** за величиною і співпадають лише для лінійного елементу. Для прямолінійної ділянки ВАХ динамічний опір дорівнює відношенню кінцевого прирощення напруги до кінцевого прирощення струму, тобто $r_Д = \dfrac{\Delta U}{\Delta I}$.

Розрахунки і дослідження електричних кіл з нелінійними ВАХ в багатьох випадках проводяться графоаналітичними методами. У тих випадках, коли ВАХ можна з достатньою ступінню точності виразити аналітичними функціями (рівняннями), може бути виконаний аналітичний розрахунок.

Приклад 13.1

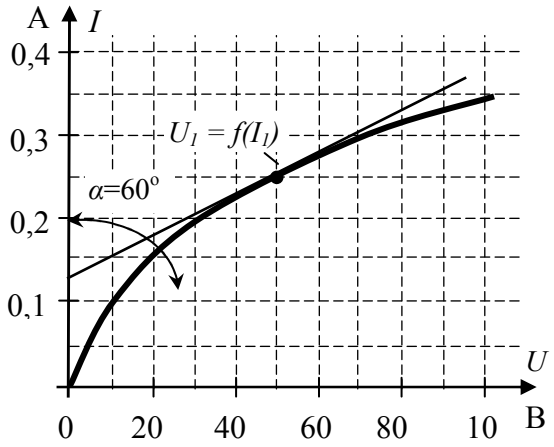


Рисунок 13.4

Для нелінійного резистору, ВАХ якого зображена на рисунку 13.4, **визначити динамічний опір** у робочій точці з напругою 50 В.

Рішення

1. Визначаємо масштаб опору за (13.5):

масштаб напруги $m_U = 2$ *В*/*мм*; масштаб струму $m_I = 0{,}01$ *А*/*мм*;

$$m_{\text{г}} = \frac{m_{\text{U}}}{m_{\text{I}}} = \frac{2}{0{,}01} = 200 \ \ Ом.$$

2. Визначаємо кут між дотичною до робочої точки з напругою 50 В і віссю струму та тангенс цього кута

$$\alpha = 50^{\text{o}};\ tg\alpha = 1{,}73 .$$

3. Визначаємо динамічний опір у робочій точці з напругою 50 В за (13.4)

$$r_{\text{Д}} = 200 \cdot 1{,}73 = 346 \ \ Ом.$$

13.2. Розрахунок кіл при послідовному з'єднанні нелінійних елементів

Розрахункова схема двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів r_1 (I_1) і r_2 (I_2) наведена на рисунку 13.5. Їх ВАХ $I_1(U_1)$ і I_2 (U_2) зображені на рисунку 13.6.

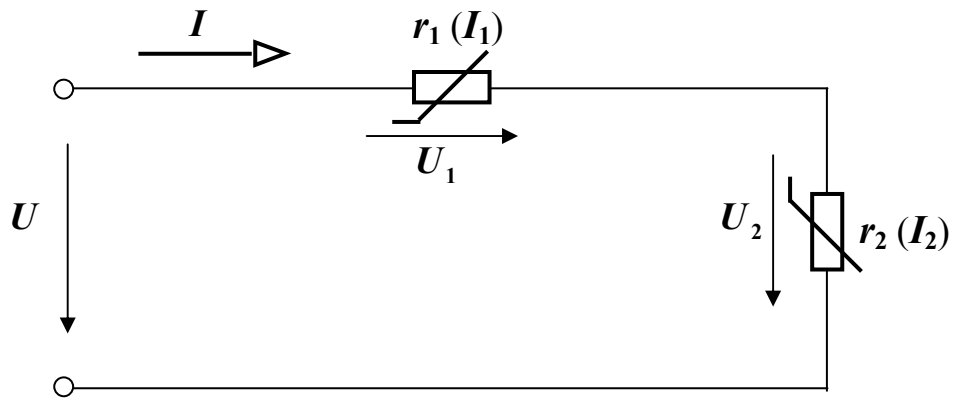


Рисунок 13.5 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних нелінійних елементів r_1 (I_1) і r_2 (I_2)

Як правило, напруга U на затискачах кола відома. Необхідно знайти струм I кола та падіння напруги U_1 і U_2 на нелінійних елементах.

Розрахунок кола виконується графічним методом. З цією метою будується допоміжна ВАХ кола, яка являє собою залежність струму I від прикладеної напруги U. Оскільки в нерозгалуженому колі $I = I_1 = I_2$, то для побудови характеристики $I\ (U_1 + U_2)$ необхідно скласти напруги U_1 і U_2 для однієї і тієї ж сили струму I. Якщо після цього відкласти на осі напруг відрізок Oa, який у масштабі напруги m_U дорівнює напрузі U, а з точки a провести пряму ab, паралельну осі струму, до перетинання з кривою $I\ (U_1 + U_2)$, то одержимо відрізок ab, який у масштабі струму m_I дорівнює струму I. Потім із точки b проводимо пряму bc, паралельну осі напруги. В результаті одержимо відрізки cd і cf, які у масштабі напруги m_U дорівнюють відповідно напругам U_1 і U_2.

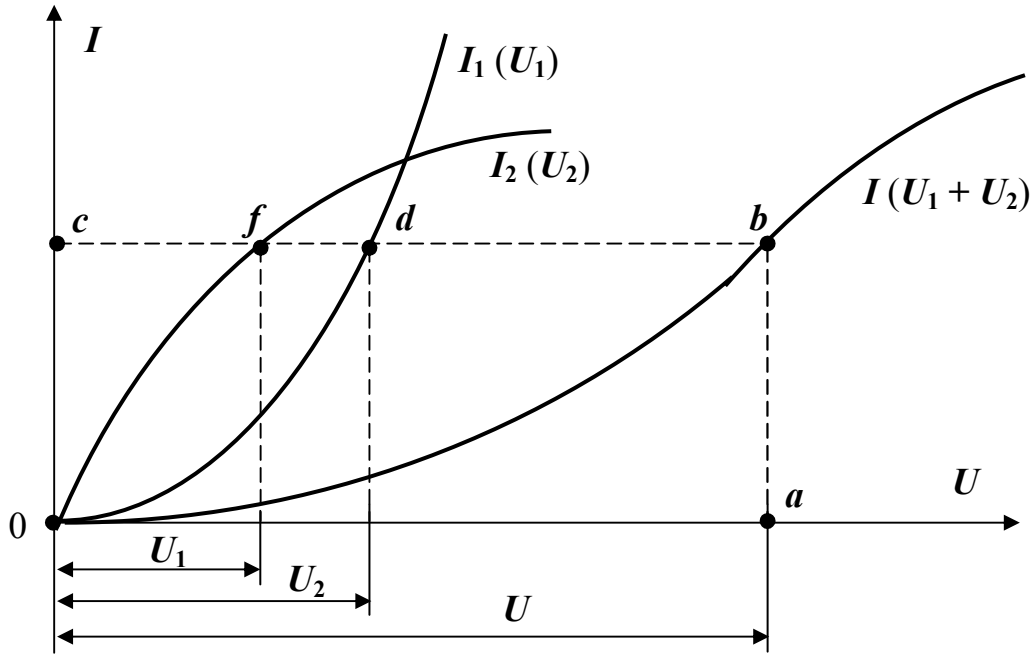


Рисунок 13.6 – Вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ і побудова характеристики $I\ (U_1 + U_2)$ послідовно з'єднаних нелінійних елементів $r_1\ (I_1)$ і $r_2\ (I_2)$

Аналогічно розраховується коло, яке містить більшу кількість послідовно з'єднаних нелінійних елементів.

Приклад 13.2

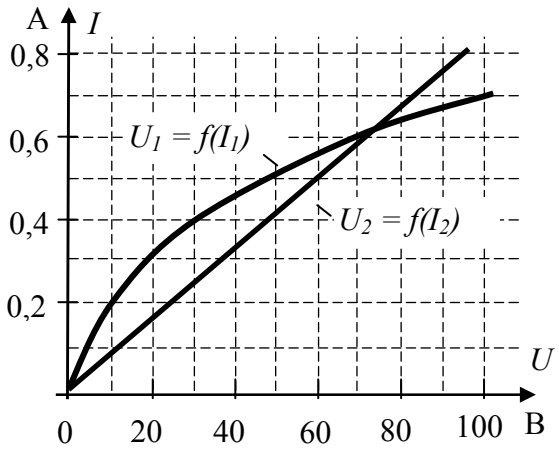


Рисунок 13.7

Нелінійний і лінійний резистори з'єднані послідовно. ВАХ яких, відповідно, $U_1 = f(I_1)$, $U_2 = f(I_2)$ зображені на рисунку 13.7. **Визначити напругу на нелінійному резисторі**, якщо напруга на лінійному резисторі дорівнює 60 В.

Рішення

1. Визначаємо силу струму в електричному колі.

Сила струму на лінійному резисторі та в електричному колі при напрузі на лінійному резисторі U_2 = 60 В з ВАХ $U_2 = f(I_2)$ дорівнює $I_2 = I$ = 0,5 А.

2. Визначаємо напругу на нелінійному резисторі.

З ВАХ нелінійного резистора $U_1 = f(I_1)$ при струмі електричного кола I = 0,5 А напруга дорівнює U_1 = 50 В.

13.3. Розрахунок кіл при паралельному з'єднанні нелінійних елементів

Розрахункова схема двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів r_1 (I_1) і r_2 (I_2) наведена на рисунку 13.8. Їх ВАХ I_1 (U_1) і I_2 (U_2) зображені на рисунку 13.9.

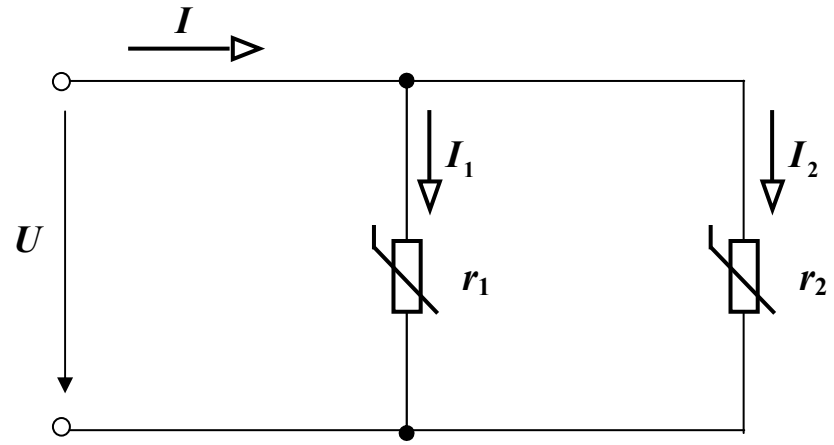


Рисунок 13.8 – Розрахункова схема паралельно з'єднаних нелінійних елементів r_1 (I_1) і r_2 (I_2)

У разі, якщо задана прикладена до затискачів кола напруга U, то за ВАХ I_1 (U_1) і I_2 (U_2) можна визначити струми I_1 і I_2 у розгалуженнях, а за першим законом Кірхгофа $I_1 + I_2 = I$ – струм у нерозгалуженій ділянці кола.

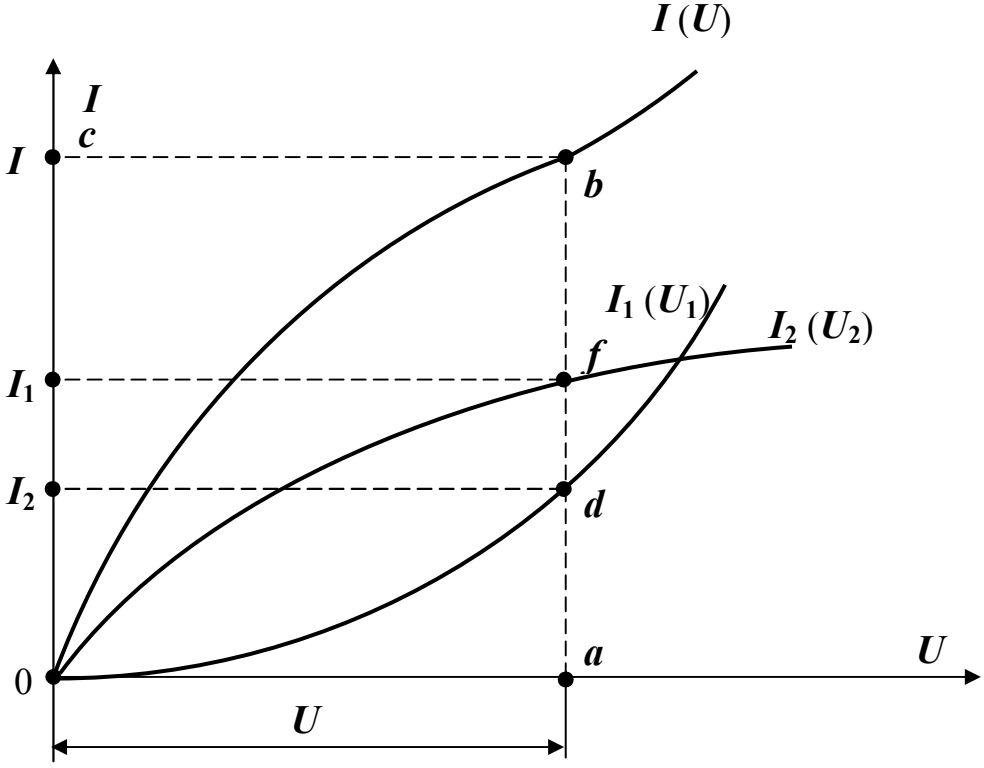


Рисунок 13.9 – Вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ і побудова характеристики I (U) паралельно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$

У випадку, якщо задано струм I, то для визначення напруги U та струмів I_1 і I_2 необхідно побудувати допоміжну ВАХ $I_1 + I_2 = I\ (U)$. Оскільки при паралельному з'єднанні $U_1 = U_2 = U$, то згідно з рівнянням $I = I_1 + I_2$ необхідно скласти ординати кривих $I_1\ (U_1)$ і $I_2\ (U_2)$ для тих самих значень напруг $U_1 = U_2$.

Якщо відкласти на осі ординат відрізок Oc, який у масштабі струму m_1 дорівнює струму I, а потім із точки c провести пряму лінію, паралельну осі абсцис до перетину з кривою $I_1 + I_2 = I\ (U)$, то можна знайти напругу $U = |Oa| \cdot m_U$. Пряма ba, проведена паралельно осі ординат до перетину з вольт-амперними характеристиками нелінійних елементів, дозволяє безпосередньо знайти струми I_1 і I_2.

При змішаному з'єднанні нелінійних елементів розрахунок кола проводиться аналогічно з наведеною вище методикою (п.п. 13.2, 13.3).

13.4 Розрахунок кіл при змішаному з'єднанні нелінійних і лінійних елементів

Розрахункова схема зі змішаним з'єднанням нелінійних і лінійних елементів наведена на рисунку 13.9.

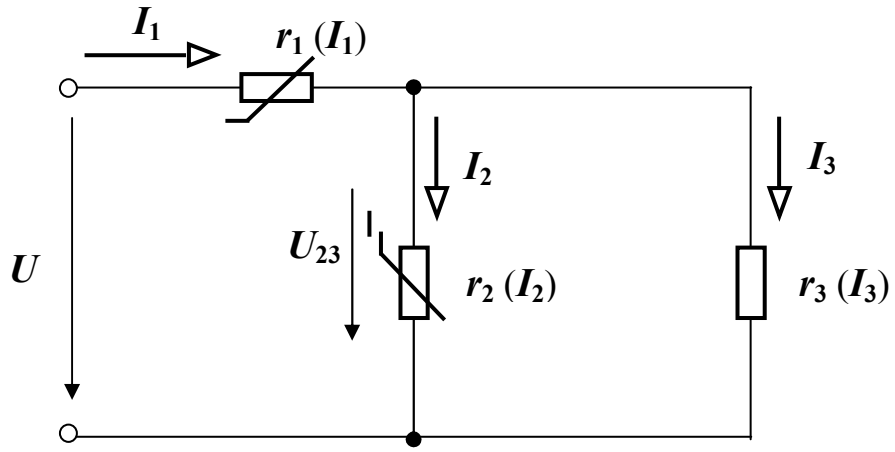


Рисунок 13.8 – Розрахункова схема змішаного з'єднання елементів $r_1\ (I_1)$, $r_2\ (I_2)$ і $r_3\ (I_3)$

Задані напруга джерела живлення U, залежності r_1 (I_1) і r_2 (I_2) і опір r_3 лінійного елементу; необхідно знайти струми на всіх ділянках і напруги на елементах.

Для визначення струмів і напруг можна застосувати, також як при розрахунку послідовного і паралельного з'єднання кіл, графічний метод.

Порядок розрахунку кола наступний. Будуємо ВАХ нелінійних елементів $\boldsymbol{I_1}$ ($\boldsymbol{U_1}$), $\boldsymbol{I_2}$ ($\boldsymbol{U_2}$) і по заданому опору r_3 будуємо ВАХ $\boldsymbol{I_3}$ ($\boldsymbol{U_3}$) в одних вісях. Проводимо еквівалентне перетворення паралельної ділянки кола, для цього підсумовуючи ординати ВАХ $\boldsymbol{I_2}$ ($\boldsymbol{U_2}$) і прямої $\boldsymbol{I_3}$ ($\boldsymbol{U_3}$) для одних і тих же значень напруг $\boldsymbol{U_2 = U_3 = U_{23}}$ будуємо ВАХ паралельного з'єднання ($\boldsymbol{I_2 + I_3}$)$\boldsymbol{U_{23}}$ на графіку позначену як $\boldsymbol{I_1}$ ($\boldsymbol{U_{23}}$). Після еквівалентного перетворення отримуємо нерозгалужене коло з послідовно з'єднаними опорами (рисунок 13.9).

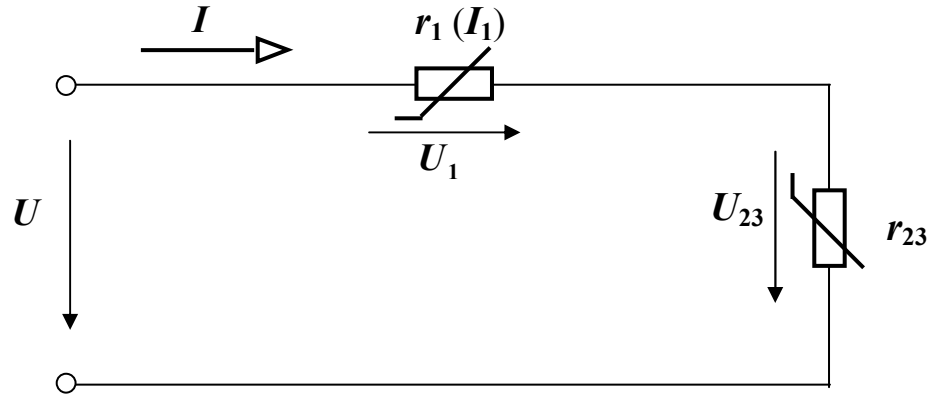


Рисунок 13.9 – Розрахункова схема після еквівалентного перетворення кола

Потім підсумовуємо абсциси кривих $\boldsymbol{I_1}$ ($\boldsymbol{U_1}$) і $\boldsymbol{I_1}$ ($\boldsymbol{U_{23}}$) для одних і тих же значень струму $\boldsymbol{I_1 = I_2 + I_3}$ і отримуємо ВАХ всього електричного кола $\boldsymbol{I_1(U_1 + U_{23}) = I_1}$ ($\boldsymbol{U}$).

Для заданої напруги $\boldsymbol{U}$ всього кола і ВАХ кола $\boldsymbol{I_1}$ ($\boldsymbol{U}$) визначаємо струм нерозгалуженої ділянки кола $\boldsymbol{I_1}$. Відрізок $\boldsymbol{I_1 b}$ від точки $\boldsymbol{b}$

перетину прямої $\boldsymbol{I_1 a}$ з ВАХ паралельного ділянки елементів до початку координат відповідає напрузі на паралельній ділянці кола $\boldsymbol{U_{23}}$.

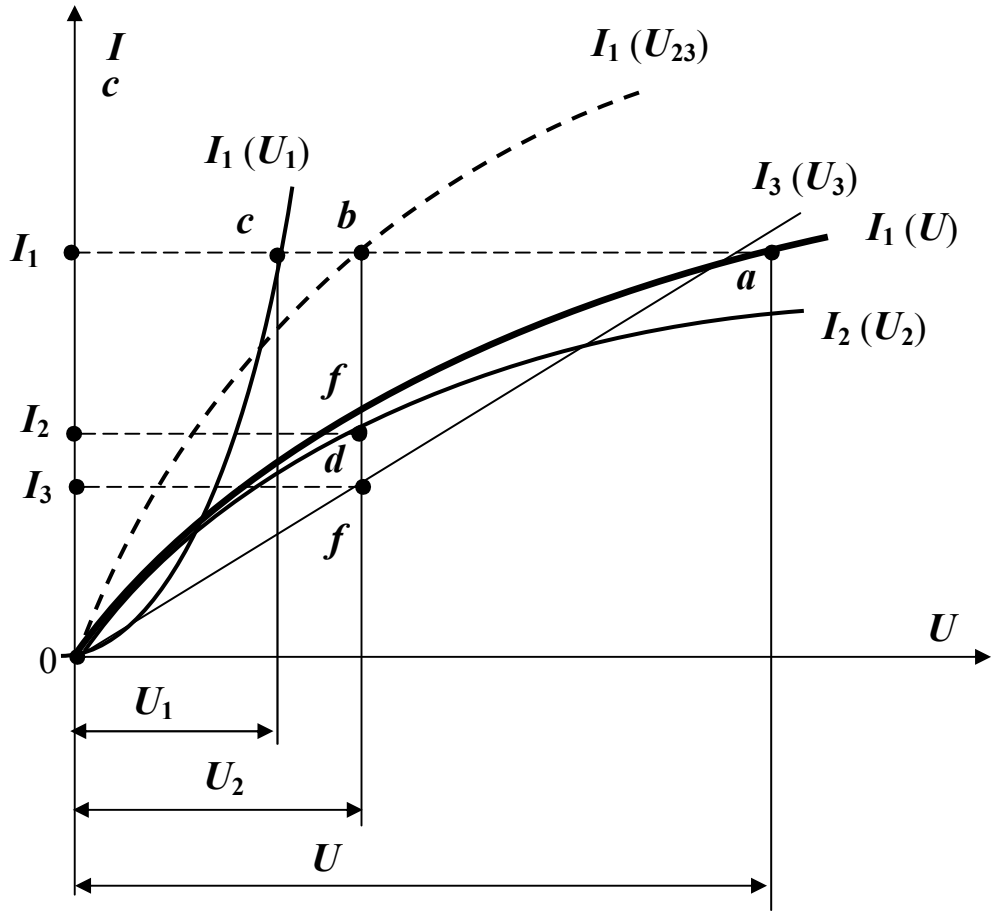


Рисунок 13.9 – Вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ і $I_3(U_3)$ та побудова характеристики I_1 (U) змішаного з'єднання елементів $r_1(I_1)$ $r_2(I_2)$ і $r_3(I_3)$

Відрізок $\boldsymbol{I_1 c}$ від точки $\boldsymbol{c}$ перетину прямої $\boldsymbol{I_1 a}$ з ВАХ $\boldsymbol{I_1}$ $(\boldsymbol{U_1})$ першого нелінійного елементу до початку координат відповідає напрузі на ділянці кола $\boldsymbol{U_1}$. Відрізок $\boldsymbol{I_1 в}$ від точки *в* перетину прямої $\boldsymbol{I_1 a}$ з ВАХ $\boldsymbol{I_1}$ $(\boldsymbol{U_{23}})$ ділянки паралельного включення резисторів r_2, r_3, до початку координат відповідає напрузі на ділянці кола $\boldsymbol{U_2}$.

За допомогою ВАХ $\boldsymbol{I_2}$ $(\boldsymbol{U_2})$ і напруги паралельної ділянки $\boldsymbol{U_{23}}$ визначаємо струм $\boldsymbol{I_2}$ на другому нелінійного елементу. За допомогою

ВАХ $\boldsymbol{I_3}$ ($\boldsymbol{U_2}$) і визначеної напруги ділянки з паралельним включення резисторів r_2, r_3 $\boldsymbol{U_{23}}$ визначаємо струм $\boldsymbol{I_3}$ (рисунок 13.8).

Приклад 13.3

При змішаному з'єднанні першого нелінійного резистору з паралельно з'єднаними другим і третім нелінійними резисторами сили струмів і напруг на резисторах відповідно дорівнюють: U_1 = 8 В, I_1 = 4 А; U_2 = 12 В, I_2= 1 А; U_3 = 12 В, I_3= 3 А. **Визначити електричні потужності, що споживаються нелінійними резисторами електричного кола**. **Перевірте баланс електричної потужності кола**.

Рішення

1. Визначаємо електричні потужності, що споживають нелінійні резистори.

$$P_1 = U_1 \cdot I_1;\ P_1 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ Вт};$$

$$P_2 = U_2 \cdot I_2;\ P_2 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ Вт};$$

$$P_3 = U_3 \cdot I_3;\ P_2 = 12 \cdot 3 = 36 \text{ Вт}.$$

2. Визначаємо напругу всього електричного кола.

Згідно другого закону Кірхгофа $U = U_1 + U_2$, оскільки $U_2 = U_3$.

$$U = 8 + 12 = 20 \text{ В}.$$

3. Визначаємо силу струму електричного кола.

Згідно першого закону Кірхгофа $I - I_2 - I_3 = 0$ або $I = I_2 + I_3$.

$$I = 1 + 3 = 4 \text{ А}.$$

4. Визначаємо електричну потужність, що споживають всі нелінійні резистора кола.

$$P = U \cdot I;\ P = 20 \cdot 4 = 80 \text{ Вт}$$

5. Баланс електричної потужності кола.

$$P = P_1 + P_2 + P_3\ ;$$

$$P = 32 + 12 + 36 = 80 \text{ В}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається вольт-амперною характеристикою елемента електричного кола?
2. Які елементи електричного кола називаються лінійними?
3. Які елементи електричного кола називаються нелінійними?
4. Яке з’єднання елементів кола називають послідовним?
5. Яке з’єднання елементів кола називають паралельним?
6. Приведіть приклади нелінійних елементів.
7. Які нелінійні елементи називають симетричними?
8. Які нелінійні елементи називають несиметричними?
9. Що називається статичним опором нелінійного елемента?
10. Як розрахувати статичний опір нелінійного елемента?
11. Що називається динамічним опором нелінійного елемента?
12. Як розрахувати динамічний опір нелінійного елемента?
13. Як розрахувати масштаб опору?
14. Що розуміють під позитивним динамічним опором?
15. Що розуміють під негативним динамічним опором?
16. Наведіть приклади нелінійних елементів, які мають позитивний динамічний опір
17. Наведіть алгоритм побудови ВАХ електричного кола з послідовно з'єднаними нелінійними резисторами, якщо ВАХ елементів кола задані у вигляді таблиці.
18. Наведіть алгоритм побудови ВАХ електричного кола з паралельно з'єднаними нелінійними резисторами, якщо ВАХ елементів кола задані у вигляді таблиці.
19. Як визначити силу струму електричного кола з послідовно з'єднаними нелінійними резисторами, якщо задані ВАХ елементів і

величина ЕРС джерела?

20. Як визначити напругу на затискачах електричного кола з паралельно з'єднаними нелінійними резисторами, якщо задані ВАХ елементів кола і сила струму в нерозгалуженій частині кола?
21. Наведіть алгоритм побудови ВАХ електричного кола при змішаному з'єднаними нелінійних і лінійного резисторів, якщо ВАХ елементів кола задані у вигляді таблиці і задана напруга кола?
22. Як за допомогою ВАХ паралельно з'єднаних елементів побудувати ВАХ паралельної ділянки кола?
23. Як за допомогою ВАХ послідовно з'єднаного елемента і ВАХ паралельно з'єднаних елементів побудувати ВАХ кола ?
24. Як за допомогою ВАХ електричного кола і заданого значення напруги кола визначити струм у нерозгалуженій ділянці кола?
25. Як за допомогою ВАХ паралельно з'єднаних елементів визначити струми на паралельних ділянках електричного кола?
26. Як перевірити вірність розрахунку сил струмів у електричному колі?
27. Як перевірити вірність розрахунку напруг на ділянках електричного кола?
28. Як визначити електричну потужність, споживану кожною ділянкою електричного кола?
29. Що розуміють під балансом електричної потужності електричного кола? Як зробити перевірку балансу потужності в електричному колі?
30. Як визначити електричну енергію, що споживають резистори і електричне коло?

ТЕМА 14

МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ

14.1. Явище і закон електромагнетизму

Магнітне поле являє собою особливий вид матерії, за допомогою якої здійснюється взаємодія між рухомими зарядженими частинками. Джерелами магнітного поля є природні магніти і електромагніти, в яких магнітне поле створюється під дією електричного струму в результаті **явища електромагнетизму**, тобто навколо провідника зі струмом утворюється магнітне поле.

Магнітне поле зображується за допомогою силових ліній – уявних ліній, дотичні до яких в кожній точці поля збігаються за напрямком з вектором магнітної індукції.

Напрям силових ліній магнітного поля визначається за правилом **«буравчика»** або «правового гвинта»: якщо вкручувати буравчик (правий гвинт) за напрямом електричного струму, то напрям його обертання буде збігатися з напрямом силових ліній магнітного поля (рисунок 14.1).

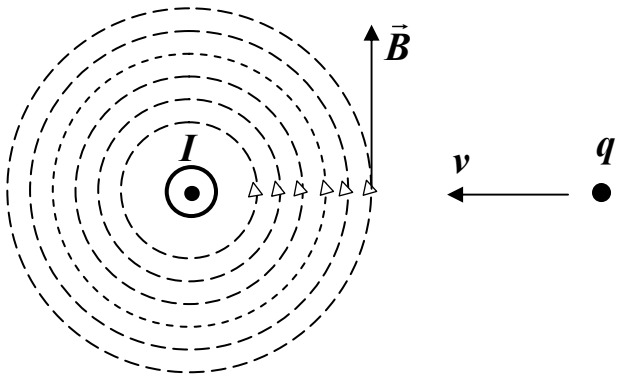


Рисунок 14.1 – Визначення напряму силових ліній магнітного поля за правилом «буравчика»

Магнітне поле, створене навколо провідника зі струмом характеризується магнітною індукцією та напруженістю магнітного поля.

Магнітна індукція ***B*** є векторною силовою характеристикою магнітного поля (рисунок 14.2). **Вектор магнітної індукції** в будь-якій точці магнітного поля є **дотичною** до силової лінії магнітного поля. Модуль магнітної індукції дорівнює відношенню сили магнітного поля до добутку величини електричного заряду на швидкість його руху або обертаючого моменту рамки зі струмом (поміщеної в дану точку поля) до добутку площі рамки на силу струму в ній

$$B = \frac{F}{q \cdot v} = \frac{M}{I \cdot S}, \qquad (14.1)$$

де B – магнітна індукція, *Тл*;

F – сила магнітного поля, *Н*;

q – величина заряду, *Кл*;

v – швидкість руху заряду, *м/с*;

M – обертаючий момент, *Н·м*;

I – сила струму, *А*;

S – площа рамки, $м^2$.

Магнітне поле, вектор магнітної індукції $\vec{B}$ якого в кожній точці цієї області є постійним називається однорідним магнітним полем.

Потік вектору магнітної індукції через дану поверхню магнітного поля, або скорочено **магнітний потік** – є скалярною фізичною величиною, що характеризує число ліній магнітної індукції поля, які пронизують замкнутий контур:

$$\Phi = \int_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}. \qquad (14.2)$$

Для однорідного магнітного поля, в якому вектор магнітної індукції $\vec{B}$ в любій точці перпендикулярний поверхні S, **величина** маг-

нітного потоку дорівнює добутку магнітної індукції на площу, через яку проходить магнітне поле

$$\Phi = B \cdot S, \qquad (14.3)$$

де Φ – магнітний потік, *Вб*;

B – магнітна індукція, *Тл*;

S – площа поверхні, через яку проходить магнітний потік, $м^2$.

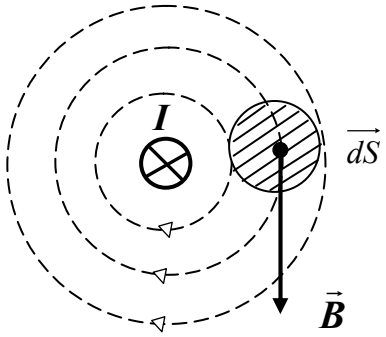


Рисунок 14.2 – Потік вектору магнітної індукції через поверхню магнітного поля

Приклад 14.1

У магнітному полі постійного магніту знаходиться рамка зі струмом. Сила струму в рамці дорівнює 10 *А*. На рамку діє обертаючий момент 0,2 *Н·м.* Площа рамки дорівнює 100 $см^2$. Площа поперечного перерізу кожного полюса магніту дорівнює 200 $см^2$. **Визначити: магнітну індукцію поля; магнітний потік між полюсами**.

Рішення.

1. Визначаємо магнітну індукцію поля за виразом (14.1):

$$B = \frac{M}{I \cdot S_1} = \frac{0{,}2}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{10^3 \cdot 10^{-4}} = 2 \ \ Тл \cdot$$

2. Визначаємо магнітний потік між полюсами за виразом (14.3):

$$\Phi = B \cdot S_2 = 2 \cdot 200 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} = 0{,}04 \ Вб.$$

Зв'язок між магнітним потоком, утвореним котушкою зі струмом та силою електричного струму встановлює **закон електромагнетизму: потокозчеплення** (*добуток кількості витків котушки на магнітний потік*) **прямо пропорційно добутку індуктивності котушки на силу електричного струму**

$$\psi = w \cdot \Phi = L \cdot I, \qquad (14.4)$$

де ψ – потокозчеплення, *Вб*;

w – кількість витків котушки;

Φ – магнітний потік, *Вб*;

L – індуктивність котушки, *Гн*;

I – сила електричного струму, *А*.

Приклад 14.2

Котушка індуктивності з феромагнітним осердям має 200 *витків*. Сила електричного струму, який тече в котушці дорівнює 10 *А*. Магнітний потік у феромагнітному осерді дорівнює 0,04 *Вб*. **Визначити: потокозчеплення котушки; індуктивність котушки.**

Рішення.

1. Визначаємо потокозчеплення котушки за виразом (14.4):

$$\psi = w \cdot \Phi = 200 \cdot 0{,}04 = 2 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 8 \text{ Вб}.$$

2. Визначаємо індуктивність котушки з формули (14.4):

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \text{ Гн}.$$

Якщо провід з електричним струмом помістити в різні середовища (мається на увазі склад, стан, температура, тощо), то значення магнітної індукції буде різним (рисунку 14.3) і буде залежати від властивостей кожного середовища.

Ще однією характеристикою магнітного поля є **напруженість магнітного поля**, під якою розуміється відношення магнітної індукції до магнітної проникності середовища

$$H = \frac{B}{\mu_C}, \tag{14.5}$$

де H – напруженість магнітного поля, *А/м*;

B – магнітна індукція, *Тл*;

μ_C – магнітна проникність середовища, *Гн/м*.

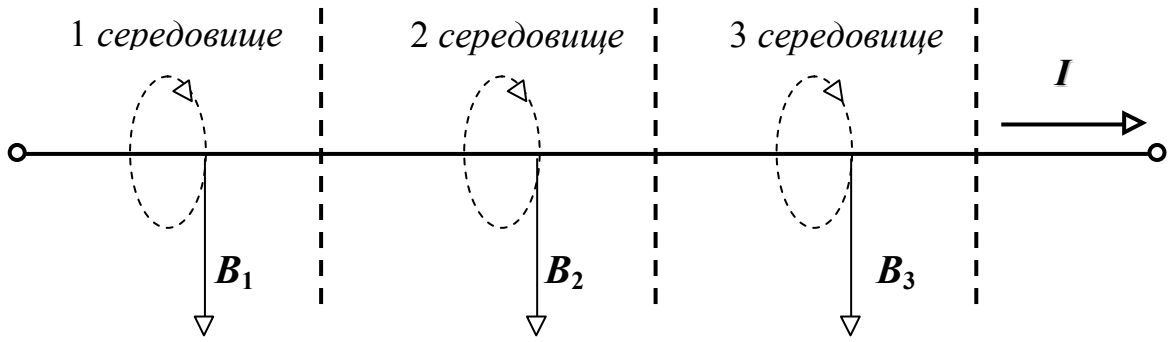


Рисунок 14.3 – Залежність значення магнітної індукції від середовища

Магнітну проникність середовища (абсолютну) можна знайти так

$$\mu_C = \mu \mu_0 , \tag{14.6}$$

де μ_C – магнітна проникність середовища, *Гн/м*;

μ – відносна магнітна проникність середовища;

μ_0 – магнітна постійна, *Гн/м*; $\boldsymbol{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м.}$

Приклад 14.3

У котушці індуктивності з феромагнітним осереддям протікає електричний струм і створює магнітне поле. Магнітна індукція в маг-

нітопроводі дорівнює 1,2 *Тл*, відносна магнітна проникність матеріалу магнітопроводу дорівнює 2500/π, магнітна постійна $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м.*

Визначити: магнітну проникність магнітопроводу і напруженість магнітного поля в магнітопроводі

Рішення.

1. Визначаємо магнітну проникність магнітопроводу за (14.6)

$$\mu_C = \mu\,\mu_0 = 2500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} = 0{,}001 \text{ Гн/м.}$$

2. Визначаємо напруженість магнітного поля в магнітопроводі за виразом (14.5)

$$H = \frac{B}{\mu_C} = \frac{1{,}2}{0{,}001} = = 1200 \text{ А/м.}$$

14.2. Магнітне коло та його конструктивна схема

Між електричним і магнітним колом існує аналогія. Так, під **магнітним колом** розуміється сукупність пристроїв, які забезпечують можливість створення магнітного потоку.

Магнітне коло містить **магнітопровід** (призначений для замикання і підсилення магнітного потоку), а також котушку зі струмом, виконану з проводу (призначену для протікання електричного струму і створення магнітного потоку), яка живиться від джерела постійної напруги. Приклад конструктивної схеми нерозгалуженого магнітного кола наведено на рисунку 14.4.

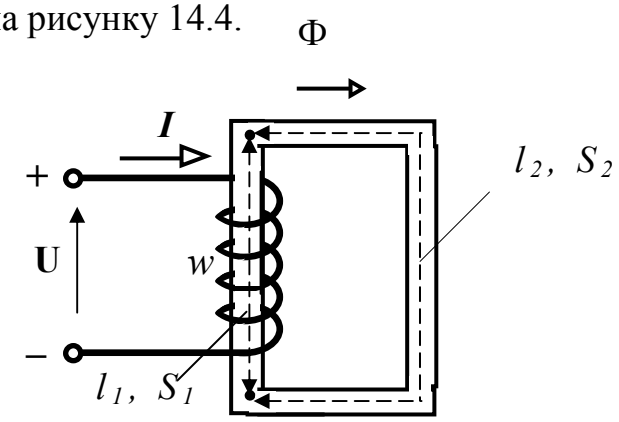


Рисунок 14.4 – Конструктивна схема нерозгалуженого магнітного кола

Магнітопровід містить дві ділянки: перша ділянка з довжиною середньої магнітної лінії l_1, перетином S_1; друга ділянка з довжиною середньої магнітної лінії l_2, перетином S_2. Котушка має w витків.

До котушки підведена напруга U, під дією якої тече намагнічуючий струм I. Згідно з явищем електромагнетизму, навколо котушки зі струмом I утворює магнітний потік Φ.

Основний закон, що характеризує однорідне магнітне поля є **закон повного струму**: **інтеграл від напруженості магнітного поля** (рисунок 14.5) **по замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що пронизують цей контур**.

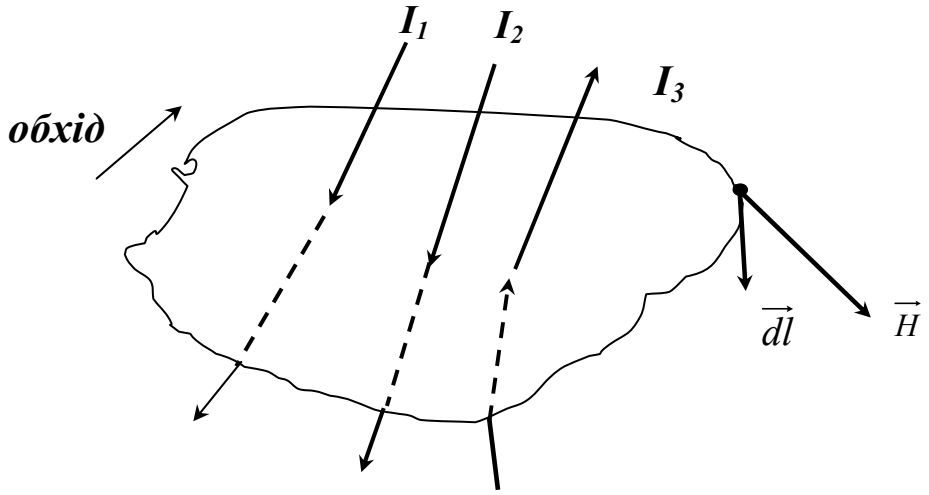


Рисунок 14.5 – Однорідне магнітне поле, що створюється струмами

Математичний запис закону повного струму

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_n I_i \,. \tag{14.7}$$

Струми, для яких магнітні лінії співпадають з напрямом обходу контуру, записуються зі знаком «+», а струми зворотного напряму – зі знаком «-».

У практичних розрахунках використовують закон повного струму для однорідного магнітного поля, формулювання якого наступне: **намагнічуюча сила *(добуток кількості витків котушки на силу струму*) прямо пропорційна добутку напруженості магнітного поля на довжину магнітопровіду**

$$F = w\ I = H_i \cdot l_i, \tag{14.8}$$

де F – намагнічуюча сила котушки, A;

w – кількість витків котушки;

I – сила струму, який протікає в котушці, A;

H_i – напруженість на ділянках магнітного поля, $A/м$;

l_i – довжина ділянок магнітопроводу котушки, $м$.

З рівняння (14.7) можна знайти залежність напруженості магнітного поля від намагнічуючого струму

$$H = \frac{w \cdot I}{l}, \tag{14.9}$$

Якщо по котушці пропускати електричний струм, змінюючи силу електричного струму від нуля до певного значення, то відповідно з (14.4) буде змінюватися і магнітна індукція за законом

$$B = \mu_C \cdot H. \tag{14.10}$$

Магнітний потік буде змінюватися за законом:

$$\Phi = \mu_C\ H\ S\ . \tag{14.11}$$

14.3. Крива намагнічування

Матеріали, здатні сильно намагнічуватися в слабких магнітних полях, називають феромагнітними (феромагнетиками). Основні характеристики феромагнетиків визначають по кривим намагнічування – залежності магнітної індукції від напруженості магнітного поля. З курсу фізики відомо, що з ростом магнітного потоку у феромагнетику

його магнітна проникність буде зменшуватися. Тому залежність магнітної індукції від напруженості магнітного поля $B = f(H)$ буде нелінійною. Така крива (рисунок 14.6) вперше була експериментально встановлена для м'якого заліза російським фізиком *Олександром Григоровичем Столетовим* у 1871 *році*.

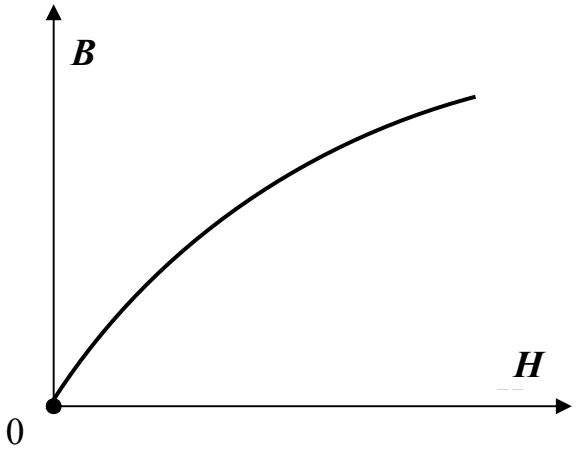


Рисунок 14.6 – Крива намагнічування $B = f(H)$

Як видно з кривої намагнічування на рисунку 14.5 з ростом напруженості поступово настає насичення феромагнітного матеріалу і магнітна індукція далі практично не зростає. Тобто відношення $\frac{B}{H} = \mu_c = \text{var}$.

Залежність $B = f(H)$ для феромагнітних матеріалів не має точного аналітичного рівняння, тому для кожного феромагнітного матеріалу цю залежність зображують у вигляді кривих намагнічування, які визначають експериментальним шляхом. Початкові криві намагнічування знімають у процесі намагнічування попередньо термічно розмагніченого магнітного матеріалу при поступовому зростанні магнітного поля. До феромагнітних матеріалів відносяться залізо і його сплави, ферити та магнітодіелектрики на основі карбонільного заліза, що виготовляються пресуванням порошку карбонільного заліза з бакелітом, амінопластом або іншими зв’язуючими речовинами.

14.4. Петля гістерезису

Петля гістерезису – це замкнута крива, що виражає залежність магнітної індукції в феромагнітному осерді від напруженості магнітного поля ***B= f (H)***, що отримають при циклічному намагнічуванні феромагнітного матеріалу.

Якщо напруженість магнітного поля в осередді з феромагнітного матеріалу спочатку плавно змінювати від нуля до позитивного максимального значення ($+H_{max}$) (рисунок 14.7), а потім в межах від позитивного максимального значення до негативного максимального значення ($-H_{max}$) і від ($-H_{max}$) до ($+H_{max}$), тоді отримаємо залежність магнітної індукції в осерді від напруженості магнітного поля або петлю магнітного гістерезису.

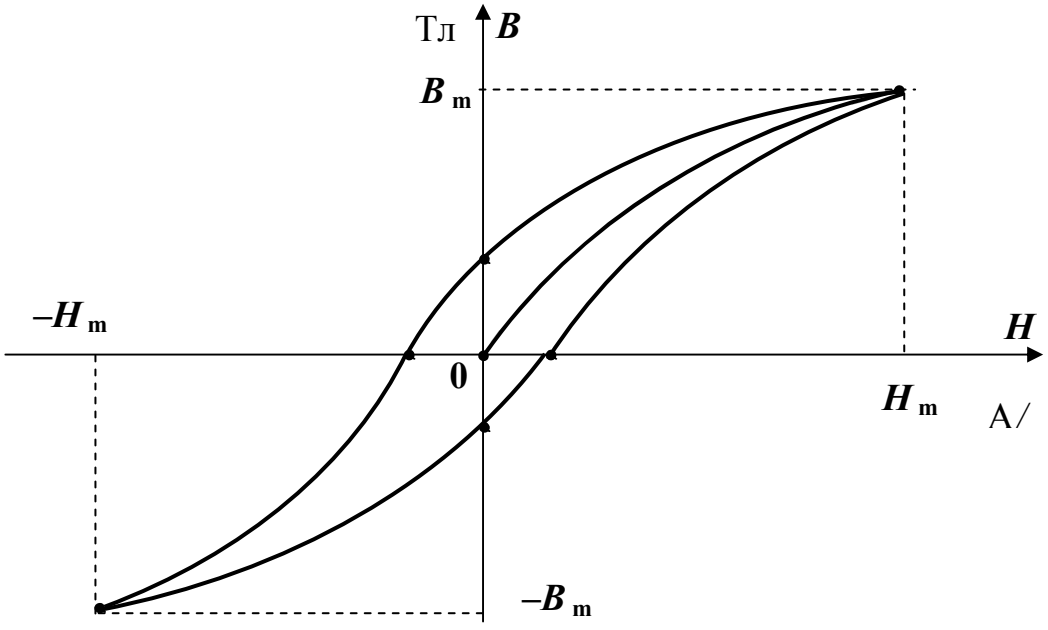


Рисунок 14.7 – Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

У першому циклі намагнічування і розмагнічування феромагнітного матеріалу петля не замкнута, але після ряду циклів перемагнічування виходить стійка симетрична петля. З курсу фізики відомо, що площа петлі гістерезиса прямо пропорційна втратам електричної енер-

гії на перемагнічування магнітопроводу. Для зменшення витрат потужності на гістерезис магнітопроводи електричних машин, трансформаторів та інших електротехнічних пристроїв, що містять феромагнітні магнітопроводи, виконують з магнітом'яких матеріалів, що характеризуються високою магнітною проникністю, невеликою коерцитивною силою і малими втратами на гістерезис: з холоднокатаної (м'якої) сталі.

14.5. Аналогія між електричними і магнітними колами

Між величинами, що характеризують магнітні і електричні кола, існує формальна аналогія, що дозволяє для магнітних кіл ввести ряд понять, аналогічних поняттям, які застосовуються в електричних колах. Ця аналогія розповсюджується і на методи розрахунку магнітних кіл.

Розглянемо на прикладі магнітного кола, яке має наступну конструктивну схему нерозгалуженого магнітного поля (рисунок 14.8), що має дві ділянки з різними довжинами і перетинами.

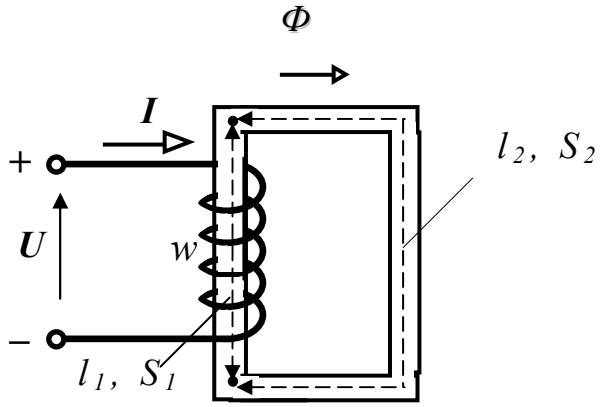


Рисунок 14.8 – Конструктивна схема нерозгалуженого магнітного кола

Запишемо рівняння магнітного кола (рисунок 14.7) за законом повного струму для однорідного магнітного поля

$$wI = H_1 l_1 + H_2 l_2 , \qquad (14.12)$$

де H_1 і H_2 – відповідно напруженості магнітного поля на першій і другій ділянках, *А*/*м*;

l_1 і l_2 – відповідно довжини середніх магнітних ліній першої і другої ділянок, *м*.

Підставимо в рівняння (14.12) напруженість магнітного поля, яка є відношенням магнітної індукції до магнітної проникності середовища. В результаті одержимо

$$wI = \frac{B_1}{\mu_{C1}} l_1 + \frac{B_2}{\mu_{C2}} l_2 , \tag{14.13}$$

де B_1 і B_2 – відповідно магнітні індукції на першій і другій ділянках магнітного поля, *Тл*;

μ_{C1} і $\mu_{з2}$ – відповідно магнітні проникності першої і другої ділянок магнітного поля, *Гн*/*м*.

Якщо представити в рівнянні (14.13) магнітні індукції ділянок кола через магнітний потік і перетин ділянок кола

$$wI = \Phi \frac{l_1}{\mu_{C1} S_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_{C2} S_2} , \tag{14.14}$$

можна отримати вираз **магнітного опору** ділянки магнітного кола

$$R_M = \frac{l}{\mu_C S} , \tag{14.15}$$

де l – довжина середньої магнітної лінії ділянки, *м*;

S – площа поперечного перерізу ділянки, $м^2$;

μ_C – магнітна проникність ділянки магнітопроводу, *Гн*/*м*.

З урахуванням (14.15) вираз (14.14) приймає вигляд

$$wI = R_{M1}\Phi + R_{M2}\Phi . \tag{14.16}$$

Введемо поняття **магнітної напруги** на ділянці магнітного кола

$$U_M = R_M \cdot \Phi \tag{14.17}$$

і **намагнічуючої (*магніторушійної*) сили (МРС)**, під якою будемо розуміти добуток кількості витків обмотки на силу струму в ній

$$F = w \cdot I \,. \tag{14.18}$$

Таким чином одержимо рівняння магніторушійної сили в залежності від магнітних напруг ділянок магнітного кола

$$F = U_{M1} + U_{M2} \,. \tag{14.19}$$

Рівняння (14.19) є формальною аналогією закону Ома для замкнутого електричного кола. Між величинами, що характеризують магнітні і електричні кола аналогія представлена в таблиці 14.1.

Таблиця 14.1 – Аналогія між фізичними величинами електричного і магнітного кола

Електричні величини	Магнітні величини
E – електрорушійна сила, В	F – магніторушійна сила, А
R – опір електричному струму, Ом	R_M – опір магнітному потоку, 1/Гн
I – сила електричного струму, А	$Ф$ – магнітний потік, Вб
U – напруга на ділянці кола, В	U_M – магнітна напруга на ділянці кола, А

14.6. Розрахункова схема магнітного кола

Розрахункова схема магнітного кола складається аналогічно розрахунковій схемі електричного кола, враховуючи її конфігурацію. Так, для магнітного кола, приведеного на рисунку 14.4, розрахункова схема має вигляд, представлений на рисунку 14.9. На розрахунковій схемі графічно і за допомогою літер позначені наступні величини:

F – намагнічуюча сила або магніторушійна сила (МРС), A;

R_{M1} , R_{M2} – магнітні опори ділянок кола, $1/Гн$;

U_{M1} , U_{M2} – магнітні напруги на ділянках кола, A;

$Ф$ – магнітний потік, $Вб$.

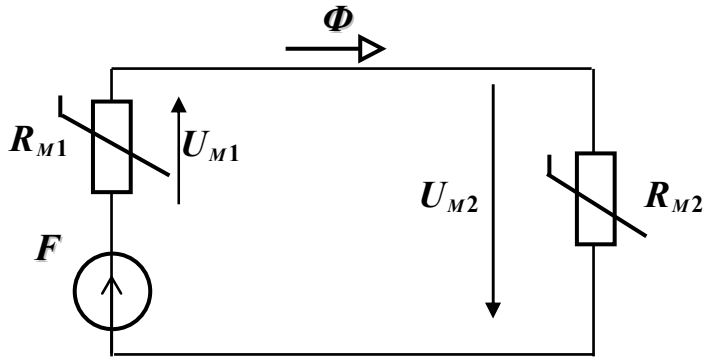


Рисунок 14.9 – Розрахункова схема магнітного кола

14.7. Закони магнітних кіл

Запишемо закони Ома і Кірхгофа для магнітних кіл за аналогією з електричними колами постійного струму.

Згідно **закону Ома для ділянки магнітного кола без джерела МРС** магнітний потік прямо пропорційний магнітній напрузі на ділянці кола і зворотно пропорційний магнітному опору ділянки кола.

Математичний запис закону

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}, \tag{14.20}$$

де Φ – магнітний потік на ділянці кола, *Вб*;

U_M – магнітна напруга на ділянці кола, *А*;

R_M – магнітний опір ділянки кола, 1/*Гн*.

Наприклад, для ділянки нерозгалуженого магнітного кола з магнітним опором R_{M1} (рисунок 14.9) даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 = \frac{U_{M1}}{R_{M1}}. \tag{14.21}$$

Закон Ома для замкненого магнітного кола з джерелом МРС формулюється так: магнітний потік дорівнює відношенню магніторушійної сили до суми магнітних опорів кола.

Математичний запис закону

$$\Phi = \frac{F}{\sum R_M}, \tag{14.22}$$

де Φ – магнітний потік на ділянці кола, *Вб*;

F – магніторушійна сила, *А*;

$\sum R_M$ – сума магнітних опорів кола, $1/Гн$.

Наприклад, для замкненого магнітного кола з однією МРС і двома ділянками з різним магнітним опором (рисунок 14.9) даний вираз має наступний вигляд

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \tag{14.23}$$

Математичний запис **узагальненого закону Ома для магнітного кола** виглядає так

$$\Phi = \frac{U_M + \sum F}{\sum R_M}, \tag{14.24}$$

де U_M – магнітна напруга на ділянці магнітного кола з МРС, *А*.

$\sum F$ – алгебраїчна сума МРС у замкненому контурі кола, *А*.

Для складання законів Кірхгофу розглянемо розгалужене магнітне коло (рисунок 14.10) і його розрахункову схему (рисунок 14.11).

Перший закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола формулюється так: **алгебраїчна сума магнітних потоків у вузлі кола дорівнює нулю**. При цьому магнітні потоки, що входять у вузол, записуються зі знаком «плюс», а магнітні потоки, що виходять з вузла, записуються зі знаком «мінус».

Математичний запис першого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i = 0. \tag{14.25}$$

Наприклад, для вузла «*а*» розгалуженого магнітного кола (рисунок 14.11), даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \tag{14.26}$$

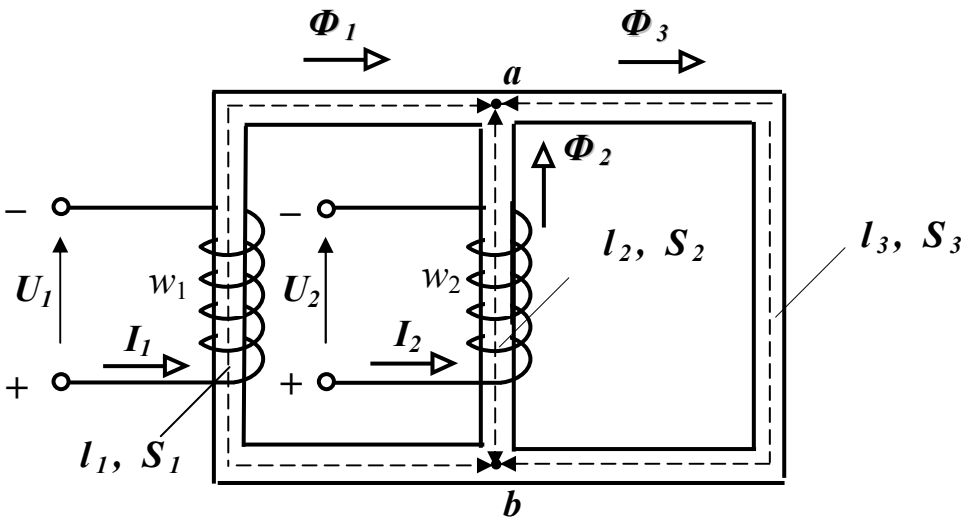


Рисунок 14.10 – Конструктивна схема розгалуженого магнітного кола

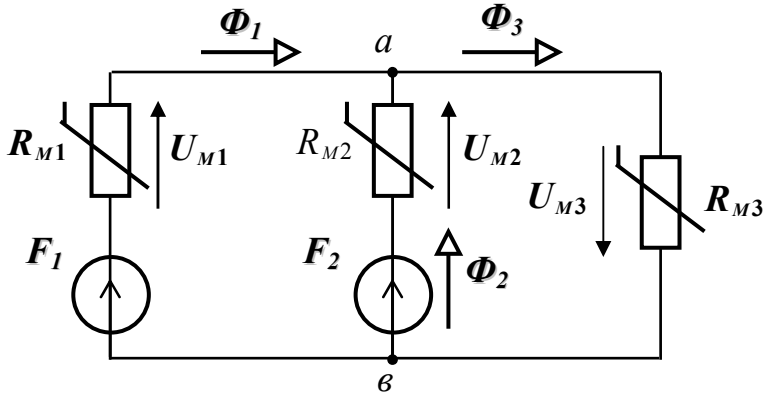


Рисунок 14.11 – Розрахункова схема розгалуженого магнітного кола

Другий закон Кірхгофа для замкненого контуру магнітного кола формулюється так: **алгебраїчна сума магніторушійних сил у контурі дорівнює алгебраїчній сумі добутків магнітних опорів (які входять у контур) на магнітний потік (який протікає в даних опорах)**.

Математичний запис другого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} R_{Mi} \Phi_i \ . \tag{14.27}$$

Наприклад, для замкненого контуру розгалуженого магнітного кола (рисунок 14.11) з магнітними опорами R_{M1}, R_{M2} та джерелами магніторушійних сил F_1, F_2, даний вираз буде виглядати так

$$F_1 - F_2 = R_{M1}\Phi_1 - R_{M2}\Phi_2. \qquad (14.28)$$

14.8. Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл

Під час розрахунку нерозгалужених магнітних кіл зустрічаються два типи задач: *пряма задача*, коли заданий магнітний потік в магнітному колі, а необхідно визначити намагнічуючий струм та *зворотна задача*, коли заданий струм або магніторушійна сила, а необхідно знайти магнітний потік в магнітному колі. В обох випадках, як правило, відомі геометричні розміри магнітного кола, матеріали магнітопроводу, криві намагнічування, число витків котушок або індуктивність.

Пряма задача. Для П-подібного магнітопроводу електромагніту задані геометричні розміри (l_1, l_2, $l_П$, S_1, S_2, $S_П$), крива намагнічування феромагнітного магнітопроводу $B=f(H)$ та значення магнітного потоку Φ. Необхідно визначити намагнічуючий струм, якщо відомо кількість витків w котушки (рисунок 14.12).

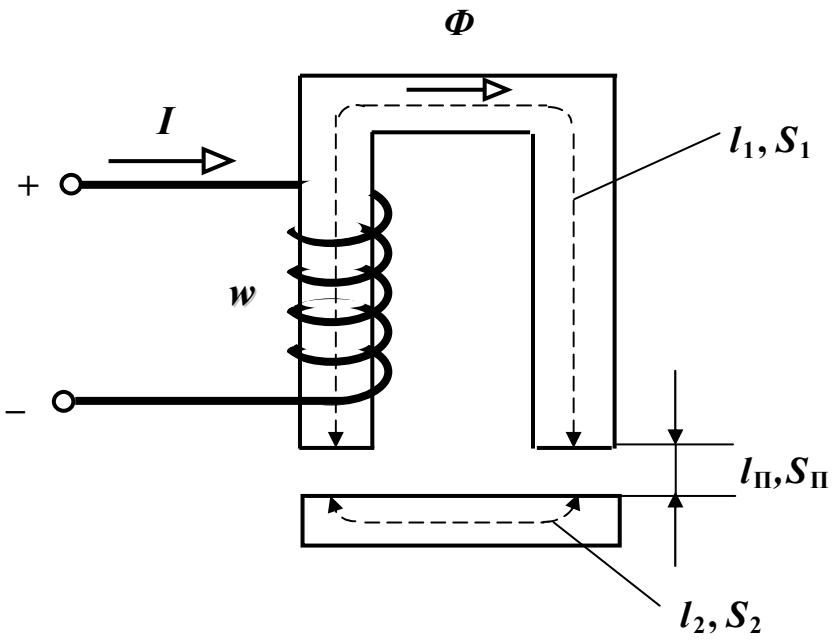


Рисунок 14.12– Конструктивна схема П-подібного магнітопроводу

Порядок розрахунку:

1. Позначаємо середню магнітну лінію та знаходимо довжину її окремих ділянок l_1, $2l_{П}$, l_2.

2. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола (рисунок 14.13).

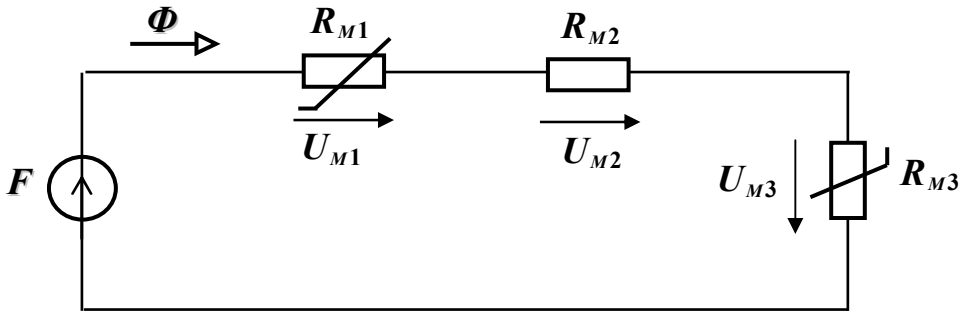


Рисунок 14.13 – Розрахункова схема П-подібного феромагнітного магнітопроводу

3. Записуємо рівняння за другим законом Кірхгофа (14.8, 14.27)

$$F = R_{м1}\Phi + R_{м\,П}\Phi + R_{м2}\Phi = H_1 l_1 + 2H_{П} l_{П} + H_2 l_2 = w\,I\,,$$

звідки сила струму у котушці

$$I = \frac{H_1 l_1 + 2H_{П} l_{П} + H_2 l_2}{w}.$$

4. Будуємо криву намагнічування ***B = f (H)*** П-подібного магнітопроводу (рисунок 14.14)

5. Визначаємо магнітні індукції B_1 та B_2 на окремих ділянках кола (14.3)

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \qquad B_{П} = \frac{\Phi}{S_{П}}; \qquad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}.$$

6. За допомогою кривої намагнічування (рисунок 14.14) визначаємо напруженості магнітного поля H_1 та H_2 на окремих ділянках магнітного кола.

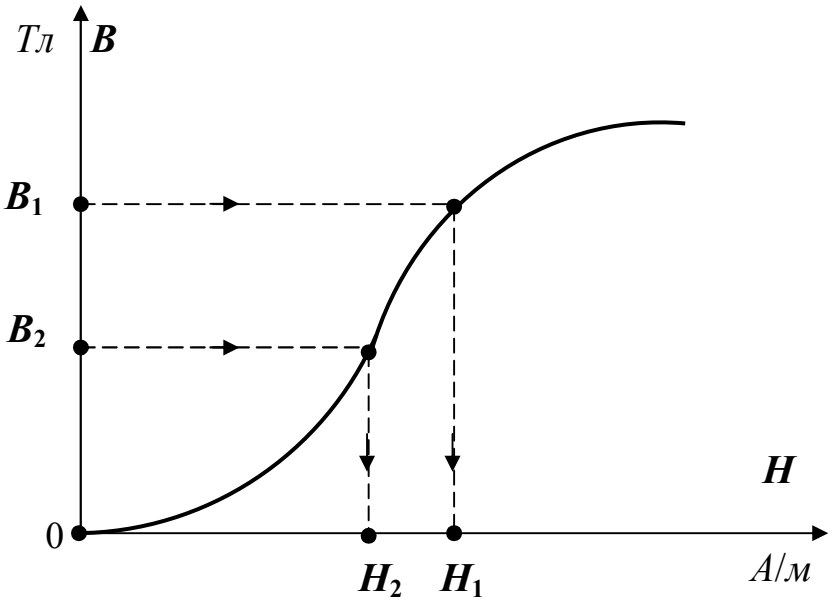


Рисунок 14.14 – Крива намагнічування П-подібного феромагнітного магнітопроводу

7. Визначаємо напруженість магнітного поля в повітряному прошарку магнітопроводу (14.5)

$$H_{П} = \frac{B_{П}}{\mu_{П}}; \qquad \mu_{П} \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м.$$

Підставляємо знайдені значення напруженостей H_1, H_2 та $H_{П}$ і визначаємо намагнічуючий струм I за формулою (14.27).

Зворотна задача. Задані значення намагнічуючої сили або намагнічуючого струму, геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування, кількість витків w котушки. Необхідно визначити магнітний потік $Ф$.

Порядок розрахунку:

1. Довільно задаємося кількома значеннями магнітного потоку і за допомогою геометричних розмірів магнітопроводу, кривої намагнічування визначаємо, як і в попередньому випадку, визначаємо відповідні значення намагнічуючої сили за формулою

$$F = H_1 l_1 + 2H_{П} l_{П} + H_2 l_2 \ .$$

2. Будуємо залежність $\Phi = f(F)$ (рисунок 14.15) або вебер-амперну характеристику $\Phi = f(I)$, бо кількість витків задано за умовою задачі.

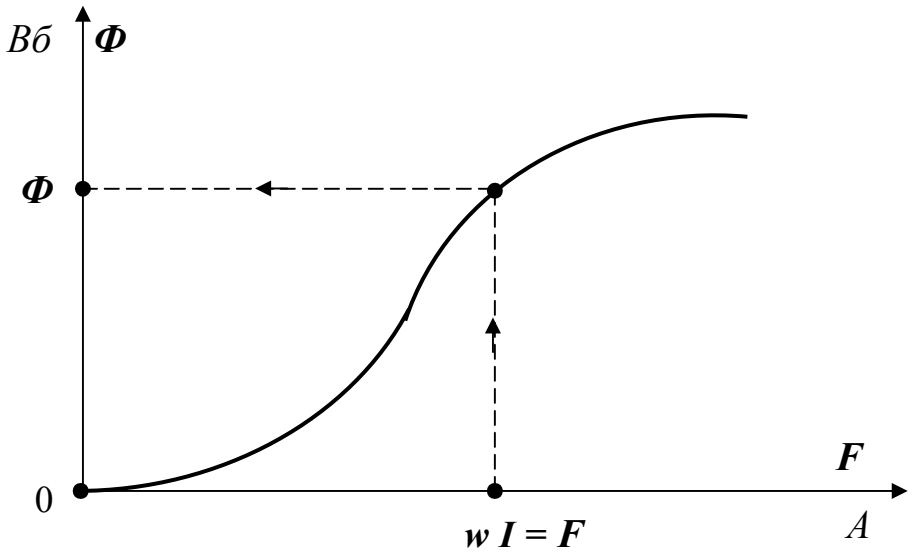


Рисунок 14.15 – Графік залежності магнітного потоку в магнітопроводі від намагнічуючої сили (МРС)

3. Для заданого в умові задачі значення намагнічуючої сили або намагнічуючого струму, за допомогою кривої $\Phi = f(F)$ (рисунок 14.15) визначаємо відповідне значення магнітного потоку Φ.

14.9. Розрахунок розгалужених магнітних кіл

Розрахунок розгалужених магнітних кіл ґрунтуються на застосуванні законів Кірхгофа і Ома для магнітного кола.

Для заданого розгалуженого магнітного кола (рисунок 14.16) відоме наступне:

геометричні розміри довжин і перерізів магнітопроводу l_1, S_1 , l_2, S_2 , l'_3, S_3 та l''_3, S_3, крива намагнічування феромагнітного матеріалу магнітопроводу $B = f(H)$, магнітний потік Φ_3. Необхідно знайти намагнічуючу силу F.

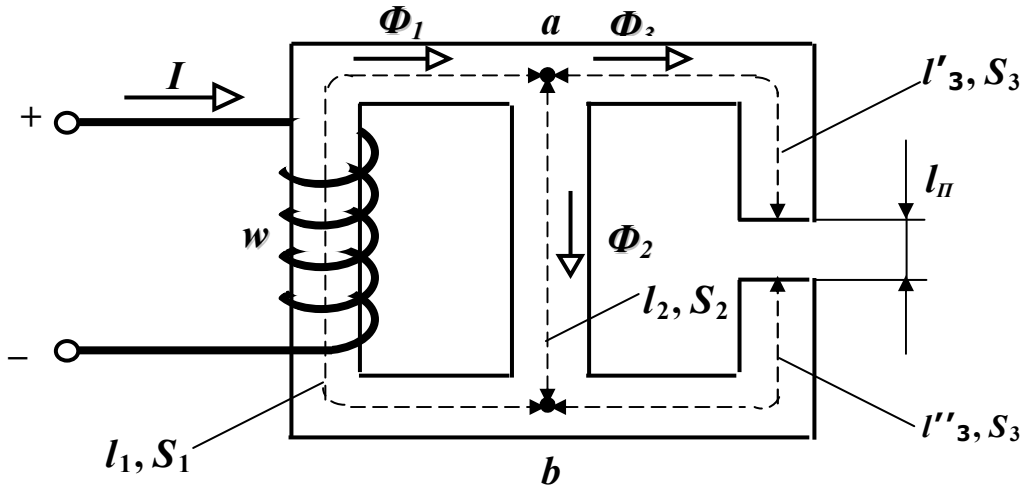


Рисунок 14.16 – Конструктивна схема розгалуженого магнітного кола

Порядок розрахунку:

1. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола, що на рисунку 14.16 і вибираємо умовно позитивні напрями магнітних потоків на ділянках магнітного (рисунок 14.17).

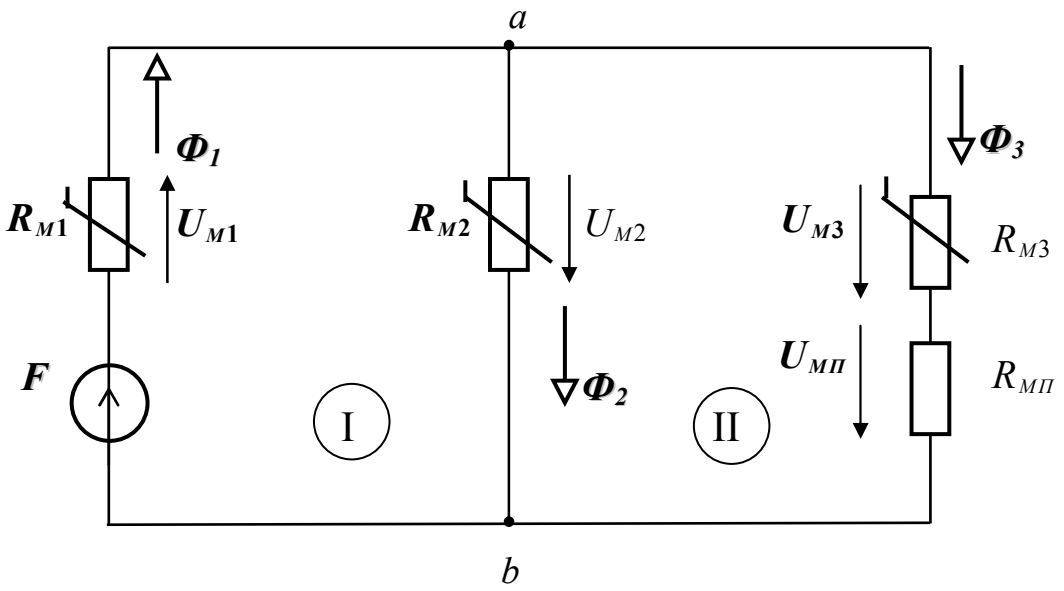


Рисунок 14.17 – Розрахункова схему розгалуженого магнітного кола

2. Для визначення намагнічуючої сили запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для першого контуру (I)

$$F = R_{M1}\Phi_1 + R_{M2}\Phi_2 \qquad (14.29)$$

або за законом повного струму

$$F = H_1 l_1 + U_{M.ab}. \qquad (14.30)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення H_1 та $U_{M.ab}$.

3. Магнітна напруга на ділянці ab для другого контуру (II)

$$U_{M.ab} = R_{M3}\Phi_3 + R_{M\Pi}\Phi_3 \qquad (14.31)$$

або за законом повного струму

$$U_{M.ab} = H_3 l_3 + H_\Pi l_\Pi \ , \qquad (14.32)$$

де l_3 – довжина середньої лінії на третій ділянці $l_3 = l'_3 + l''_3$.

Знаючи Φ_3, визначаємо $B_3 = \dfrac{\Phi_3}{S_3}$, а потім за допомогою кривої намагнічування знаходимо H_3. Оскільки $H_\Pi = \dfrac{B_3}{\mu_0}$, то підставивши значення, знаходимо $U_{M.ab}$.

4. Напруженість H_1 знаходимо за допомогою кривої намагнічування, визначивши спочатку магнітну індукцію $B_1 = \dfrac{\Phi_1}{S_1}$. Магнітний потік $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. При цьому $\Phi_2 = B_2 S_2$. Для визначення магнітної індукції B_2 спочатку знаходимо напруженість магнітного поля на ділянці l_2, скориставшись законом Ома

$$U_{M.ab} = R_{M2}\Phi_2 = H_2 l_2 \ . \qquad (14.33)$$

звідки

$$H_2 = \frac{U_{M.ab}}{l_2} \qquad (14.34)$$

За допомогою кривої намагнічування знаходимо магнітну індукцію B_2 та розраховуємо магнітний потік Φ_2. Після чого визначаємо

магнітну індукцію B_1 за формулою $B_1 = \dfrac{\Phi_1}{S_1}$ та напруженість H_1 за допомогою кривої намагнічування.

5. За знайденими значеннями розраховуємо намагнічуючу силу F за формулою (14.18).

Нехай тепер задані всі геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування і намагнічуюча сила. Необхідно знайти всі магнітні потоки в розгалуженнях кола.

Порядок розрахунку:

1. Складаємо розрахункову схему кола і вибираємо умовно позитивні напрями магнітних потоків.

2. Для вузла *a* записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \text{ або } \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \ . \qquad (14.35)$$

3. Оскільки коло нелінійне, задачу вирішуємо графоаналітичним методом. Для цього спочатку будуємо допоміжні характеристики $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$; $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$; $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$.

Для першого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_1 = \frac{(\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}) + F}{R_{M1}} = \frac{-U_{M.ab} + F}{R_{M1}}, \qquad (14.36)$$

звідки знаходимо магнітну напругу у першому розгалуженні $U_{M.ab}$

$$U_{M.ab} = F - R_{M1}\Phi_1 \qquad (14.37)$$

або використавши закон повного струму

$$U_{M.ab} = F - H_1 l_1 \ . \qquad (14.38)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$, задаємося кількома значеннями магнітної індукції B_1, визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_1, потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ та відповідні значення магнітного потоку Φ_1.

Для другого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_2 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M2}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M2}}, \qquad (14.39)$$

звідки знаходимо магнітну напругу у другому розгалуженні $U_{M.ab}$

$$U_{M.ab} = R_{M2}\Phi_2 \qquad (14.40)$$

або за законом повного струму

$$U_{M.ab} = H_2 l_2 \ . \qquad (14.41)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$, задаємося кількома значеннями магнітної індукції B_2, визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_2, потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ за формулою (14.41) та відповідні значення магнітного потоку Φ_2.

Для третього розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_3 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M3} + R_{M.П}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M3} + R_{M.П}}, \qquad (14.42)$$

звідки знаходимо магнітну напругу у третьому розгалуженні $U_{M.ab}$

$$U_{M.ab} = R_{M3}\Phi_3 + R_{M.П}\Phi_3. \qquad (14.43)$$

або за законом повного струму

$$U_{M.ab} = H_1 l_1 + H_П l_П \ . \qquad (14.44)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$, задаємося кількома значеннями магнітної індукції B_3, визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_3, потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ та відповідні значення магнітного потоку Φ_3. Всі отримані залежності наносимо на одну площину (рисунок 14.18).

Оскільки за першим законом Кірхгофа $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, тому будуємо допоміжну характеристику $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$.

Точка перетинання «*a*» кривих $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$ та $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$ визначає магнітну напругу $U_{M.ab}$. Проводимо через точку перетинання *a* пряму *a0'*, яка паралельна вісі магнітного потоку $\boldsymbol{\Phi}$ (точки *b*, *c*).

Потім визначаємо магнітні потоки Φ_1, Φ_2, Φ_3 за допомогою графіків залежностей $\boldsymbol{\Phi_1 = f(U_{M.ab,}\ )}$, $\boldsymbol{\Phi_2 = f'(U_{M.ab})}$ та $\boldsymbol{\Phi_3 = f''(U_{M.ab}\ )}$ відповідно для точок *a, b, c*.

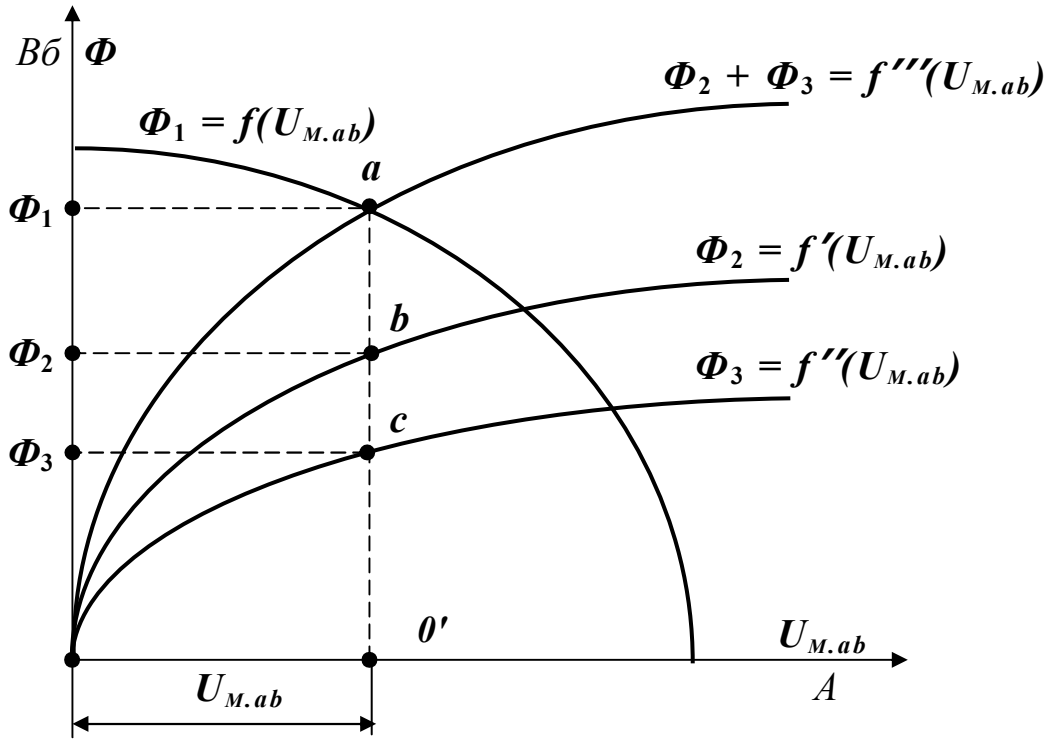


Рисунок 14.18 – Побудова залежностей $\boldsymbol{\Phi_1 = f(U_{м.ab})}$, $\boldsymbol{\Phi_2 = f(U_{м.ab})}$, $\boldsymbol{\Phi_3 = f(U_{м.ab})}$, $\boldsymbol{\Phi_2 + \Phi_3 = f(U_{м.ab})}$ для визначення магнітних потоків

Перевірку графо-аналітичного розрахунку магнітних потоків Φ_1, Φ_2, Φ_3 здійснюємо за допомогою першого закон Кірхгофа.

Приклад 15.5

На представленій розгалуженій схемі (рисунок 14.19) позначено: котушка постійного струму із числом витків $\boldsymbol{w}$, сила струму в котушці I. Магнітопровід, що складається із трьох ділянок, характеризується: довжинами ділянок магнітопроводу – l_1, l_2, l_3; площами поперечного перерізу ділянок магнітопроводу – S_1, S_2, S_2. По магнітопроводу замикаються основні магнітні потоки Φ_1, Φ_2, Φ_3. **Скласти: розрахункову схему магнітного кола і рівняння за першим та другим законом Кірхгофа.**

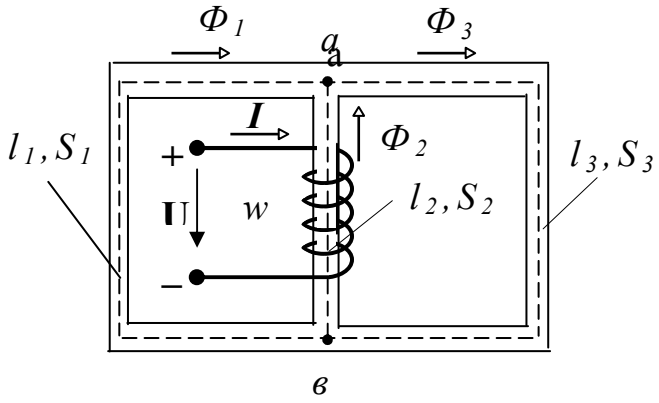


Рисунок 14.19 – Конструктивна схема магнітного кола

Рішення

1. Складаємо розрахункову схему магнітного кола.

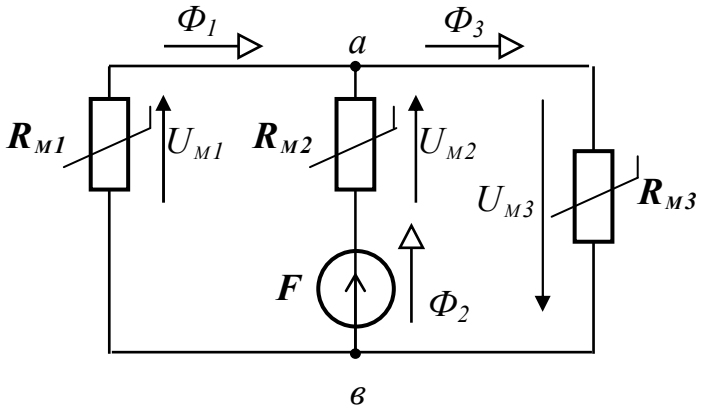


Рисунок 14.20 – Розрахункова схема магнітного кола

2. Складаємо рівняння для вузла «*a*» за першим законом Кірхгофа за (14.25)

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0.$$

3. Складаємо рівняння для двох незалежних контурів за другим законом Кірхгофа за (14.27)

$$-F = R_{M1} \cdot \Phi_1 - R_{M2} \cdot \Phi_2; \quad F = R_{M2} \cdot \Phi_2 + R_{M3} \cdot \Phi_3.$$

14.10. Електромагніти та їх розрахунок

Електромагніти широко застосовуються в техніці. Вони служать для створення магнітного поля в електрогенераторах, електродвигу-

нах, трансформаторах, електровимірювальних приладах, електричних апаратах, а також для створення стискальних зусиль.

Електромагніт, призначений для стискальних зусиль, складається з нерухомого осердя (магнітопроводу), рухливого якоря (магнітопроводу) та котушок збудження (виконаних із провідників). Котушки розташовані на осерді, а осердя відділене від якоря повітряним зазором (рисунок 14.21).

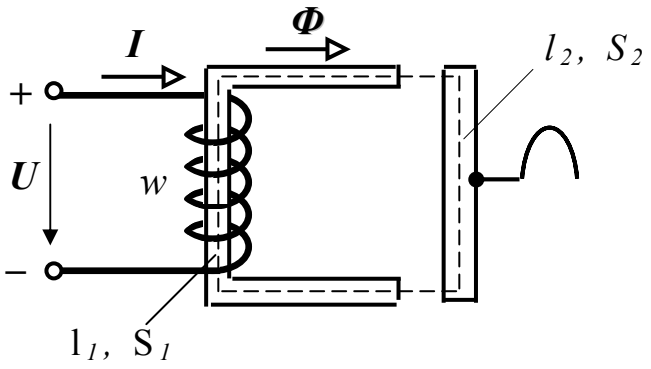


Рисунок 14.21 – Конструктивна схема електромагніту, призначеного для стискальних зусиль

Піднімальна сила електромагніта визначається за формулою

$$F_{EMM} = \frac{B^2 \cdot S}{2\mu_0}, \qquad (14.45)$$

де $F_{EMГ}$ – піднімальна сила електромагніта, H;

S – загальна площа поперечного перерізу полюсів електромагніта, $м^2$.

B – магнітна індукція, $Тл$;

μ_0 – магнітна постійна, $Гн/м$.

Контрольні запитання

1. У чому суть явища електромагнетизму?
2. Сформулюйте правило «правого буравчика».
3. Яка фізична величина є силовою характеристикою магнітного поля?
4. Дайте визначення магнітної індукції.
5. Запишіть визначальну формулу магнітної індукції.

6. Одержите одиницю магнітної індукції з визначальної формули.
7. Що таке однорідне магнітне поле?
8. Дайте визначення магнітного потоку для однорідного магнітного поля.
9. Запишіть визначальну формулу магнітного потоку для однорідного магнітного поля.
10. Одержите одиницю магнітного потоку для однорідного магнітного поля з визначальної формули.
11. Сформулюйте закон електромагнетизму.
12. Запишіть математично і розшифруйте закон електромагнетизму.
13. Одержите одиницю потокозчеплення з математичного запису закону електромагнетизму.
14. Дайте визначення напруженості магнітного поля.
15. Запишіть визначальну формулу напруженості магнітного поля.
16. Одержите одиницю напруженості магнітного поля з визначальної формули.
17. Як визначити магнітну проникність середовища?
18. Що таке магнітна постійна? Чому вона дорівнює?
19. Що таке відносна магнітна проникність середовища?
20. Що розуміється під магнітним колом?
21. Назвіть основні елементи магнітного кола.
22. Укажіть призначення магнітопроводу.
23. З яких матеріалів виготовляються магнітопроводи?
24. Перелічите феромагнітні матеріали.
25. Приведіть приклад конструктивної схеми найпростішого магнітного кола.
26. Сформулюйте закон повного струму для однорідного магнітного поля.
27. Запишіть математично і розшифруйте закон повного струму для однорідного магнітного поля.

28. Що розуміється під намагнічуючою силою?
29. Запишіть визначальну формулу намагнічуючої сили.
30. Одержите одиницю намагнічуючої сили з визначальної формули.
31. Одержите напруженість магнітного поля з закону повного струму.
32. Що являє собою крива намагнічування?
33. Зобразите графічно криву намагнічування та поясните її.
34. Зобразите графічно петлю гістерезиса (перемагнічування) та пояснить її.
35. Яким явищем супроводжується перемагнічування магнітопроводу?
36. Від чого залежать втрати енергії на перемагнічування.
37. Що розуміється під магнітним опором ділянки магнітного кола?
38. Запишіть і розшифруйте визначальну формулу магнітного опору ділянки магнітного кола.
39. Одержите одиницю магнітного опору ділянки магнітного кола.
40. Що розуміється під магнітною напругою ділянки магнітного кола?
41. Запишіть і розшифруйте визначальну формулу магнітної напруги ділянки магнітного кола.
42. Одержите одиницю магнітної напруги ділянки магнітного кола.
43. Що розуміється під намагнічуючою (магніторушійною) силою?
44. Запишіть і розшифруйте визначальну формулу намагнічуючої (магніторушійної) сили.
45. Одержите одиницю намагнічуючої (магніторушійної) сили (м.р.с.).
46. Що в магнітному колі є аналогією електрорушійної сили електричного кола?
47. Що в магнітному колі є аналогією опору електричному струму електричного кола?
48. Що в магнітному колі є аналогією силі струму електричного кола?
49. Що в магнітному колі є аналогією напрузі на ділянці електричного кола?

50. Приведіть конструктивну схему розгалуженого магнітного кола з декількома намагнічуючими котушками. Складіть розрахункову схему приведеного магнітного кола.
51. Сформулюйте закон Ома для ділянки магнітного кола без м.р.с.
52. Запишіть математично і розшифруйте закон Ома для ділянки магнітного кола без м.р.с.
53. Сформулюйте закон Ома для замкненого магнітного кола з декількома м.р.с.
54. Запишіть математично і розшифруйте закон Ома для замкненого магнітного кола з декількома м.р.с.
55. Сформулюйте узагальнений закон Ома.
56. Запишіть математично і розшифруйте узагальнений закон Ома.
57. Сформулюйте 1-й закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола.
58. Запишіть математично і розшифруйте 1-й закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола.
59. Сформулюйте 2-й закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола.
60. Запишіть математично і розшифруйте 2-й закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола.
61. Де застосовуються електромагніти в техніці?
62. Складіть конструктивну схему електромагніта для стискальних зусиль.
63. Запишіть формулу для розрахунку піднімальної сили електромагніта для стискальних зусиль.
64. Як розрахувати магнітну індукцію на кожній ділянці кола (у тому числі в повітряному зазорі) розрахункової схеми п.50?
65. Як визначити напруженості магнітного поля на кожній ділянці кола (у тому числі в повітряному зазорі) розрахункової схеми п.50?

ТЕМА 15
НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

15.1. Загальні положення

Для лінійних кіл змінного струму залежності між напругою і струмом в активному опорі $u(i)$, між магнітним потоком (потокозчепленням) і струмом в індуктивності $\Phi(i)$, між зарядом і напругою в ємності $q(u)$ мають лінійний характер (рисунок 15.1).

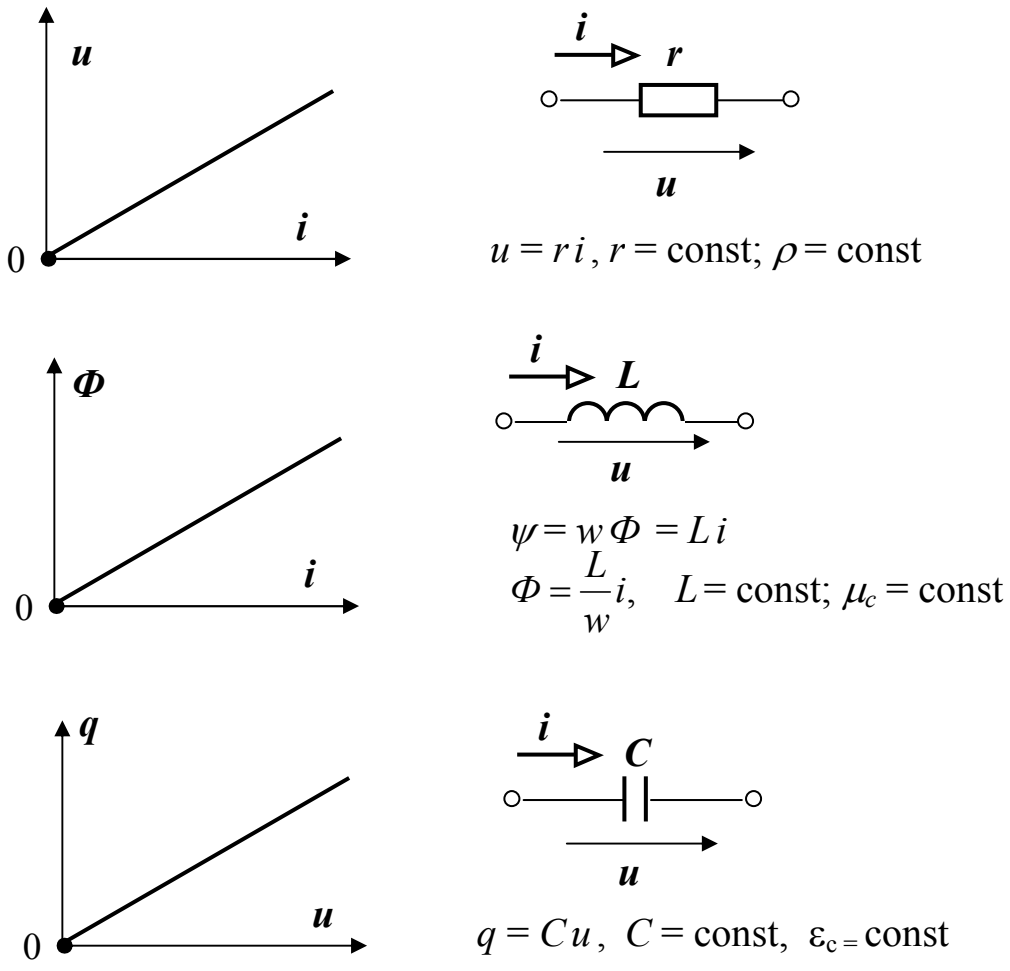
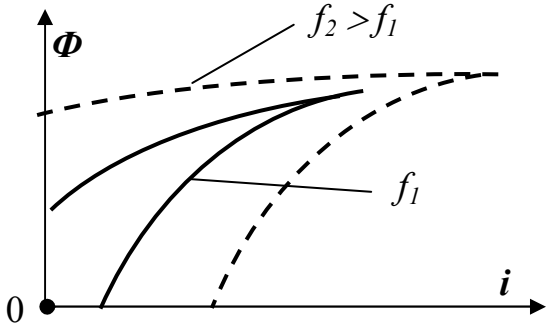


Рисунок 15.1 – Залежності між параметрами і величинами в резистивному лінійних елементів

Це обумовлено тим, що властивості матеріалу, з яких вони виготовлені (питомий опір, магнітна проникність) або середовища (діелектрична проникність) не міняються Для нелінійних елементів, в загальному випадку, при змінному струмі вигляд цих функцій $u(i)$, $\Phi(i)$, $q(u)$ залежить від характеру зміни аргументу (струму і напруги) в часі., тобто від частоти.

Для котушки з феромагнітним осердям (рисунок 15.2), петля гістерезису при збільшенні частоти помітно розширюється, що обумовлено нелінійною залежністю індуктивності від магнітного потоку і струму.



$$\Phi = \frac{L}{w} i, \quad L = var = f(i, \Phi)$$

Рисунок 15.2 – Полу петля гістерезисну котушки з феромагнітним осердям при різних частотах

15.2. Нелінійна індуктивність

Для встановлення зв'язку між індуктивністю L, числом її витків w і опором магнітного кола Rм розглянемо котушку з феромагнітним осердям, включену в коло постійного струму (рисунок 15.3).

При цьому будемо вважати, що магнітний потік, який замикається частково по повітрю (потік розсіювання), дорівнює нулю.

На основі основних співвідношень, одержаних раніше

$$\Phi = \frac{F}{R_м} = \frac{wi}{R_м}; \qquad \psi = w\Phi = Li;. \qquad R_м = \frac{l}{\mu\mu_0 S}$$

$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2 \mu\mu_0 S}{l} = \frac{w^2}{R_м} \qquad (15.1)$$

Таким чином, індуктивність котушки з феромагнітним осердям, прямо пропорційна квадрату числа витків та зворотно пропорційна магнітному опору котушки.

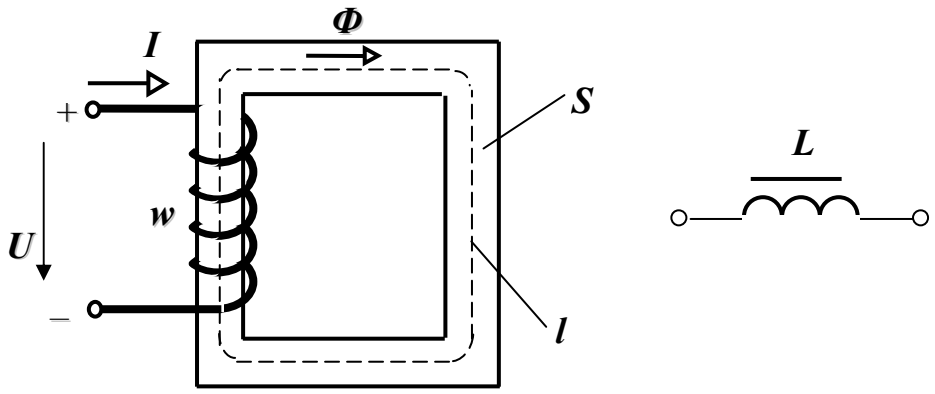


Рисунок 15.3 – Конструктивна схема та умовно графічне і літерне позначення котушки з феромагнітним осердям колі постійної ЕРС

$H = \frac{wI}{l}$. Оскільки S, w, l – величини постійні, то залежність $\Phi(I)$ аналогічна залежності $B(H)$, тобто повторює криву намагнічування (рисунок 15.4).

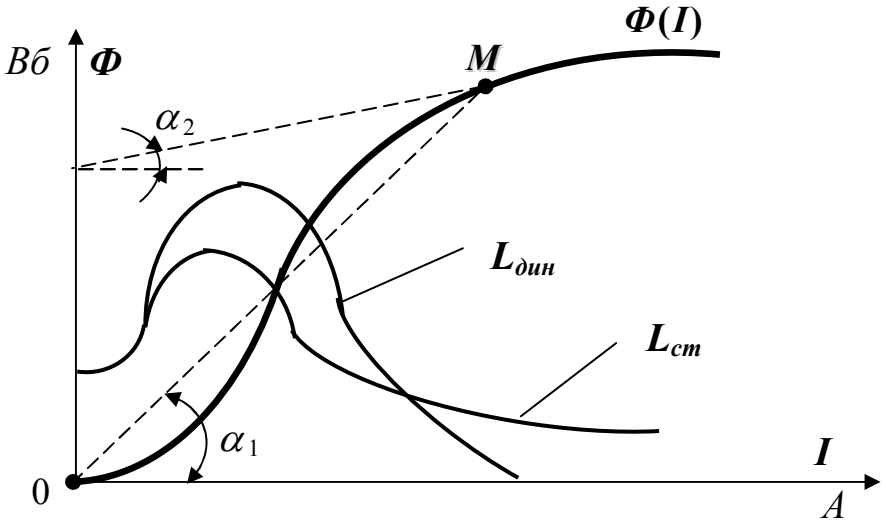


Рисунок 15.4 – Залежності магнітного потоку та статичної і динамічної індуктивностей від сили струму

Знайдемо залежність магнітного потоку від сили струму $\Phi(I)$. Відомо, що магнітна індукція залежить від магнітного потоку і перетину магніто проводу $B = \frac{\Phi}{S}$.

Індуктивність котушки, як видно з формули 15.1, залежить тільки від змінної частини $\mu\mu_0 = \frac{B}{H}$. Якщо силу струму збільшувати, то збільшиться напруженість магнітного поля, а відповідно і магнітна індукція B. Але магнітна індукція на нелінійній частині характеристики збільшується не пропорційно напруженості. Так, в області, близької до насичення, магнітна індукція збільшується менше в порівнянні зі збільшенням напруженості, а це значить, що зменшується й індуктивність L.

Як видно з графіку $\Phi(I)$ магнітна проникненість не є величиною постійною. Тому при зміні напруженості магнітного поля магнітний опір буде змінюватися, а отже буде мінятися індуктивність.

Кожній точці характеристики $\Phi(I)$ відповідає певне значення *статичної індуктивності*

$$L_{ст} = w\frac{\Phi}{I} = m_L \operatorname{tg}\alpha_1, \qquad (15.2)$$

де α_1 – кут між прямою, проведеною через початок координат і робочою точкою М, град;

і *динамічної індуктивності*

$$L_{дин} = w\frac{d\Phi}{dI} = m_L \operatorname{tg}\alpha_2, \qquad (15.3)$$

де m_L – масштаб індуктивності, *Гн*/*см*;

α_2 – кут між дотичною, проведеною через робочу точку М і вісью струму, град

Масштаб індуктивності можна визначити за формулою

$$m_L = \frac{m_{w\Phi}}{m_I}, \qquad (15.4)$$

де $m_{w\Phi}$ – масштаб потокозчеплення, *Вб*/*см*;

m_I – масштаб струму, *А*/*см*.

15.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осердям

Під **ідеальною котушкою** з феромагнітним осердям розуміють котушку, в якій активний опір проводу обмотки дорівнює нулю, індуктивний опір, обумовлений потоком розсіювання, рівний нулю, відсутні втрати активної потужності від гістерезисну і вихрових токів у магнітопроводі.

Підключимо ідеальну котушку з феромагнітним осердям до джерела змінного синусоїдного струму, при цьому будемо вважати, що ідеальна котушка з феромагнітним осердям не має петлі гістерезису ($r_м = 0$), активний опір проводу ($r = 0$) її дорівнює нулю, магнітний потік розсіювання відсутній ($x_\sigma = 0$) (рисунок 15.5).

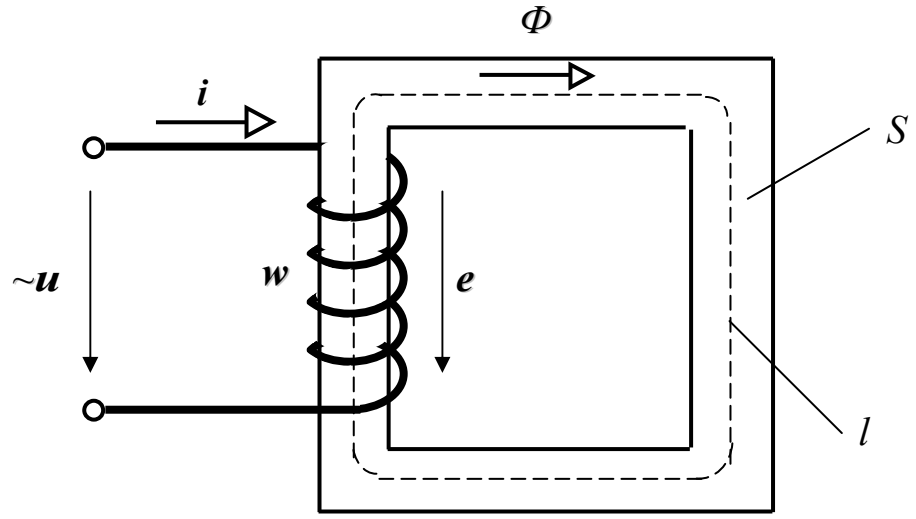


Рисунок 15.5 – Конструктивна схема котушки з феромагнітним осердям в колі синусоїдної напруги

Запишемо основні співвідношення для цього випадку

$$\Phi = \frac{F}{R_м} = \frac{wi}{R_м}; \qquad R_м = \frac{l}{\mu\mu_0 S}; \qquad \psi = w\Phi = Li;$$
$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2}{R_м} = \frac{w^2\mu\mu_0 S}{l}. \tag{15.5}$$

Залежність $\Phi(i)$ (рисунок 15.4), згідно (15.5) для котушки з феромагнітним осердям в Коля змінного струму така ж, як і $\Phi(I)$ для постійного струму (15.1).

Розглянемо форму кривої струму в колі з нелінійною індуктивністю при синусоїдній напрузі джерела. Припустимо, що напруга джерела має початкову фазу 90^0 і рівняння миттєвого значення

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ). \tag{15.6}$$

Зневажаючи активним опором котушки з феромагнітним осердям і магнітним потоком розсіювання, можемо записати співвідношення синусоїдної напруги і електрорушійної сили самоіндукції та електрорушійної сили самоіндукції швидкості зміни магнітного потоку

$$u = -e; \qquad e = -w\frac{d\Phi}{dt}. \tag{15.7}$$

Прирівняємо рівняння (15.6) і (15.7)

$$U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = w\frac{d\Phi}{dt}, \tag{15.8}$$

звідки

$$d\Phi = \frac{U_m}{w}\sin(\omega t + 90^\circ)dt;$$

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w}\sin\omega t = \Phi_m \sin\omega t. \tag{15.9}$$

Таким чином, при синусоїдній напрузі джерела ЕРС магнітний потік також синусоїдний, але відстає від напруги на 90°.

Для знаходження кривої струму в котушці з феромагнітним осердям, скористаємося залежностями $\Phi(t)$ і $\Phi(i)$ та побудуємо залежність $i(t)$ графічним способом (рисунок 15.6).

Отже, крива струму несинусоїдна, але магнітний потік і струм мають однакові за величиною початкові фази ($\psi_\Phi = \psi_i$), оскільки відсутні втрати на гістерезис і вихрові струми. Замінимо несинусоїдний струм еквівалентною синусоїдою, для якої загальний вигляд рівняння миттєвого значення наступний

$$i = I_m \cdot \sin \omega t; \qquad I_m = \sqrt{2} \cdot I, \tag{15.10}$$

де I – діюче значення несинусоїдного струму, A;

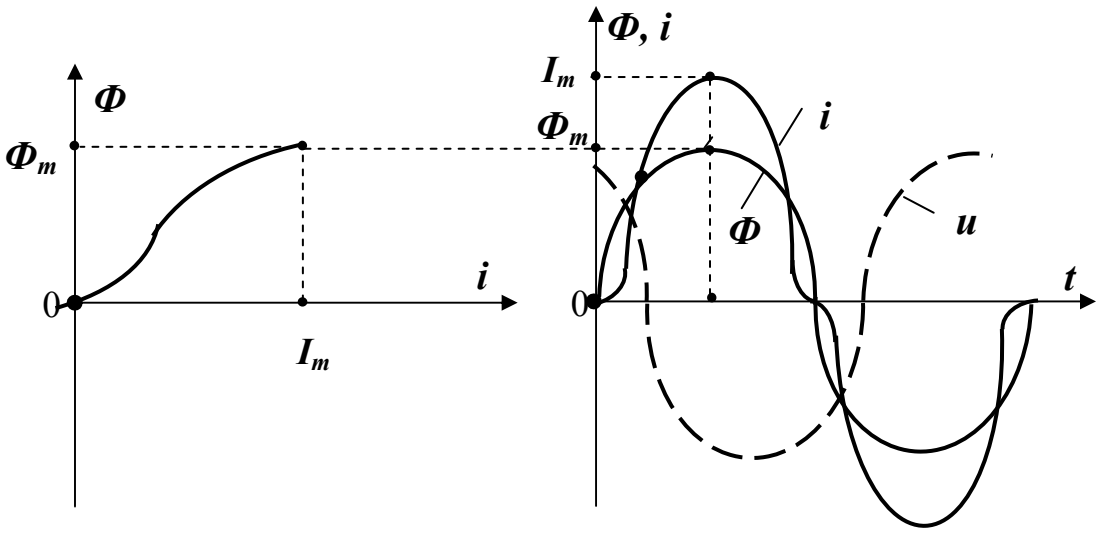


Рисунок 15.6 – Графічні залежності $\Phi(i)$, $i(t)$, $\Phi(t)$, $i(t)$ в ідеальній котушці з феромагнітним осердям

Рівняння миттєвої електрорушійної сили самоіндукції в котушці з феромагнітним осердям

$$e = -u = E_m \sin(\omega t - 90^\circ). \tag{15.11}$$

Запишемо за законом Ома рівняння комплексу діючої напруги для ідеальної котушки з феромагнітним осердям

$$\dot{U} = jx\dot{I}_p, \qquad (15.12)$$

де I_p – реактивний (намагнічуючий) струм, *А*;

$jx = \omega \cdot L$ – комплекс індуктивного опіру, *Ом*,

L – еквівалентна індуктивність, *Гн*.

Потокозчеплення ідеальної котушки з феромагнітним осердям

$$\psi = w\Phi = LI_P. \qquad (15.13)$$

Побудуємо векторну діаграму напруги, магнітного потоку, струму і ЕРС ідеальної котушки з феромагнітним осердям та складемо її схему заміщення (рисунок 15.7).

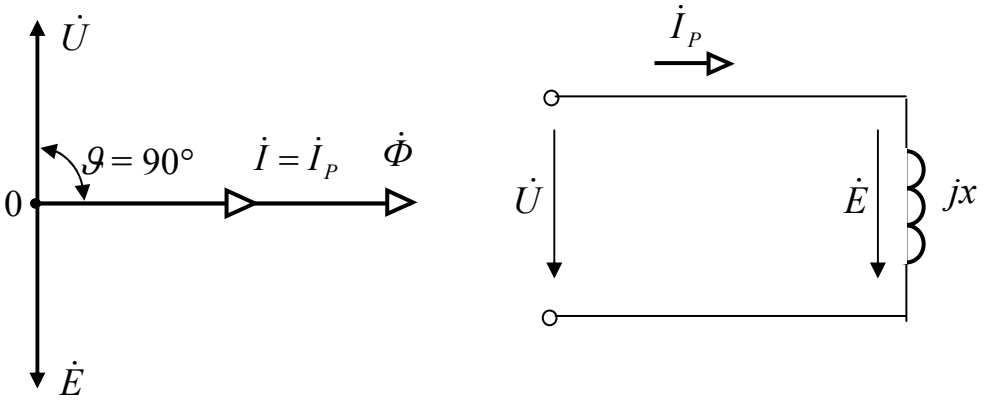


Рисунок 15.7 – Векторна діаграма і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

Розглянемо тепер ідеальну котушку з феромагнітним осердям **з урахуванням петлі гістерезису.** Для побудови графіку струму в котушці розглянемо залежність між магнітним потоком і током, яка аналогічна залежності між магнітною індукцією і напруженістю магнітного поля в котушці з феромагнітним осердям).

Побудована крива струму на базі залежностей $\Phi(t)$ і $\Phi(i)$, має несинусоїдну форму (рисунок 15.8). Крива струму випереджає синусоїду магнітного потоку на кут втрат $\boldsymbol{\delta}$ з причини витрат активної потужності у магнітопроводі при його перемагнічуванні з частотою

струму мережі. На нагрів магнітопроводу витрачається активна складова струму I_a.

Побудуємо векторну діаграму напруги і струмів котушки з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису та складемо схему заміщення для цього випадку (рисунок 15.8).

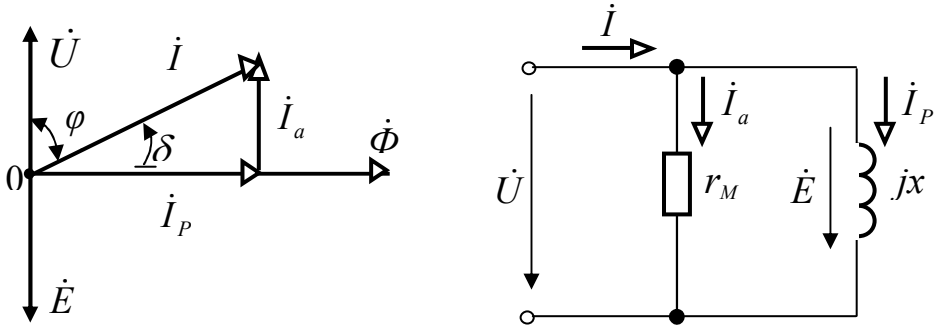


Рисунок 15.9 – Векторна діаграма та і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

Якщо несинусоїдну криву струму замінити еквівалентною синусоїдою, то можна записати вирази миттєвих: напруги u, сили струму і, магнітного потоку Φ і ЕРС самоіндукції e ідеальної котушки з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \delta),$$

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t;$$

$$e = E_m \sin(\omega t - 90^\circ). \qquad (15.14)$$

де δ – кут втрат у котушці, який визначається $\delta = 90^\circ - \varphi$.

На схемі (рисунок 15.8) активна складова струму характеризує втрати в магнітопроводі на вихрові струми і гістерезис – I_a, реактивна складова струму, що створює основний магнітний потік – I_p.

Хвильові діаграми $i(t)$, $\Phi(t)$, $u(t)$ в ідеальній котушці з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезісу на рисунку 15.9.

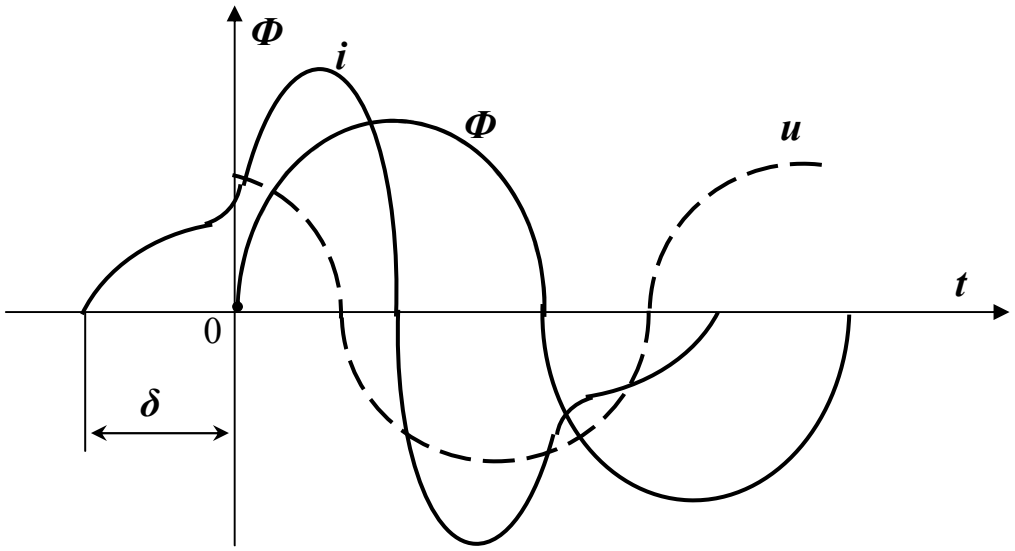


Рисунок 15.9 – Залежності $i(t)$, $\Phi(t)$, $u(t)$ в ідеальній котушці з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезісу

Поява в розрахунковій схемі ідеальної котушки з феромагнітним осердям активного опору магнітопроводу $r_м$ (активний опір проводу котушки дорівнює нулю) обумовлена споживанням котушкою з феромагнітним осердям активної потужності, яка втрачається на гістерезис і вихрові струми у магнітопроводі.

15.4. Втрати активної потужності на гістерезис

Активна потужність, яку споживає ідеальна котушка з феромагнітним осердям на гістерезіс від синусоїдного джерела напруги, дорівнює

$$P_r = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \cdot dt \,. \qquad (15.15)$$

Якщо вважати, що активний опір проводу котушки і індуктивний опір, обумовлений потоком розсіювання дорівнюють нулю, то прикладена напруга врівноважується ЕРС самоіндукції *e*, тобто

$$u = -e = w\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (15.16)$$

З урахуванням, що магнітний потік дорівнює $\Phi = B \cdot S$, тоді

$$u = w \cdot S\frac{dB}{dt}. \qquad (15.17)$$

Струм у котушці з феромагнітним осердям знайдемо за законом повного струму

$$i = \frac{H \cdot l}{w}. \qquad 15.18)$$

Тоді активна потужність (середня потужність за період) дорівнює потужності втраті від гістерезису

$$P_r = \frac{1}{T}\int_0^T wS\frac{dB}{dt} \cdot \frac{Hl}{w}dt = \frac{Sl}{T}\oint HdB = fV\oint HdB. \qquad (15.19)$$

де V – об'єм осердя магнітопроводу, $м^3$;

$\oint HdB$ – площа петлі гістерезису;

f – частота струму, $Гц$.

На виробництві втрати потужності від гістерезису визначають за різними емпіричними формулами, наприклад

$$P_r = \sigma_Г \cdot f \cdot B_m^n \cdot G, \qquad (15.20)$$

де $\sigma_Г$ – коефіцієнт, що залежить від сорту сталі (довідникові дані);

n = 1,6 при значеннях B_m у межах від 0,1 до 1 Тл; n = 2 при значеннях B_m у межах від 1 до 1,6 Тл;

B_m – амплітуда магнітної індукції, Тл;

G – маса магніто проводу, кг.

Якщо розглянути петлю гістерезису (рисунок 15.10), її площа дорівнює $\oint HdB$.

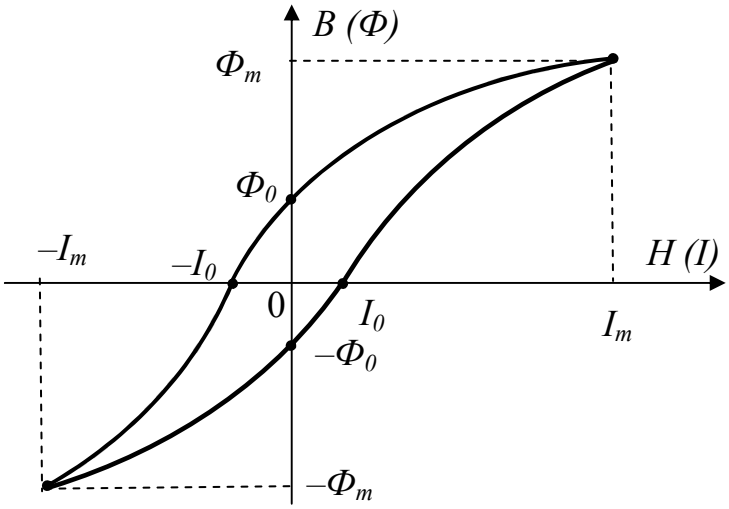


Рисунок 15.10 – Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

Таким чином, **втрати активної потужності на гістерезис прямо пропорційні частоті струму, об'єму осердя та площі петлі гістерезису.**

Для зменшення втрат активної потужності на гістерезис магнітопроводи силових машин виготовляють з феромагнітного матеріалу, що має вузьку петлю гістерезисну (холоднокатана сталь). При великій частоті (більше 500 Гц) магніто проводи виготовляють яз феритів.

На рисунку 15.10 прийняті позначення: $-\Phi_0$ і Φ_0 – залишковий магнітний потік у феромагнітному магнітопроводі котушки; $-I_0$ і I_0 – коерцитивна сила струму (*coercitio* – від *лат.* утримування).

В іншому вигляді вираз активної потужності на гістерезис можна записати

$$P_r = r_{мг} I_a^2 \ , \qquad (15.21)$$

де $r_{мг}$ – еквівалентний активний опір магнітопроводу, яким враховано втрати активної потужності на гістерезис, *Ом*;

I_a – активна складова струму, *А*.

15.5. Втрати активної потужності на вихрові струми

Змінний струм, який проходить по котушці (рисунок 15.11), створює в магнітопроводі змінний магнітний потік і наводить у феромагнітному осерді електрорушійну силу (ЕРС), під дією якої виникають вихрові струми (струми Фуко), які замикаються по симетричних контурах. Ці вихрові струми нагрівають феромагнітне осердя, тобто в осерді мають місце втрати активної потужності.

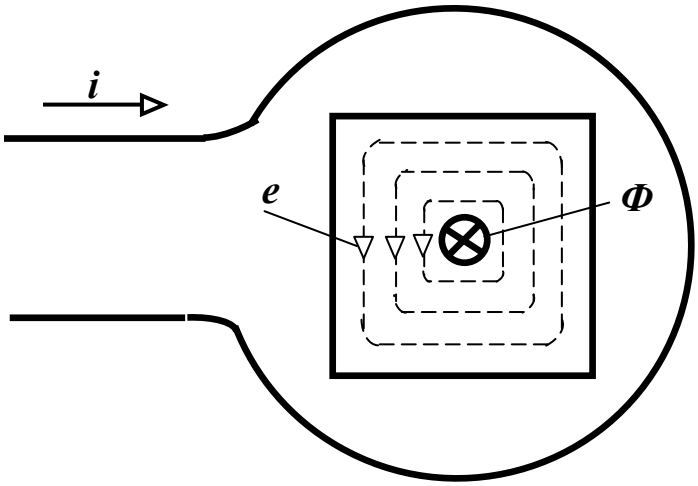


Рисунок 15.11 – Напрями ЕРС і магнітного потоку в залежності від напряму струму в котушці

Крім втрат енергії вихрові струми викликають розмагнічуючи дію, яке сильно впливає в середині магнітопроводу і менше на його поверхні. За законом Ленца, протилежний напряму вихрового струму розмагнічує внутрішню частину осердя, бо найбільш різко розмагнічуючи дія проявляється у центральній частині осердя, яка знаходиться під впливом найбільшого числа контурів вихрових струмів. В результаті магнітна індукція має найменше значення на поверхні і найбільше значення у центральній частині осердя.

Для зменшення цих негативних явищ осердя складається з окремих електрично ізольованих одна від іншої сталевих листів (рисунок 15.12).

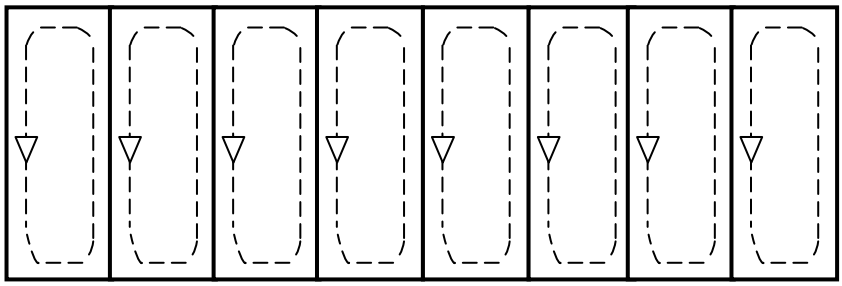


Рисунок 15.12 – Напрям ЕРС у феромагнітному осерді при складанні його з окремих ізольованих пластин

При цьому опір проходженню вихрових струмів різко зростає, тому ці струми стають незначними.

Якщо знехтувати нерівномірністю розподілення магнітного потоку по перерізу листів, з яких зібраний магнітопровід, потужність втрат від гітерезису визначають за емпіричною формулою

$$P_в = \sigma_B \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot G \ , \qquad (15.22)$$

де σ_B – коефіцієнт, що залежить від сорту сталі і розміру (товщини) стальних листів.

У цілому, **втрати активної потужності на вихрові струми прямо пропорційні квадрату частоти струму, товщині окремих листів електротехнічної сталі та магнітній індукції.** Втрати від вихрових струмів збільшують активну складову струму.

Та обставина, що втрати енергії на вихрові струми і від гістерезису мають різну залежність від частоти, дозволяє окремо розраховувати або вимірювати їх, якщо відомі сумарні втрати в магніто проводі для двох (або більше) значень частоти,, але при одному й тому ж значенні магнітної індукції B_m.

Вираз втрат активної потужності на вихрові струми можемо записати у вигляді

$$P_в = r_{мв} \cdot I_a^2 \ , \qquad (15.23)$$

де $r_{мв}$ – еквівалентний активний опір, за допомогою якого враховуються втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, *Ом*;

$P_в$ – втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, *Вт*.

В цілому загальні втрати активної потужності в феромагнітному осерді від гістерезисну і вихрових струмів можна визначити

$$P_c = P_r + P_в = \left(r_{мг} + r_{мв}\right) \cdot I_a^2 = r_м \cdot I_a^2 \ , \qquad (15.24)$$

де $r_м$ – еквівалентний активний опір магнітопроводу, який враховує втрати активної потужності в феромагнітному магнітопроводі на гістерезис і вихрові струми, *Ом*.

Приклад 15.1

Котушку з феромагнітним осереддям підключили до джерела постійної напруги 110 *В*. Котушка споживала струм 10,5 *А*. Потім цю же котушку підключили до джерела змінної синусоїдальної напруги з діючим значенням 110 *В,* котушка споживала струм 10,5 *А*. Ватметр показав 1500 *Вт*. **Визначити: активний опір проводу котушки, втрачену активну потужність в проводі і магніто проводі котушки.**

Рішення

1. Визначаємо активний опір цієї котушки

$$r_k = \frac{U_{пост}}{I_{пост}} = \frac{110}{10{,}5} = 10{,}48 \ Ом.$$

2. Визначаємо активну потужність, втрачену в проводі котушки

$$P_к = r_k \cdot I^2_{змін.} = 10{,}48 \cdot 10{,}5^2 = 1155 \ Вт.$$

3. Визначаємо активну потужність, втрачену у магнітопроводі

$$P_м = P - P_к, = \ 1500 - 1155 = 385 \ Вт.$$

15.6. Реальна котушка з феромагнітним осердям

Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються в реальній котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму (рисунок 15.13).

Під дією синусоїдної напруги в колі виникає явище електричного струму у котушці тече змінний струм, який створює синусоїдні основний Φ і допоміжний розсіювання Φ_σ магнітні потоки в наслідок явища електромагнетизму. Ці потоки замикаються відповідно по осердю і поза нього. Під дією магнітних потоків у котушці спостерігається явище електромагнітної індукції і наводяться відповідно ЕРС самоіндукції e і ЕРС розсіювання, що створюється допоміжним потоком розсіювання e_σ. Протікання струму по проводу котушки викликає явище теплової дії струму, що супроводжується виділенням теплоти і втратами потужності. Основний магнітний потік Φ спричиняє в феромагнітному магнітопроводі, матеріал якого має петлю гістерезиса, втрати активної потужності на гістерезис і вихрові струми за рахунок змінної напруги і струму у електричному колі котушки.

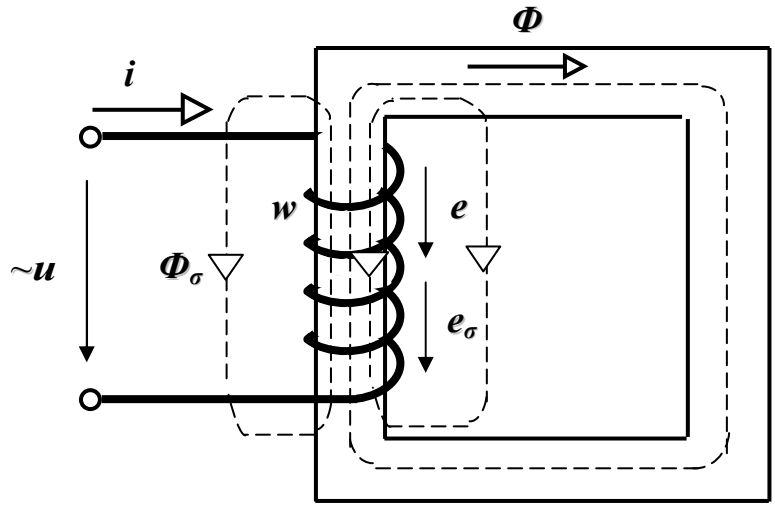


Рисунок 15.13 – Фізичні процеси, що виникають у котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Запишемо рівняння рівноваги напруги котушки з феромагнітним осердям згідно другого закону Кірхгофа

$$u = r \cdot i - e_\sigma - e = r \cdot i + L_\sigma \frac{di}{dt} - e, \qquad (15.25)$$

де r – активний опір проводу котушки, *Ом*;

$e_\sigma = L_\sigma \frac{di}{dt} = \frac{d\phi_\sigma}{dt}$ – ЕРС розсіювання, *В*.

Відповідно до рівняння (15.25) замінимо реальну котушку з феромагнітним магнітопроводом еквівалентною їй (рисунок 15.14), яка буде складатися з ідеальної котушки з феромагнітним магнітопроводом з урахуванням петлі гістерезисну і послідовно з'єднаними з нею активним опором проводу *r* і індуктивним опором x_σ, що створюється магнітним потоком розсіювання $\boldsymbol{\Phi_\sigma}$.

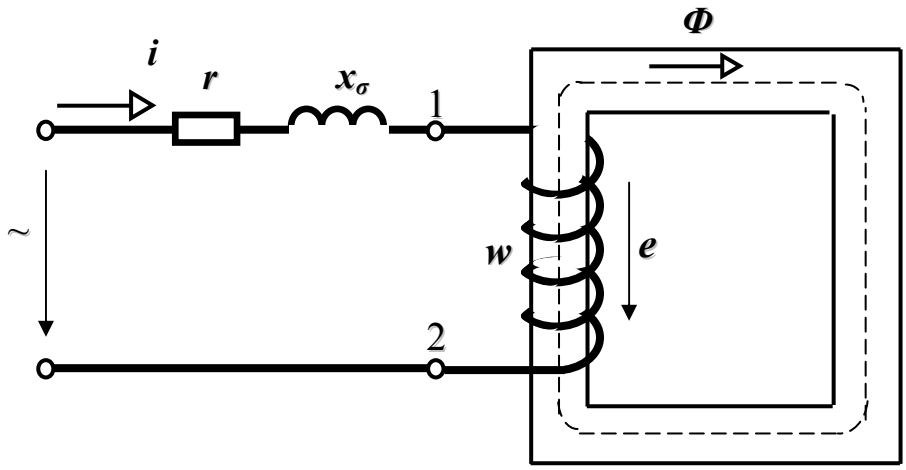


Рисунок 15.14 – Еквівалентна схема реальної котушки з феромагнітним осердям

Побудуємо векторну діаграму напруги, основного магнітного потоку, активної та реактивної складових струму і ЕРС самоіндукції реальної котушки з феромагнітним осердям згідно рівняння (15.25). Приймемо початкову фазу магнітного потоку рівною нулю (рисунок 15.15).

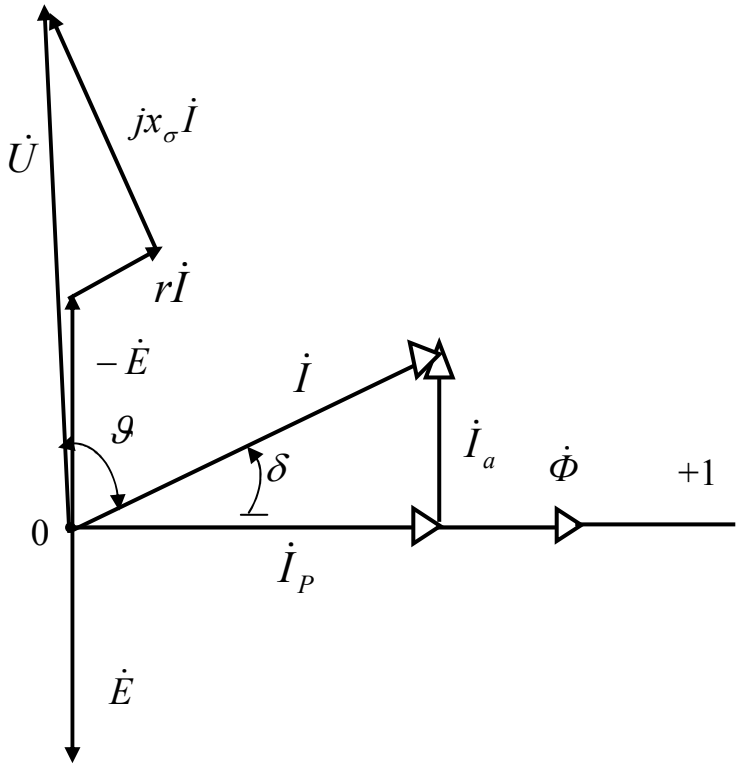


Рисунок 15.15 – Векторна діаграма реальної котушки з феромагнітним осердям

Розрахункова схема реальної котушки з феромагнітним осердям має вигляд, зображений на рисунку 15.16.

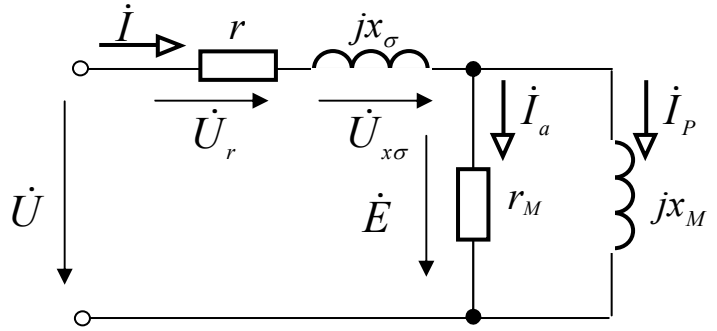


Рисунок 15.16 – Розрахункова схема індуктивної котушки з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння реальної котушки з феромагнітним осердям в комплексній формі

$$\dot{U} = r\dot{I} + jx_\sigma \dot{I} - \dot{E}\,. \qquad (15.26)$$

Знайдемо діюче значення ЕРС самоіндукції, якщо миттєвий магнітний потік $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Тоді вираз миттєвої ЕРС

$$e = -w\frac{d\Phi}{dt} = -w \cdot \omega \cdot \Phi_m \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ\right) = E_m \sin\left(\omega t - 90^\circ\right), \qquad (15.27)$$

де максимальна ЕРС самоіндукції визначається як

$$E_m = w \cdot \omega \cdot \Phi_m\,. \qquad (15.28)$$

Тоді діюче значення ЕРС самоіндукції

$$E = \frac{w \cdot \omega \cdot \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot w}{\sqrt{2}} \cdot \Phi_m = 4{,}44 \cdot f \cdot w \cdot \Phi_m\,. \qquad (15.29)$$

15.7 Феморезонанс напруг і струмів

Резонанс напруги у колі, що містить котушку з насиченим феромагнітним магнітопроводом, з'єднану послідовно з конденсатором називається **феморезонансом напруги**.

У колах, які містять нелінійну індуктивність і ємність, плавна зміна напруги може викликати скачки фази й амплітуди основної гармоніки струму, і, навпаки, плавна зміна струму може супроводжуватися стрибкоподібною зміною фази й амплітуди основної гармоніки напруги на деяких ділянках кола.

Розглянемо явище феморезонансу напруг. Під **феморезонансом напруги** розуміють стрибкоподібну зміну знака кута зсуву фаз між основними гармоніками напруги й струму, а також різку зміну величини силу струму при незначній зміні напруги на вході кола. Ці явища пов'язані з нелінійною зміною індуктивності котушки з феромагнітним осердям, у лінійних колах подібні явища принципово неможливі.

Розглянемо послідовне з'єднання конденсатора та котушки з феромагнітним осереддям (рисунок 15.17, а).

Точний аналіз феморезонансу напруг з урахуванням несинусоїдності форми кривої струму в котушці з феромагнітним магнітопроводом представляє значні труднощі. Тому в подальшому для спро-

щення розрахунків приймемо наступні спрощення: вважаємо, що котушка з феромагнітним магнітопроводом, яка включена в електричне коло, не має петлі гістерезису, вихрових струмів ($r_м = 0$), активний опір проводу обмотки дорівнює нулю ($r = 0$) тобто в колі присутні ідеальні котушка і конденсатор. Таким чином, розрахункова схема кола має вигляд, представлений на рисунку 15.17, б.

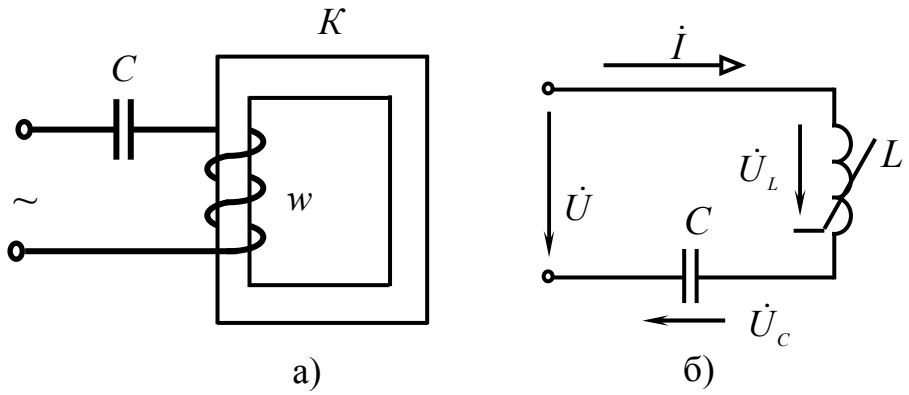


Рисунок 15.17 – Принципова (а)і розрахункова (б) схеми послідовно з'єднаних конденсатора та котушки з феромагнітним осердям

Оскільки котушка з феромагнітним осердям є нелінійним елементом, тому при синусоїдній напрузі і синусоїдному магнітному потоці струм має несинусоїдну форму (рисунок 15.18).

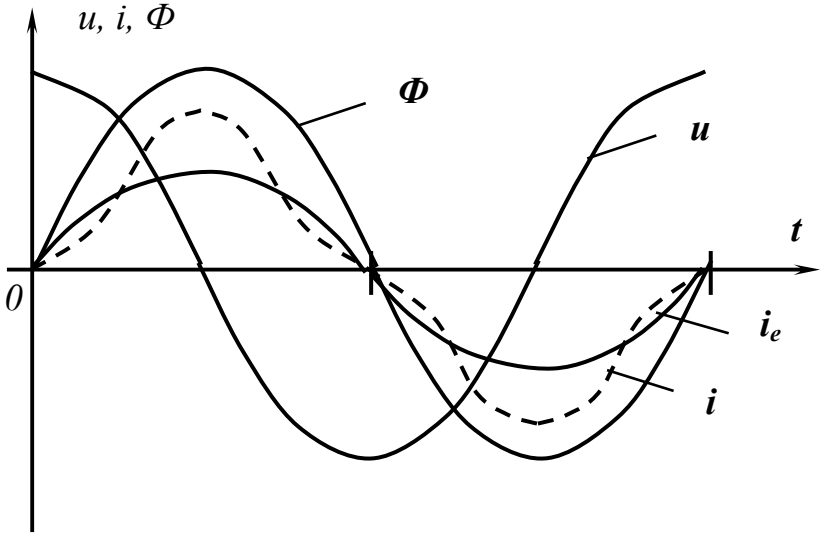


Рисунок 15.18 – Графічні залежності миттєвої напруги, магнітного потоку, струму і еквівалентного струму у котушці

Для подальших розрахунків символічним методом застосуємо метод еквівалентних синусоїд: замінимо несинусоїдну форму струму еквівалентною синусоїдою струм i_e.

Векторна діаграма електричного кола з урахуванням спрощень і прийнятою початковою фазою струму рівною нулю представлена на рисунку 15.19.

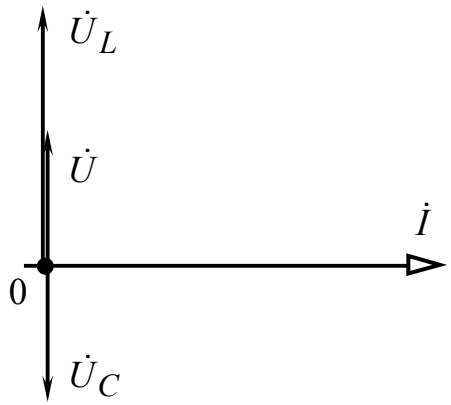


Рисунок 15.19 – Векторна діаграма при феррорезонансі напруг з урахуванням спрощень

Початкова фаза напруги на індуктивності $\dot{U}_L$ дорівнює 90º, тобто напруга на індуктивності випереджає струм на 90º, напруга на ємності $\dot{U}_C$ відстає від струму на 90º. Прикладена напруга на затискачах кола, згідно другого закону Кірхгофа, дорівнює

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C. \qquad (15.30)$$

Оскільки вектори $\dot{U}_L$ і $\dot{U}_C$ спрямовані протилежно, діюче значення напруги до затискачів кола визначається як

$$U = \left|U_L - U_C\right|. \qquad (15.31)$$

Оскільки ВАХ котушки $U_L(I)$ є нелінійною, ВАХ конденсатора $U_C(I)$ є похилою прямою лінією (рисунок 15.20), то величина ємності завжди може бути такою, що ВАХ конденсатора та котушки з фе-

ромагнітним осердям могли перетнуться. Різниця між залежностями $U_L(I)$ і $U_C(I)$ утворює криву $U(I)$, ординати якої визначають значення прикладеної напруги при різних значеннях струму.

Точка перетину «*a*» залежностей $U_L(I)$ і $U_C(I)$ відповідає феррорезонансу напруги, в цьому випадку $U_L = U_C$.

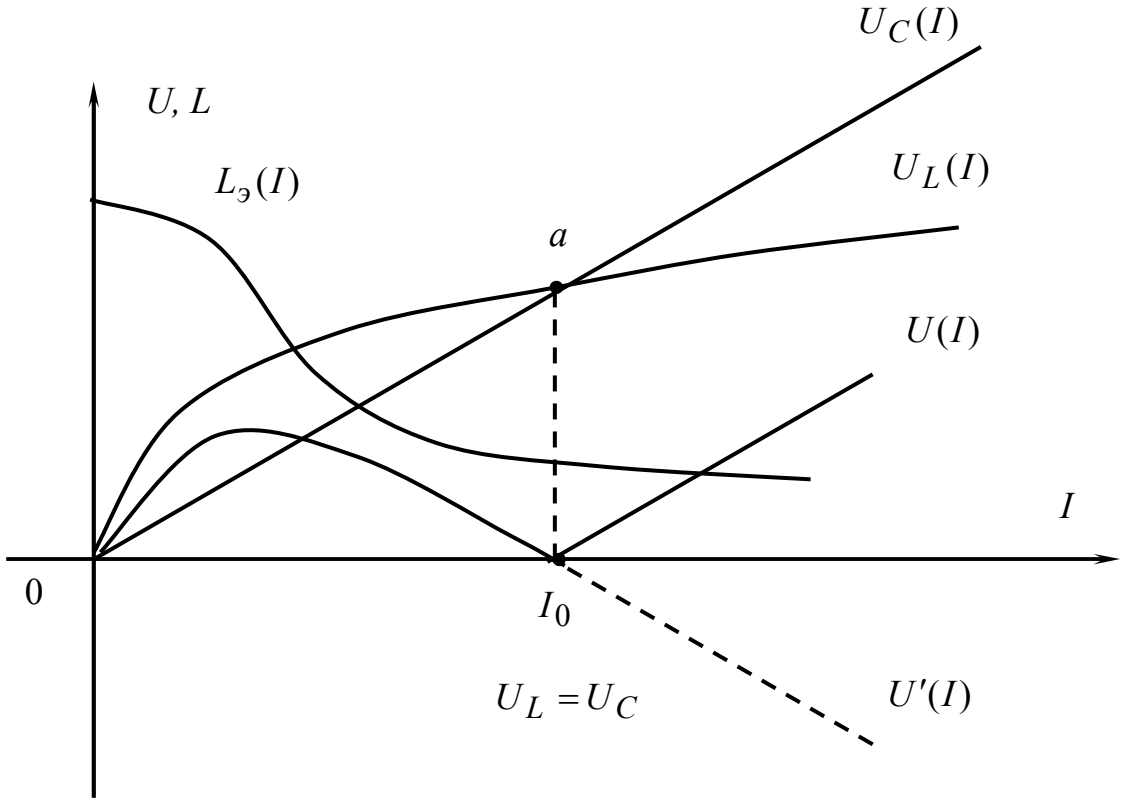


Рисунок 15.20 – ВАХ ідеальної котушки з феромагнітним осердям, ідеального конденсатора і електричного кола при послідовному з'єднанні котушки і конденсатора

Феррорезонанс напруг відбувається за рахунок зміни індуктивності і магнітної проникності феромагнітного матеріалу магнітопроводу котушки при зміні вхідної напруги. Однак, на відміну від лінійних кіл, зміна індуктивності відбувається в залежності від напруги кола, в наслідок нелінійної залежності між струмом і магнітним потоком. Еквівалентну індуктивність котушки з феромагнітним магнітопроводом при резонансі можна визначити за виразом

$$L_e = \frac{U_L}{\omega \cdot I}. \qquad (15.32)$$

Область характеристики $U(I)$ поблизу точки I_0 носить суто теоретичний характер. В реальній котушці з феромагнітним осердям, через втрати в осерді і проводі котушки, а особливо через несинусоїдну форми кривої струму, реальна графічна залежність ВАХ електричного кола $U(I)$ має такий вигляд, представлений на рисунку 15.21.

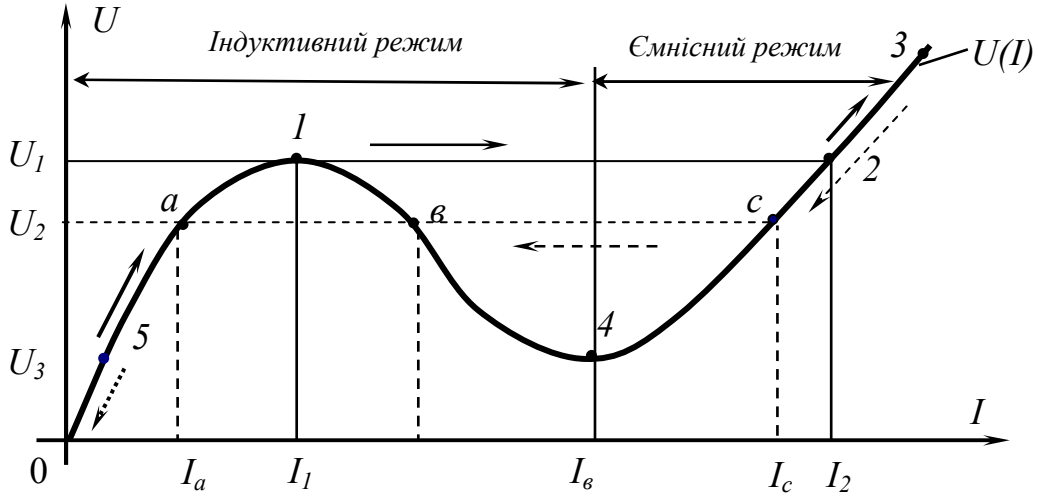


Рисунок 15.21 – Реальна ВАХ електричного кола з послідовно з'єднаними реальною котушкою зі сталлю і конденсатором

При зміні напруги U від нуля до U_1 напруга на індуктивності перевищує напругу на ємності (струм за фазою відстає від напруги), що відповідає індуктивному режиму. Зміна режиму відбувається при досягненні напруги U_1, при цьому в точці 1 спостерігається стрибок струму, при якому величина струму зростає з I_1 до I_2 (точка 2). У цьому випадку напруга на ємності перевищить напругу на індуктивності (по фазі струм I_2 буде випереджати напругу), спостерігається «перекидання фази», що відповідає ємнісному режиму. Подальше зростання напруги викликає плавне збільшення струму (точка 3).

При зменшенні напруги до величини U_3 (точка *c*) знову відбувається зворотній стрибок струму з I_c до I_a, що відповідає переходу із точки 3 у точку 5. Зворотній стрибок струму наступає декілька пізніше, ніж прямий, що пов'язано з гістерезисом у магнітопроводі. З характеристики видно, що при одному значенні напруги U_2 на затискачах електричного кола можливі три значення струму: I_a, $I_в$, I_c. У двох перших випадках струм відстає по фазі від напруги ($U_L > U_C$). А у третьому випадку – випереджає його ($U_L < U_C$). Така невизначеність – декілька значень струму в колі при одній і тій же напрузі – може мати місце лише в колах з нелінійними характеристиками.

Режим роботи електричного кола при струмах I_a і I_1 є стійким, оскільки на ділянці з підйомом характеристики при збільшенні напруги U струм також зростає, а при зменшенні напруги – зменшується.

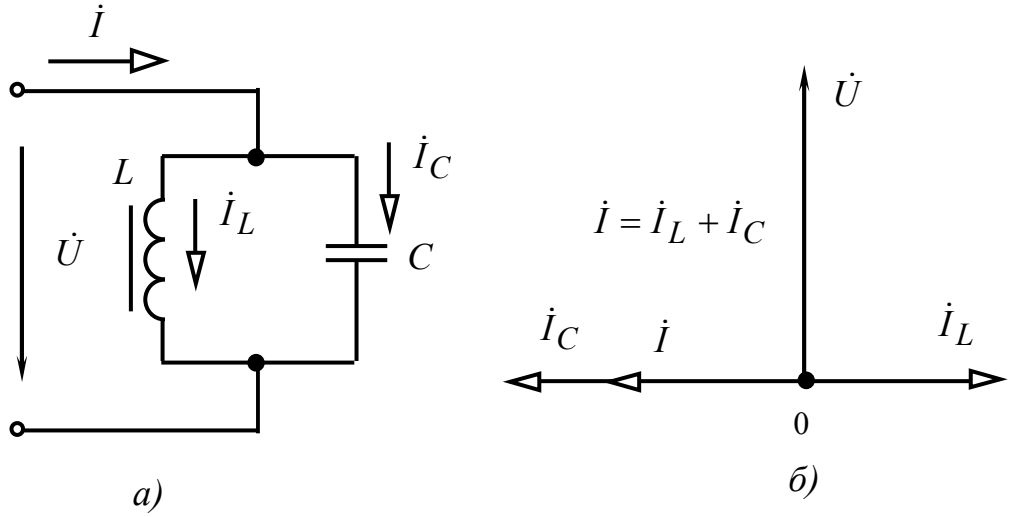
Режим роботи при струмі I_2 є нестійким, оскільки на спадаючій ділянці ВАХ зі зменшенням напруги U струм зростає, а з підвищенням напруги навпаки – спадає, таким чином незначна зміна напруги може викликати перехід від поточного режиму роботи електричного кола до першого або третього режиму.

Характерно, що при кожному стрибку струму, фаза струму по відношенню до прикладеної напруги U змінюється на 180º. Явище різкої зміни струму при незначній зміні напруги на вході називається **тригерним ефектом** у послідовному ферорезонансному колі.

Якщо котушка зі феромагнітним осереддям і конденсатор з'єднані паралельно (рисунок 15.22*а*), тоді в електричному колі може виникнути **резонанс струмів.**

При розгляді даного явища приймемо умову, за якою відсутні втрати в котушці зі феромагнітним осереддям від вищих гармоніках. Векторна діаграма кола представлена на рисунку 15.22, б. В цьому випадку при живленні кола від джерела заданої напруги не відбувається стрибків струму і, навпаки, при живленні кола від джерела зада-

ного струму можливі стрибки напруги, що супроводжуються зміною знака кута зсуву фаз між напругою й струмом.



а) розрахункова схема кола; б) векторна діаграма струмів і напруги;

Рисунок 15.22 – Ферорезонанс струмів

Спочатку струм у котушці $\dot{I}_{\mathrm{L}}$ буде відставати від напруги $\dot{U}$ на 90º, а струм $\dot{I}_{\mathrm{C}}$ буде випереджати напругу на 90º. Спожитий електричним колом струм визначається за першим законом Кірхгофа таким чином

$$\dot{I} = \dot{I}_{\mathrm{L}} + \dot{I}_{\mathrm{C}}. \qquad (15.33)$$

Струм, спожитий електричним колом за модулем дорівнює

$$I = |I_{\mathrm{L}} + I_{\mathrm{C}}|. \qquad (15.34)$$

ВАХ котушки з феромагнітним осердям, конденсатора та всього електричного кола представлені на рисунку 15.23, графічна залежність *I(U)* носить теоретичний характер. Можна підібрати таке значення напруги *U*, при якій реактивна складова першої гармоніки I_L дорівнює струму I_C В цьому випадку загальний струм містить тільки активну складову першої гармоніки і вищі гармоніки струму в індуктивності і ємності. Звичайно амплітуда активної складової значно менша амплітуд вищих гармонік, причому найбільшу амплітуду має третя гармоніка, отже загальний струм змінюється з потрійною частотою.

Реально, через втрати в магнітопроводі, активному опорі котушки і викривлення форми кривої струму, реальна залежність між струмом і напругою всього кола має вигляд суцільної кривої (рисунок 15.24).

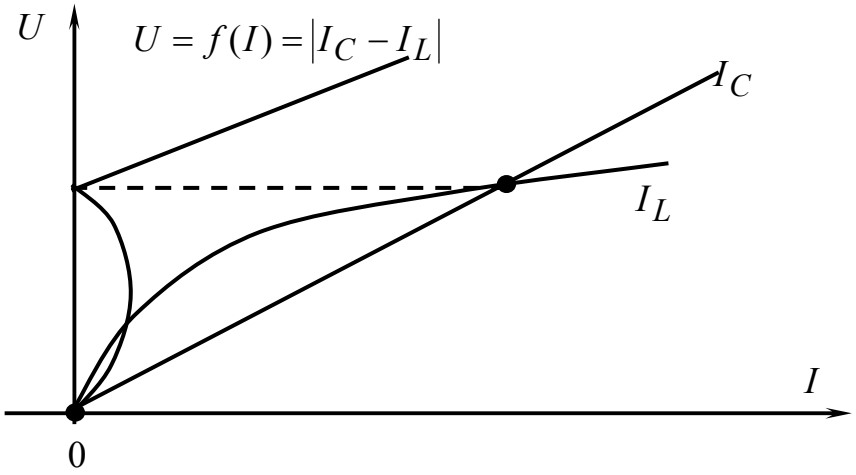


Рисунок 15.23 – Побудова ВАХ кола при ферорезонансі струмів

Якщо живити схему не від джерела заданої напруги, а від джерела заданого струму, то в схемі спостерігаються стрибки напруги.

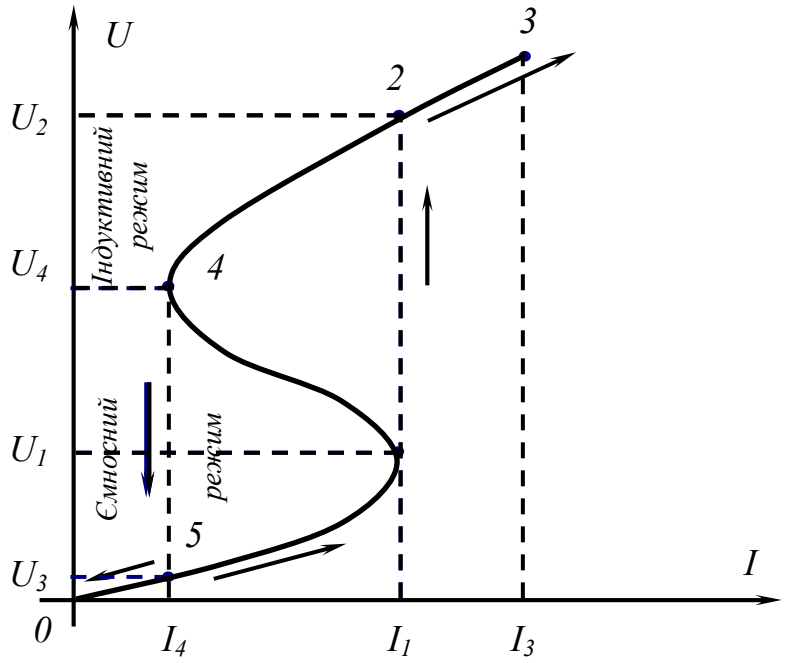


Рисунок 15.24 – Реальна ВАХ кола при ферорезонансі струмів

Плавне збільшення струму від нуля до I_1 призводить до зміни напруги на ділянці 0-1 (рисунок 15.25). Подальше збільшення струму призводить до різкого зростання напруги і зміні знаку кута зсуву фаз між напругою U і струмом I (перехід з точки1 у точку 2). При малих струмах реактивний опір кола ємнісний, а при більший струмах – індуктивний. Подальше збільшення струму супроводжується збільшенням напруги на ділянці 2-3. Зменшення струму призводить до плавного зменшення напруги на ділянці 3-4. При зниженні струму до значення I_3 здійснюється стрибкоподібне зменшення напруги, що супроводжується зміненням знаку кута зсуву фаз. Явища, аналогічні феророзонансам струму і напруги спостерігаються у випадку лінійної індуктивності і нелінійній ємності.

Для зменшення стрибків струми в схемі використовують регулювальний реостат. Якщо в наведеній розрахунковій схемі (рисунок 15.26) опір реостату ***R*** набагато більше опору іншого кола, то змінюючи його величину можна плавно змінювати струм у колі (рисунок 15.25).

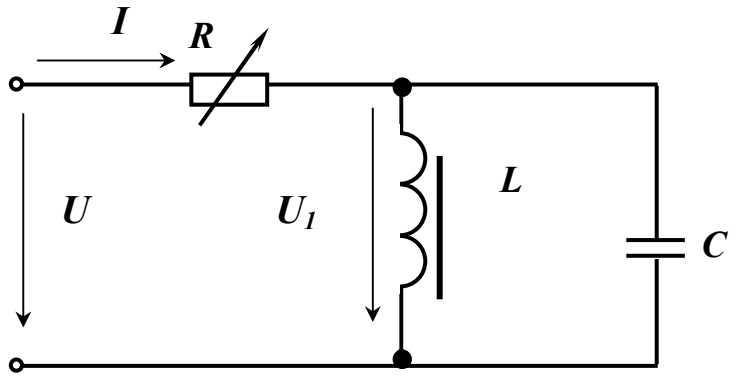


Рисунок 15.26 – Розрахункова схема регулювання сили струму при феророзонансі струму

При зниженні струму в зворотному напряму резонанс струмів наступає при менших струмах, в порівнянні з прямим резонансом струмів, що пов’язане з явищем гістерезісу у сталі магнітопроводу.

Явище різкої зміни напруги в колі при незначній зміні струму називається **тригерним ефектом** у паралельному ферорезонансному колі.

Особливості кіл, що містять котушки з феромагнітним осердям й конденсатори, використовують для пристрою ферорезонансних стабілізаторів напруги, призначених для підтримки постійною напруги на затискачах приймача при зміні напруги живлючої мережі.

Розглянуті явища резонансу напруги та струму можуть виникати в електричному колі як випадково, так і застосовуватися в електричних пристроях.

Ферорезонансний стабілізатор напруги – такий чотириполюсник, у якому значна зміна напруги на вході викликає лише незначну зміну напруги на виході. Основна частина стабілізатора складається із двох послідовно з'єднаних опорів – лінійного (ємнісного опору) й нелінійного (індуктивного опору) (рисунок 15.27). Розглянемо реальний випадок явища ферорезонансу напруг.

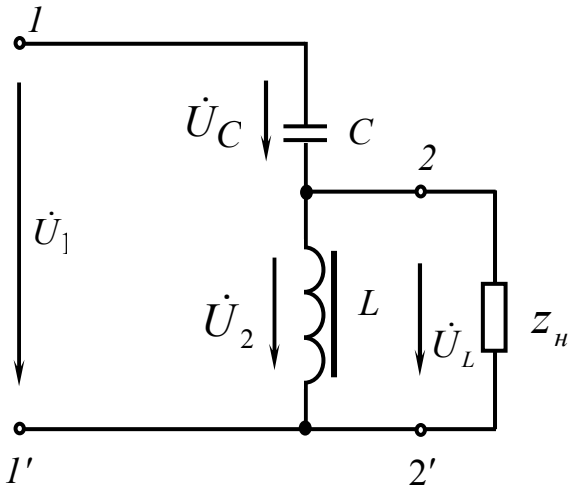


Рисунок 15.27 – Схема основної частини стабілізатора напруги

Феромагнітний стабілізатор напруг працює в зоні насиченого магнітопроводу після стрибка струму.

Сутність явища стабілізації полягає в такій зміні параметрів послідовно з’єднаних елементів нелінійного електричного кола при зміні

напруги живлення, при якій відносна зміна напруги на одній ділянці кола виявляється значно меншою, ніж на вхідних затискачах кола. Так в колі, що зображене на рисунку 15.27, з збільшенням напруги живлення струм різко зростає і його збільшення призводить до зменшення індуктивності котушки з феромагнітним магніто проводом, в той час, як ємність остається без змін. Таким чином, відносна зміна напруги на індуктивності (затискачі 2-2′) виявляється значно меншим ніж на затискачах 1-1′.

Визначивши для ряду значень U_1 відповідні значення U_2, можна побудувати залежність $U_2 = f(U_1)$ (рисунок 15.28).

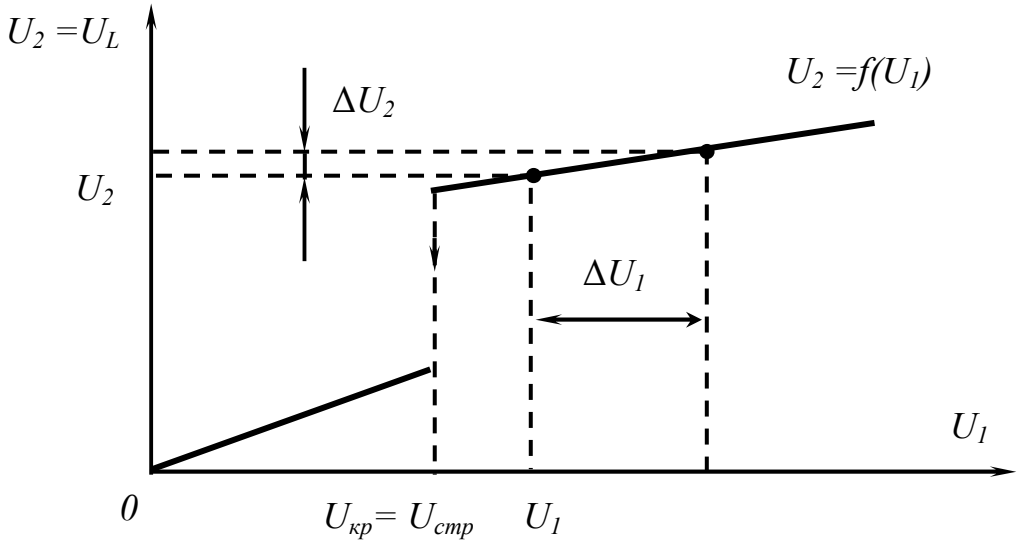


Рисунок 15.28 – Графічна залежність $U_2 = f(U_1)$ стабілізатора напруги

Замість конденсатора С в коло можна включити і лінійний резистор або котушку з лінійною ВАХ, однак ефект стабілізації буде менший, оскільки зміна струму в котушці зі феромагнітним магнітопроводом, а відповідно, в її еквівалентній індуктивності при зміні напруги живлення в цих випадках менше. Приєднання навантаження до вторинних затискачів стабілізатора створить ділянку, паралельну нелінійній котушці, в результаті струм в котушці зменшиться. Зі зміною напруги живлення повний опір між затискачами2-2′ зміниться менше,

чим при відсутності навантаження, отже, стане погіршення стабілізуючих властивостей кола. З графіку (рисунок 15.28) видно, що значне збільшення первинної напруги (ΔU_1) відповідає незначна зміна вторинної напруги (ΔU_2) та що схема (рисунок 15.27) дозволяє стабілізувати напруги лише при напрузі мережі більше критичного, рівного $U_{стр}$.

Ферорезонансні стабілізатори характеризуються коефіцієнтом стабілізації

$$K_c = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{\Delta U_1 \cdot U_2}{U_1 \cdot \Delta U_2}, \qquad (15.35)$$

де U_1 – напруга на вході стабілізатора, В;

U_2 – напруга на виході стабілізатора (на навантаженні), В;

ΔU_1, ΔU_2 – зміна напруги на вході й на виході, В.

Коефіцієнт навантаженого стабілізатора значно нижчий, чим при холостому ході. За рахунок несинусоїдної форми кривих струмів і напруг в нелінійних колах напруга U_2 зазвичай містить вищі гармоніки навіть при живленні стабілізатора від джерела синусоїдної ЕРС з напругою U . Лише у мостових стабілізаторів з терморезисторами напруга на виході наближається по формі до синусоїди.

15.8. Трансформатор з феромагнітним осердям

Електромагнітні явища в трансформаторі з феромагнітним (сталевим) осердям подібні явищам у повітряному трансформаторі: явища електричного струму, електромагнетизму (основний і потік розсіювання у первинній обмотці), електромагнітної індукції (ЕРС самоіндукції і ЕРС розсіювання у первинній обмотці ЕРС взаємоіндукції у вторинній обмотці) і теплової дії струму у первинній обмотці. Якщо до вторинної обмотки підключити навантаження, то у вторинній обмотці будуть спостерігатися явища електричного струму, електромаг-

нетизму (потік розсіювання) і нагріву вторинної обмотки. В феромагнітному магнітопроводі будуть спостерігатися явища гістерезису і вихрових струмів.

На відміну від повітряного трансформатору магнітний потік, який пронизує обидві обмотки, замикається не по повітрю, а через сталеве осердя. Конструктивну схему трансформатора зі сталевим осердям наведено на рисунку 15.29.

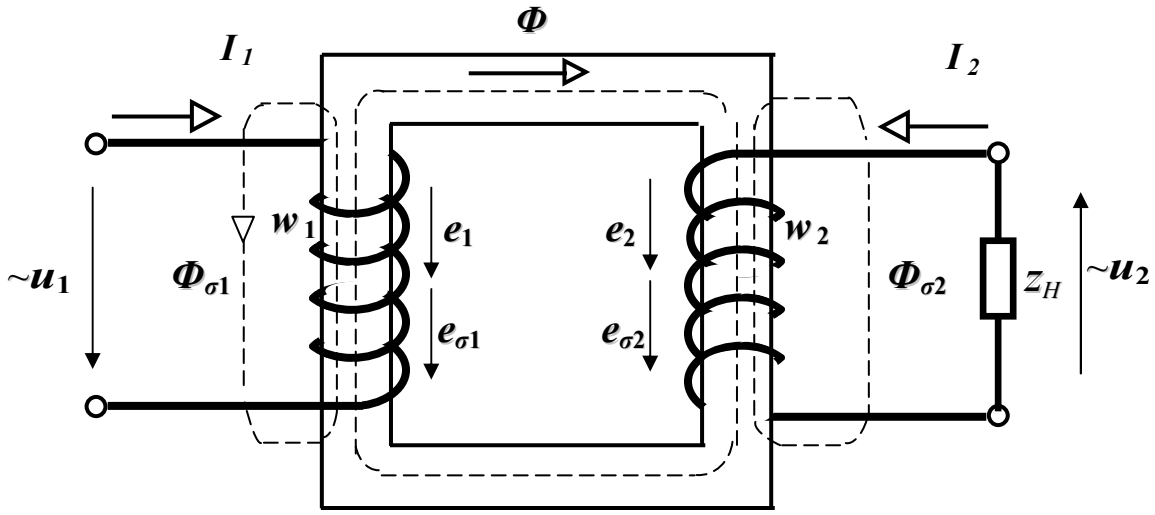


Рисунок 15.29 – Конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

При навантаженні трансформатора магнітний потік може бути представлений сумою потоків: Φ – основного у осерді, $\Phi_{\sigma 1}$ – розсіювання, зв'язаного тільки з первинною обмоткою, $\Phi_{\sigma 2}$ – розсіювання, зв'язаного тільки зі вторинною обмоткою. Напруга u_1, прикладена до первинної обмотки, врівноважується спаданням напруги на активному опорі обмотки та електрорушійними силами $e_{\sigma 1}$ і $e_{\sigma 1}$, тобто

$$u_1 = r_1 i_1 + e_{\sigma 1} - e_1 = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} - e_1, \qquad (15.36)$$

де $L_{\sigma 1}$ – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання $\Phi_{\sigma 1}$, $Гн$.

У вторинній обмотці ЕРС, яка наводяться магнітними потоками Φ і $\Phi_{\sigma 2}$, врівноважується спаданням напруг на активному опорі обмотки та опорі навантаження, тобто

$$e_2 + e_{\sigma 2} = r_2 i_2 + u_2 \tag{15.37}$$

або

$$e_2 = r_2 i_2 - e_{\sigma 2} + u_2 = r_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2 , \tag{15.37}$$

де $L_{\sigma 2}$ – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання $\Phi_{\sigma 2}$, *Гн*.

Замінимо реальний трансформатор еквівалентним конструктивною схемою (рисунок 15.30).

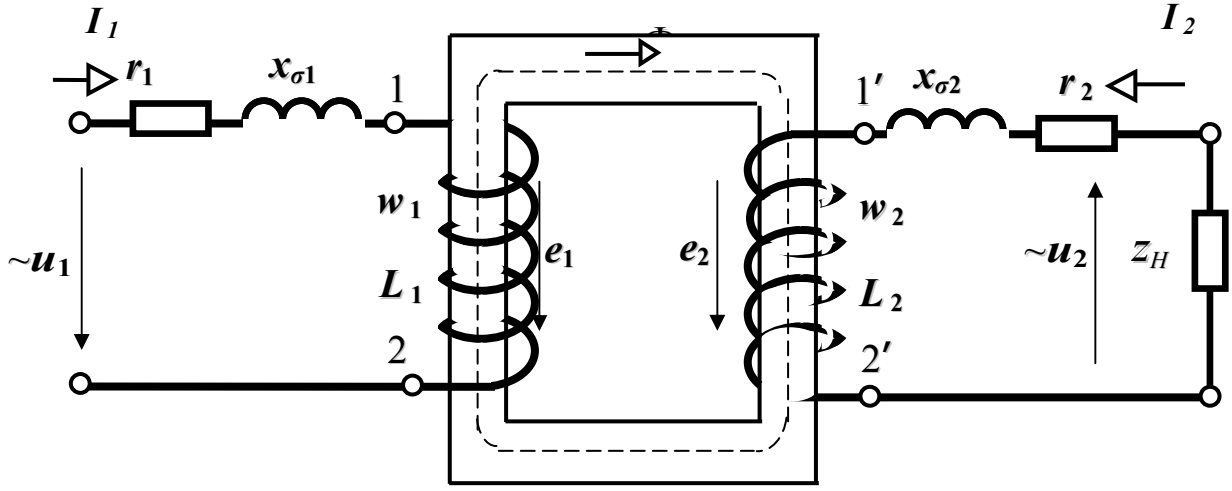


Рисунок 15.30 – Еквівалентна конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

Трансформатор із затисками 1–2 і 1′–2′ називається ідеальним трансформатором (в якому відсутні втрати на нагрів, від потоків розсіювання).

Коефіцієнт трансформації трансформатора

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{4{,}44 f w_1 \Phi_m}{4{,}44 f w_2 \Phi_m} = \frac{w_1}{w_2}. \qquad (15.38)$$

Розглянемо спочатку ідеальний трансформатор, у якому $r_1 = 0$; $x_{\sigma 1} = 0$; $r_2 = 0$; $x_{\sigma 2} = 0$; $w_1 = w_2$.

При холостому ході такий трансформатор не відрізняється від звичайної ідеальної котушки і може бути зображений схемою заміщення (рисунок 15.31).

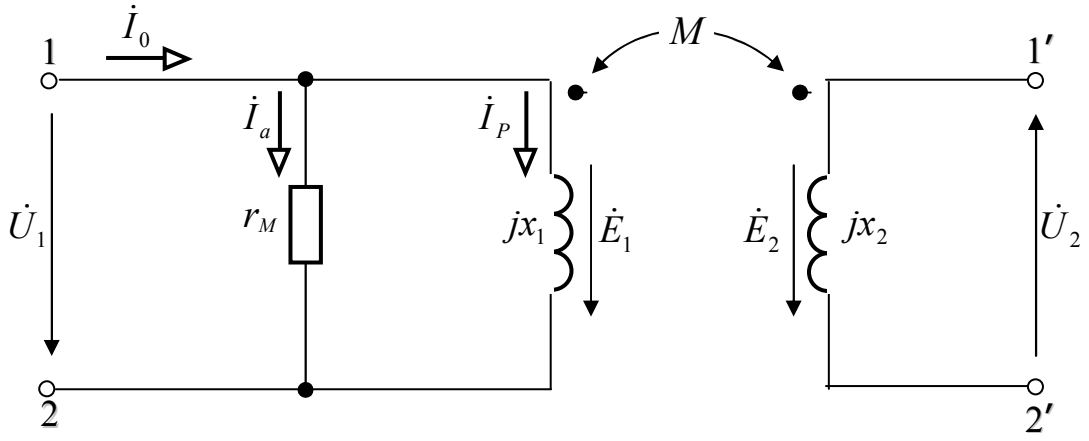


Рисунок 15.31 – Схема заміщення ідеального трансформатора при холостому ході

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при холостому ході (рисунок 15.32).

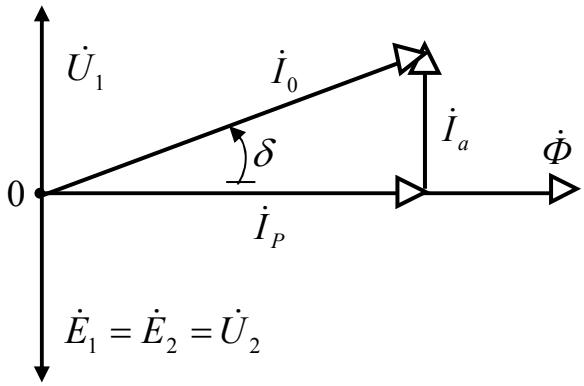


Рисунок 15.32 – Векторна діаграма ідеального трансформатора при холостому ході

Намагнічуюча сила при холостому ході (у первинній обмотці)

$$\dot{F}_0 = w_1 \dot{I}_0 = Z_м \dot{\Phi}, \qquad (15.39)$$

де $Z_м$ – комплекс магнітного опору осердя, $1/Гн$;

$\dot{\Phi}$ – комплекс основного магнітного потоку, $Вб$.

Рівняння для первинного контуру

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1. \qquad (15.40)$$

Складемо тепер схему заміщення ідеального трансформатора при його навантаженні (рисунок 15.33).

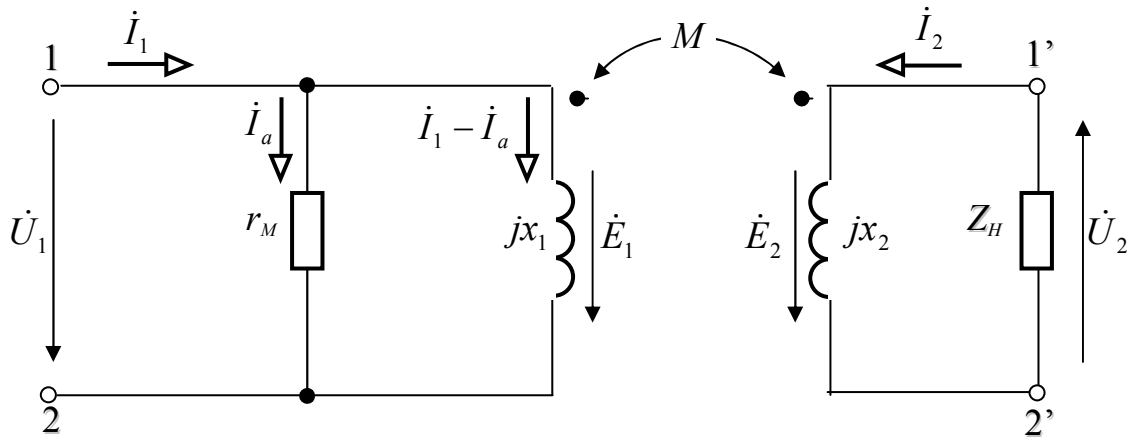


Рисунок 15.33 – Схема заміщення ідеального трансформатора при навантаженні

Якщо до затисків вторинної обмотки підключити навантаження з опором Z_H, то в ній буде проходити струм $\dot{I}_2$, який, у свою чергу, буде намагатися зменшити магнітний потік $\dot{\Phi}$, а це приведе до ЕРС $\dot{E}_1$, внаслідок чого струм $\dot{I}_1$ зросте до такої величини, при якій магнітний потік $\dot{\Phi}$ набуде початкового значення і буде виконуватися рівняння (15.40). Таким чином, поява струму у вторинному контурі приводить до збільшення струму в первинному контурі.

У навантаженому трансформаторі магнітний потік у осерді дорівнює магнітному потоку при холостому ході, тобто завжди $\Phi = const$.

При навантаженні магнітний потік $\dot{\Phi}$ створюється під дією намагнічуючих сил первинної і вторинної обмоток

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = w_1\dot{I}_1 + w_2\dot{I}_2 = Z_м\dot{\Phi}. \qquad (15.41)$$

Порівнявши (15.39) і (15.40), знаходимо

$$w_1\dot{I}_1 + w_2\dot{I}_2 = w_1\dot{I}_0. \qquad (15.42)$$

При рівності кількості витків первинної і вторинної обмоток

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_0. \qquad (15.43)$$

З рівняння (15.43)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}_2. \qquad (15.44)$$

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при навантаженні (рисунок 15.34).

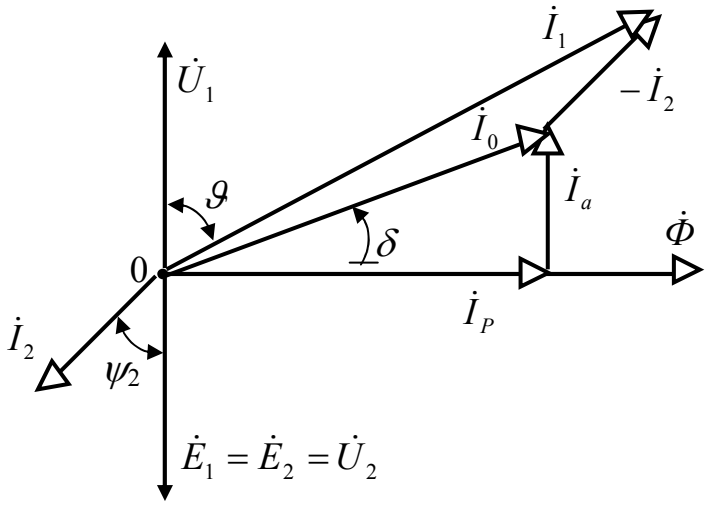


Рисунок 15.34 – Векторна діаграма ідеального трансформатора при навантаженні

Перетворимо схему заміщення ідеального трансформатора, для чого розв'яжемо індуктивний зв'язку. Якщо з'єднати однойменні зати-

ски обмоток трансформатора між собою, то режим роботи трансформатора не зміниться.

Розглянемо спочатку індуктивно зв'язані елементи, які тепер мають загальну точку. Коефіцієнт зв'язку двох елементів у даному випадку дорівнює одиниці, оскільки весь магнітний потік повністю зчеплений з витками первинної і вторинної обмоток, тобто

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1, \tag{15.45}$$

тому, з огляду на те, що $w_1 = w_2$, знаходимо

$$M = L_1 = L_2. \tag{15.46}$$

Замінимо частину схеми з загальною точкою (рисунок 15.35, а) на еквівалентну схему (рисунок 15.35б).

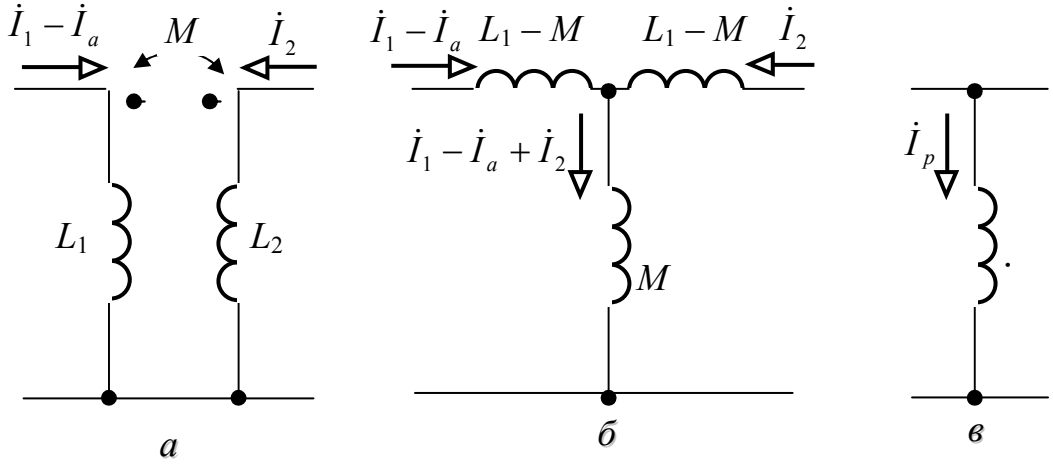


Рисунок 15.35 – Схеми еквівалентного перетворення ідеального трансформатора

Тепер

$$L_1 - M = 0, \quad L_2 - M = 0, \tag{15.47}$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_a + \dot{I}_2 = \dot{I}_0 - \dot{I}_a = \dot{I}_p. \tag{15.48}$$

З урахуванням (15.47), (15.48) схема заміщення ідеального трансформатора приймає вигляд (рисунок 15.35, в). Розрахункова схема іде-

ального трансформатора з феромагнітним осердям має вигляд, зображений на рисунку 15.36.

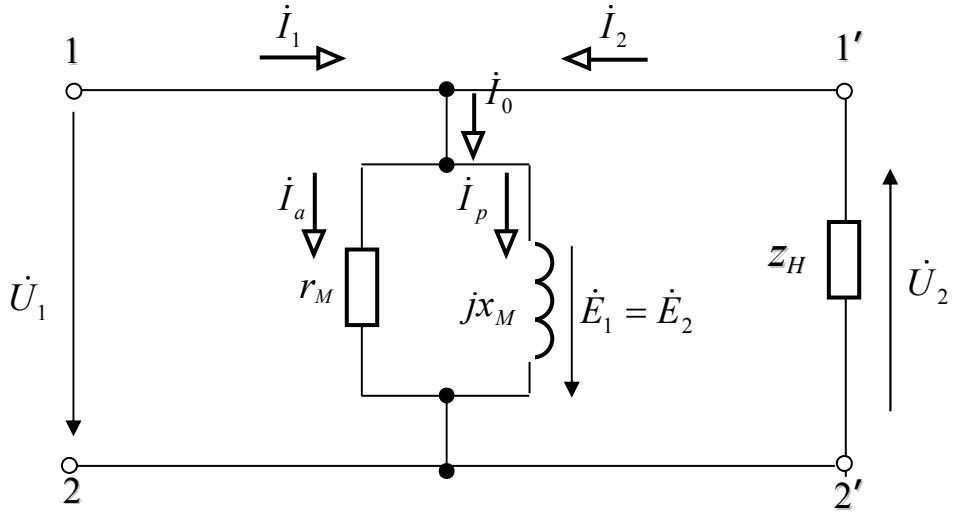


Рисунок 15.36 – Розрахункова схема ідеального трансформатора з феромагнітним осердям

Якщо тепер врахувати активні й індуктивні опори розсіювання обох обмоток, то для трансформатора, у якого $w_1 = w_2$, одержимо схему заміщення, приведену на рисунку 15.37.

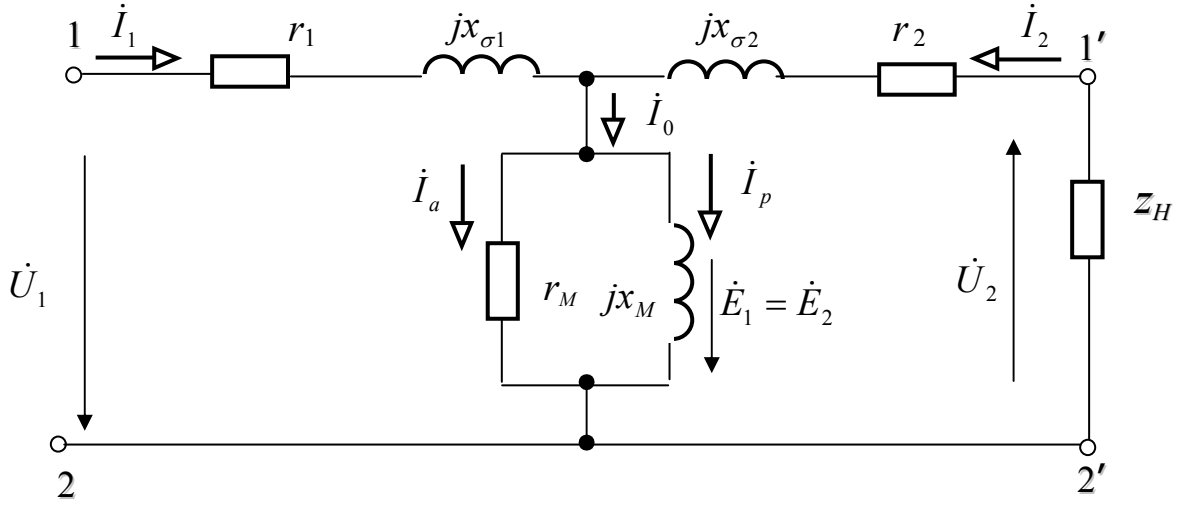


Рисунок 15.37 – Схема заміщення реального трансформатора з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів кола трансформатора з феромагнітним осердям

$$\dot{U}_1 = r_1\dot{I}_1 + jx_{\sigma 1}\dot{I}_1 - \dot{E}_1; \tag{15.49}$$

$$\dot{E}_2 = r_2\dot{I}_2 + jx_{\sigma 2}\dot{I}_2 + \dot{U}_2. \tag{15.50}$$

Побудуємо векторну діаграму напруг і струмів трансформатора з феромагнітним осердям (рисунок 15.37).

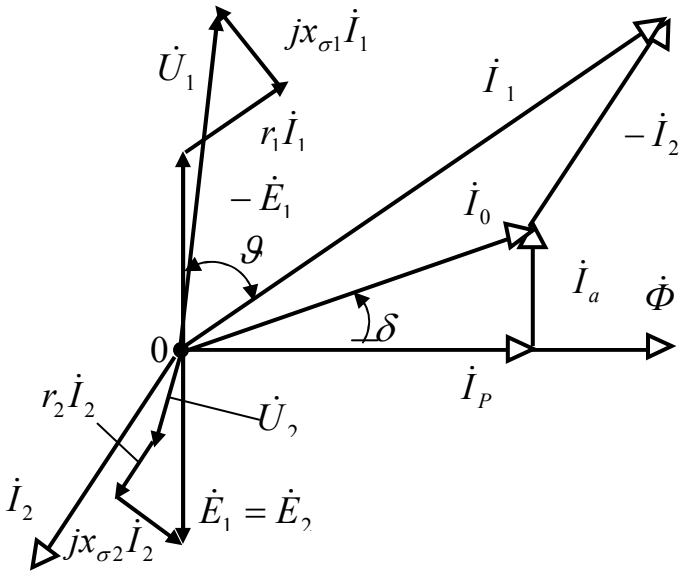


Рисунок 15.37 – Векторна діаграма напруг і струмів трансформатора з феромагнітним осердям

Приклад 15.2

Трансформатор з феромагнітним осереддям має первинну обмотку з 1200 *витків*, вторинну обмотку з 60 *витків*. До первинної обмотки підведена напруга 4000 *В*. **Визначити: коефіцієнт трансформації, напругу на затискачах вторинної обмотки.**

Рішення

1. Визначаємо коефіцієнт трансформації за (15.38)

$$K = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1200}{60} = 20.$$

2. Визначаємо напругу на затискачах вторинної обмотки трансформатора

$$U_2 = \frac{U_1}{K} = \frac{4000}{20} = 200 \text{ В}.$$

15.9. Приведений трансформатор

Оскільки в загальному випадку $w_1 \neq w_2$, то і $E_1 \neq E_2$. Це ускладнює аналіз процесів у трансформаторі, тому обидві обмотки трансформатора приводять до однієї кількості витків. Як правило, вторинну обмотку з кількістю витків w_2 приводять до первинної обмотки з кількістю витків w_1 – **приведений трансформатор**.

Для цього вторинну обмотку замінюють еквівалентною з кількістю витків w_1, але змінюють параметри та електричні величини вторинного контуру так, щоб магнітний потік і потужність трансформатора залишилися без змін. Приведені величини позначають так

$$\dot{E}_2'; \ \dot{I}_2'; \ r_2'; \ x_{\sigma 2}'; \ z_н'; \ \dot{U}_2'; \ w_2'.$$

Електрорушійна сила, яка наводиться у вторинній обмотці основним магнітним потоком, дорівнює

$$E_2 = 4{,}44 f w_2 \Phi_m, \tag{15.51}$$

звідки

$$\Phi_m = \frac{E_2}{4{,}44 f w_2}. \tag{15.52}$$

При заміні дійсної вторинної обмотки з кількістю витків w_2 приведеною обмоткою з кількістю витків первинної обмотки $w'_2 = w_1$ основний магнітний потік буде наводити в ній електрорушійну силу

$$E_2' = 4{,}44 f w_2' \Phi_m = 4{,}44 f w_2' \frac{E_2}{4{,}44 f w_2} = E_2 \frac{w_1}{w_2} = E_2 k, \tag{15.53}$$

де k – коефіцієнт трансформації трансформатора.

Коефіцієнт трансформації визначається як відношення ЕРС первинної обмотки до ЕРС вторинної обмотки або відношення кількості витків первинної обмотки до кількості витків вторинної обмотки

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}. \qquad (15.54)$$

Якщо підставити значення *k*, то одержимо

$$E_2' = E_1. \qquad (15.55)$$

Аналогічно (15.53) приведена напруга на затискачах вторинної обмотки

$$U_2' = U_2 k, \qquad (15.56)$$

Оскільки у випадку приведення вторинної обмотки до первинної магнітний потік залишається незмінним, то і вторинна намагнічуюча сила повинна залишатися незмінною, тобто

$$F_2 = w_2 I_2 = w_1 I_2', \qquad (15.57)$$

Звідки приведений струм вторинної обмотки

$$I_2' = I_2 \frac{w_2}{w_1} = \frac{I_2}{k}. \qquad (15.58)$$

Через те, що умовою приведення є постійність потужностей (активної, реактивної і повної), то і втрати в провідниках дійсної і приведеної вторинної обмоток повинні бути однаковими, тобто

$$r_2 I_2'^2 = r_2' I_2'^2, \qquad (15.59)$$

звідки активний опір проводу приведеної вторинної обмотки

$$r_2' = r_2 \left(\frac{I_2}{I_2'} \right)^2 = r_2 \left(\frac{k I_2}{I_2} \right)^2 = r_2 k^2. \qquad (15.60)$$

Реактивний опір проводу приведеної вторинної обмотки

$$x_{\sigma 2}' = x_{\sigma 2} k^2; \qquad z_H' = z_H k^2. \qquad (15.61)$$

Приведений повний опір навантаження

$$z'_H = z_H k^2 . \qquad (15.62)$$

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів трансформатора

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + jx_{\sigma 1}\dot{I}_1 - \dot{E}_1 ; \qquad (15.63)$$

$$\dot{E}'_2 = r'_2 \dot{I}'_2 + jx'_{\sigma 2}\dot{I}'^2_2 + \dot{U}'_2 . \qquad (15.64)$$

Схема заміщення приведеного трансформатора представлена на рисунку 15.39.

Векторна діаграма струмів і напруг приведеного трансформатора має такий же вигляд, як і векторна діаграма, приведена на рисунку 15.38.

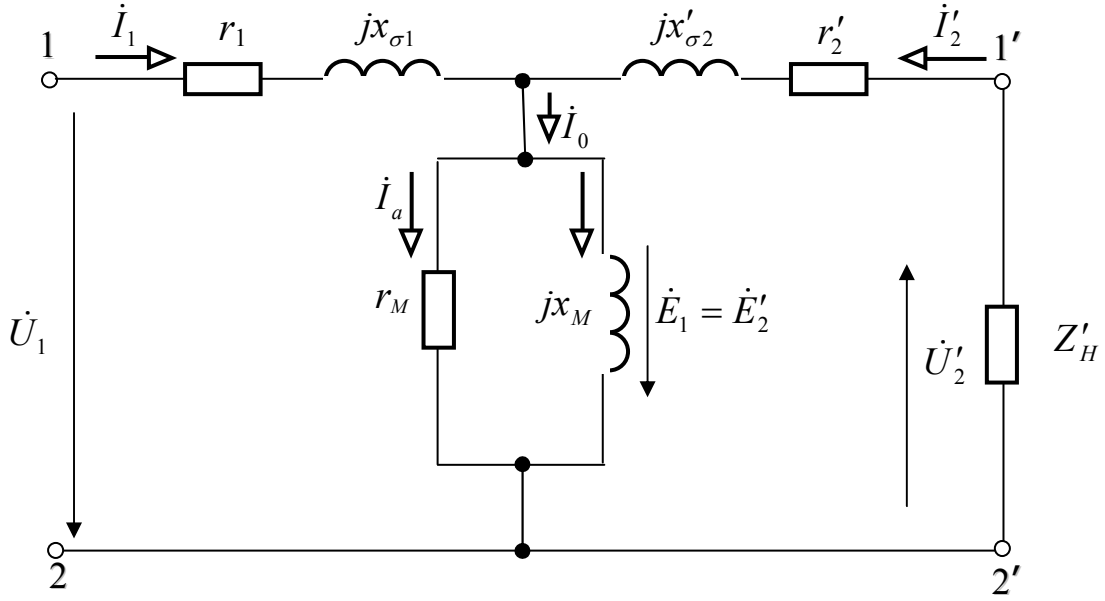


Рисунок.15.38 – Схема заміщення приведеного трансформатора

Приклад 15.3

На магнітопровід трансформатора, перерізом 0,012 *м*^{2}, намотали вимірювальну обмотку з 50 *витків*. Частота струму в первинній обмотці дорівнює 50 *Гц*. До вимірювальної обмотки підключили вольтметр, що показав 400 *В*. **Визначити амплітуду магнітного потоку і магнітну індукцію в магнітопроводі трансформатора.**

Рішення

1. Визначаємо амплітуду магнітного потоку в магнітопроводі трансформатора

$$\Phi_m = \frac{E_u}{4{,}44 \cdot f \cdot w_u} = \frac{U_u}{4{,}44 \cdot f \cdot w_u};$$

$$\Phi_m = \frac{400}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 50} = \frac{400}{11100} = 3{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

2. Визначаємо магнітну індукцію в магнітопроводі трансформатора

$$B = \frac{\Phi_m}{\sqrt{2} \cdot S}; \qquad B = = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 2{,}18 \ Тл.$$

15.10 Феромагнітні підсилювачі потужності

Найпростіший магнітний підсилювач, який називають реактором або дроселем, показаний на рисунку 15.39.

На магнітопроводі розміщені дві обмотки: робоча з числом витків w_P і керуюча з числом витків w_K. Послідовно з робочою обмоткою підключається навантаження z_H. Робоча обмотка послідовно з навантаженням підключається до джерела живлення з синусоїдною напругою.

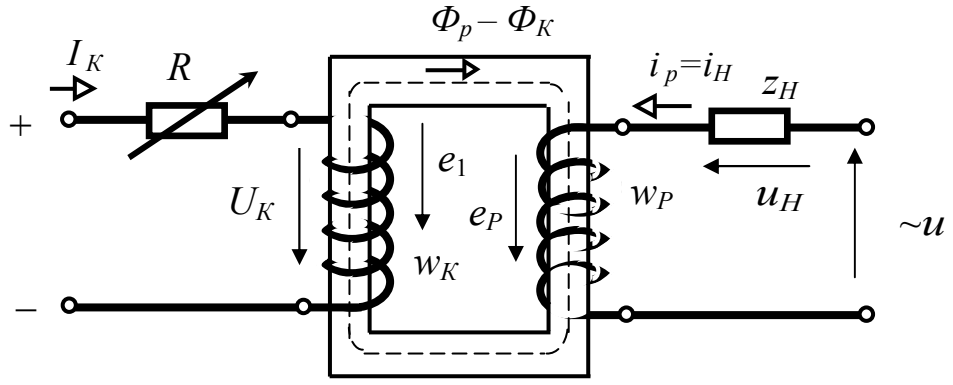


Рисунок 15.39 – Феромагнітний підсилювач потужності

Коло керуючої обмотки w_K називається вхідним колом, коло робочої обмотки w_P і навантаження z_H – вихідною.

Керуюча обмотка через регулювальний резистор R підключена до джерела постійної напруги. Магнітний потік, що створюється струмом I_K в керуючі обмотці w_K називають потоком підмагнічування.

Параметри вихідного кола підібрані таким чином, що при відсутності струму у вхідному колі, тобто за відсутністю струму підмагнічування, магніто провід ненасичений. Індуктивність робочої обмотки пропорційна магнітній проникності, велика.

При наявності струму у вхідному колі, тобто при підмагнічуванні, магнітна проникність зменшується і індуктивність робочої обмотки w_P знижується, в результаті цього зменшується ЕРС e_P, збільшується струм у вихідному колі i_H і напруга на навантаженні u_H.

Таким чином, відносно невелика зміна струму вхідного кола викликає значну зміну струму у вихідному колі.

Криві магнітного потоку $\Phi(t)$, що створюються робочою обмоткою за відсутності і при наявності струму I_K у вхідному колі позначені Φ_P' та Φ_P''.

Струм i_H, у першому приближенні, можна вважати синусоїдним. Криві добутку струму на число витків, для розглянутих випадків, позначені $i_H' \cdot w_P$ та $i_H'' \cdot w_P$.

Амплітуда Φ_{Pm}' велика, отже, за відсутності підмагнічування велика ЕРС самоіндукції робочої обмотки, що рівносильно великому індуктивному опору цієї обмотки.

При наявності струму у вхідному колі магнітний потік Φ_P'' становиться несинусоїдним, а границі його зміни значно менші, ніж $2\Phi_{Pm}''$. В цьому випадку в обмотці w_P наводиться значно менша ЕРС, що рівносильно зменшенню індуктивного опору цієї обмотки.

Залежність між вхідним і вихідним струмами або напругами у встановившомуся режимі називається **характеристикою управління**. При цьому під вхідними і вихідними напругами магнітного підси-

лювача розуміють, відповідно, напруги на обмотці w_K і на навантаженні z_H.

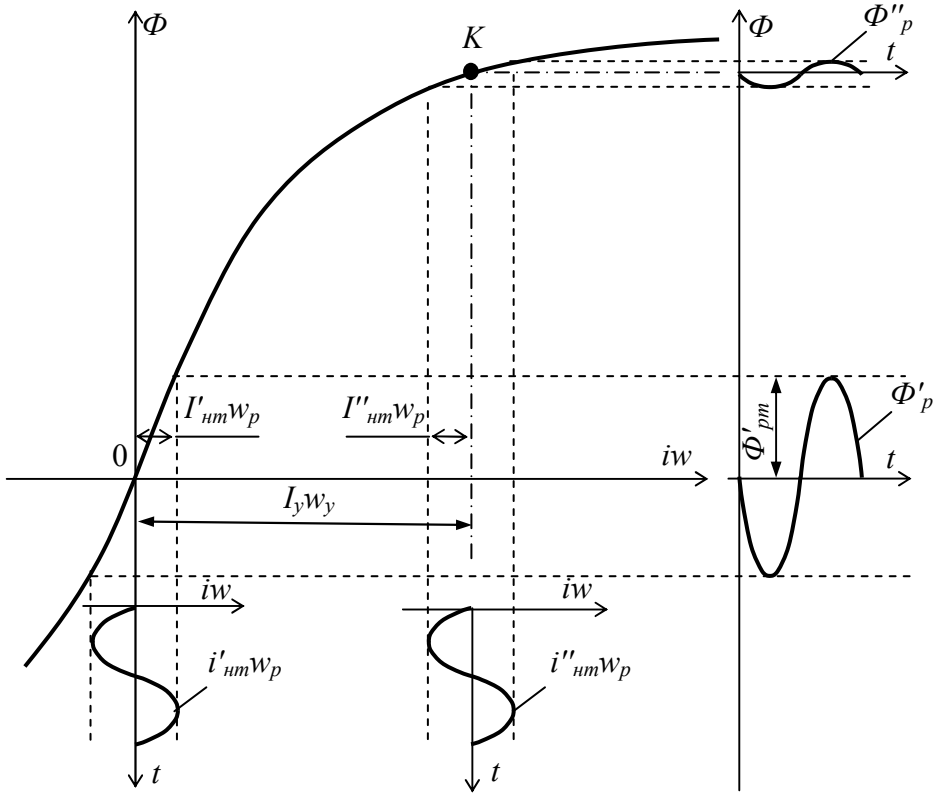


Рисунок 15.40 – Характеристики феромагнітного підсилювача потужності.

Розглянута спрощена схема приведена тільки для пояснення принципу роботи підсилювача. Практичному її застосуванню перешкоджають наступні недоліки:

1. Змінний магнітний потік, створений струмом в обмотці $\boldsymbol{w_P}$, наводить змінну ЕРС в обмотці керування $\boldsymbol{w_K}$ в наслідок чого у колі керування виникає змінний струм, що викликає додаткові втрати потужності і погіршення роботи підсилювача.

2. з огляду на те, щозмінна складова магнітного потоку несинусоїдна, причому друга гармоніка, що міститься в ній відносно велика, у кривих напруги $\boldsymbol{u_H}$ і струму $\boldsymbol{i_H}$ з'являються небажані парні (друга) гармоніки.

Вказані недоліки усуваються різними конструктивними особливостями підсилювачів (розділенням магнітопровід і обмоток на дві однакові частини і зустрічним включенням робочих обмоток і інші)., використанням зворотних зв’язків.

Коефіцієнт підсилення по напрузі – відношення приросту вхідної напруги до приросту напруги на вході

$$K_U = \frac{\Delta U_H}{\Delta U_K}. \qquad (15.65)$$

Коефіцієнт підсилення за струмом

$$K_I = \frac{\Delta I_H}{\Delta I_K}. \qquad (15.66)$$

Коефіцієнт підсилення за потужністю

$$K_P = \frac{\Delta P_H}{\Delta P_K} = K_U \cdot K_I =. \qquad (15.67)$$

Контрольні запитання

1. Який математичний зв'язок між напругою, струмом і лінійним активним опором у колі змінного синусоїдного струму?
2. Який математичний зв'язок між кількістю витків котушки, магнітним потоком, електричним струмом, лінійною індуктивністю в колі змінного синусоїдного струму?
3. Який математичний зв'язок між зарядом, напругою і лінійною ємністю в колі змінного синусоїдного струму.
4. Покажіть графічно залежність магнітного потоку котушки зі феромагнітним осердям від намагнічуючого струму. Якою буде індуктивність цієї котушки: лінійною або нелінійною?
5. Запишіть і розшифруйте вираз магнітного потоку через намагнічуючого силу і магнітний опір.
6. Як визначити магнітний опір через конструктивні параметри магнітопроводу.

7. Яка математична залежність індуктивності від конструктивних параметрів котушки зі феромагнітним осердям.
8. Доведіть, що індуктивність котушки зі феромагнітним осердям є нелінійною у функції намагнічуючого струму.
9. Що розуміють під статичною індуктивністю котушки?
10. Як графоаналітичним методом визначити статичну індуктивність?
11. Що розуміють під динамічною індуктивністю котушки?
12. Як графоаналітичним методом визначити динамічну індуктивність?
13. Що таке ідеальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного синусоїдного струму?
14. Яка конструктивна схема ідеальної котушки зі феромагнітним осердям (зневажаючи магнітним потоком розсіювання, втратами на гістерезис і вихрові струми, приймаючи активний опір котушки рівним нулю) при живленні від джерела змінного струму?
15. Запишіть вираз миттєвої напруги джерела при початковій фазі рівній 90^o.
16. Одержите вираз миттєвого магнітного потоку, якщо початкова фаза напруги джерела дорівнює 90^o.
17. Побудуйте графічно криві напруги і магнітного потоку.
18. Запишіть вираз миттєвого несинусоїдного струму, замінивши його еквівалентним синусоїдним, якщо початкова фаза магнітного потоку дорівнює нулю.
19. Запишіть вираз миттєвої ЕРС самоіндукції в ідеальній котушці, якщо початкова фаза магнітного потоку дорівнює нулю.
20. Який вигляд має розрахункова схема ідеальної котушки?
21. Запишіть вираз миттєвого значення струму з урахуванням втрат на гістерезис і вихрові струми, якщо початкова фаза напруги джерела дорівнює 90^o.

22. Запишіть вираз миттєвого значення магнітного потоку з урахуванням втрат на гістерезис і вихрові струми, якщо початкова фаза напруги джерела дорівнює 90^o
23. Запишіть вираз миттєвого значення ЕРС самоіндукції з урахуванням втрат на гістерезис і вихрові струми, якщо початкова фаза напруги джерела дорівнює 90^o
24. Побудуйте векторну діаграму котушки з урахуванням втрат на гістерезис і вихрові струми, складіть її розрахункову схему.
25. З яких складових складається намагнічуючий струм котушки з урахуванням втрат на гістерезис і вихрові струми, що вони показують?
26. Від чого і як залежать втрати активної потужності на гістерезис?
27. В який спосіб можна зменшити втрати активної потужності на гістерезис в магнітопроводі?
28. З рахунок яких способів можна зменшити втрати активної потужності на вихрові струми в магнітопроводі?
29. Які фізичні явища і процеси спостерігаються в реальній котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму?
30. Складіть конструктивну схему реальної котушки, вказавши фізичні величини.
31. Запишіть рівняння рівноваги напруги реальної котушки для миттєвих значень.
32. Як побудований трансформатор з феромагнітним осердям?
33. Які явища спостерігаються в первинному контурі трансформатора з феромагнітним осердям?
34. Які явища спостерігаються у вторинному контурі трансформатора з феромагнітним осердям?
35. Які явища спостерігаються в магнітопроводі трансформатора з феромагнітним осердям?

36. Складіть конструктивну схему трансформатора з феромагнітним осердям та покажіть всі фізичні величини.
37. Складіть розрахункову схему трансформатора з феромагнітним осердям.
38. Запишіть рівняння рівноваги первинного контуру для миттєвих значень.
39. Запишіть рівняння рівноваги напруги первинного контуру в комплексній формі.
40. Запишіть рівняння рівноваги напруги вторинного контуру для миттєвих значень.
41. Запишіть рівняння рівноваги вторинного контуру в комплексній формі.
42. Побудуйте якісно векторну діаграму трансформатора з феромагнітним осердям з однаковою кількістю витків первинної і вторинної обмоток.
43. Що таке коефіцієнт трансформації трансформатора?
44. Як визначити діюче значення ЕРС самоіндукції?
45. Що таке приведений трансформатор?
46. За якої умови виконується приведення вторинної обмотки до первинної?
47. Як привести ЕРС і напругу вторинного контуру до кількості витків первинної обмотки?
48. Як привести вторинний струм до кількості витків первинної обмотки?
49. Як привести активний опір вторинної обмотки трансформатора до кількості витків первинної обмотки?
50. Як привести реактивний опір вторинної обмотки трансформатора до кількості витків первинної обмотки?

51. Як привести повний опір навантаження вторинної обмотки трансформатора до кількості витків первинної обмотки?
52. Складіть розрахункову схему (схему заміщення) приведеного трансформатора з розшифровкою літерних позначень.
53. Запишіть рівняння рівноваги первинного контуру приведеного трансформатора для миттєвих значень.
54. Запишіть рівняння рівноваги первинного контуру приведеного трансформатора в комплексній формі.
55. Запишіть рівняння рівноваги вторинного контуру приведеного трансформатора для миттєвих значень.
56. Запишіть рівняння рівноваги вторинного контуру приведеного трансформатора в комплексній формі.
57. Побудуйте якісно векторну діаграму трансформатора з феромагнітним осердям з однаковою кількістю витків первинної і вторинної обмоток трансформатора.
58. Як визначити комплекс діючого значення спадання напруги на активному опорі вторинної обмотки трансформатора в показовій і алгебраїчній формах.
59. Як визначити комплекс діючого значення спадання напруги на реактивному опорі вторинної обмотки трансформатора в показовій і алгебраїчній формах.
60. Як визначити кут зсуву фаз між напругою і струмом у первинній обмотці трансформатора?
61. Як визначити кут зсуву фаз між напругою і струмом вторинної обмотки навантаженого трансформатора?
62. Як визначити кут між ЕРС вторинної обмотки і струмом вторинної обмотки трансформатора?
63. Як визначити повну потужність трансформатора?

ТЕМА 16
ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

16.1. Причини виникнення перехідних процесів

Раніше, в основному, розглядалися усталені фізичні процеси в електричних колах, коли напруги та струми протягом тривалого часу залишалися незмінними або змінювалися періодично.

Під час будь-яких змін в електричних колах – вмиканні, вимиканні, коротких замиканнях, коливаннях параметрів та ін., в них виникають фізичні процеси, які не можуть відбуватися миттєво, оскільки неможлива миттєва зміна енергії, накопиченої в електромагнітному полі кола. Такі процеси носять назву перехідних.

Під **перехідними процесами** розуміють електромагнітні процеси переходу від одного усталеного режиму роботи електричного кола до іншого, який будь чим відрізняється від попереднього: величиною амплітуди, фази, формою або частотою діючої в схемі ЕРС, значеннями параметрів схеми, а також зміни конфігурації схеми.

Фізично перехідні процеси представляють собою перехід від одного енергетичного стану електричного кола, що передує комутаційному режиму, до іншого, який відповідає режиму після комутації (рисунок 16.1). Перехідні процеси, зазвичай, є швидкоплинними (тривалість їх складає від сотих до міліардних долей секунди). Всі ці зміни називаються **комутаційними змінами** або просто **комутацією** і можуть супроводжуватися виникненням електричної дуги, однак під час аналізу перехідних процесів надалі будемо вважати, що при замиканні і розмиканні електричного кола дуга не виникає і комутація відбувається миттєво.

Вивчення перехідних процесів дуже важливе, оскільки дає можливість встановити, як деформуються за формою і амплітудою сигнали при проходженні їх через підсилювачі і фільтри, виявити перева-

щення напруги на окремих ділянках електричного кола, які можуть бути небезпечними для ізоляції електроустановок, збільшення амплітуд струмів, які можуть в декілька разів перевищувати амплітуду струму усталеного періодичного процесу, а також визначити тривалість цього процесу для розрахунку надійності електричних пристроїв і їх елементів.

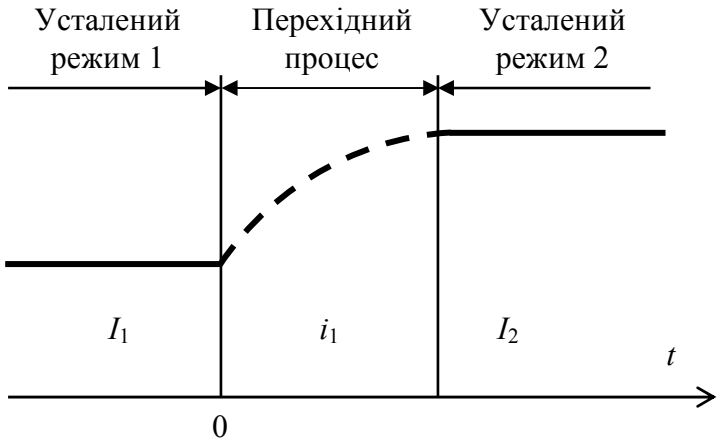


Рисунок 16.1 – Режими, що відбуваються в електричному колі

16.2. Закони комутації

Під час аналізу перехідних процесів користуються законами комутації. Перш, ніж розглядати ці закони, слід зробити попередні зауваження:

- всі закони електричних кіл (Ома, Кірхгофа тощо) справедливі і для перехідного процесу;
- при розгляді перехідних процесів мають на увазі миттєві значення напруги $\boldsymbol{u}$ і струму $\boldsymbol{i}$;
- вважається, що комутація відбувається миттєво ($t = 0$).

Розглянемо включення ділянки кола з реальною котушкою, що характеризується активним опором та індуктивністю (рисунок 16.2).

До комутації струм у електричному колі дорівнює нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можна записати

$$u = u_r + u_L; \qquad u_r = r \cdot i; \qquad u_L = -e = L\frac{di}{dt}. \tag{16.1}$$

Якщо припустити, що в момент комутації ($t = 0$) струм змінюється стрибком (до комутації він був рівний нулю), то $u_L = \infty$, $\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$, то $\frac{di}{dt} = \infty$, тоді $u = \infty$ і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації сила струму дорівнює нулю.

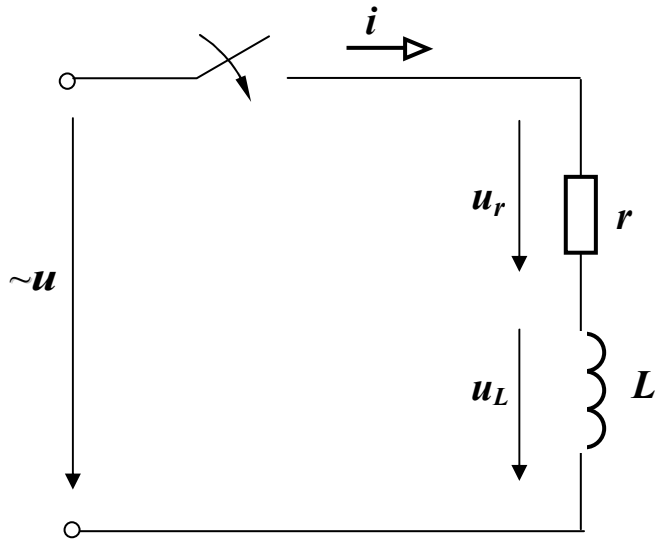


Рисунок 16.2 – Розрахункова схема включення ділянки кола з котушкою

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму в індуктивності пояснюється неможливістю зміни стрибком енергії, накопиченої в котушці. Енергія магнітного поля котушки

$$W_L = \frac{Li^2}{2}. \tag{16.2}$$

Миттєва потужність в індуктивності

$$p_L = \frac{dW_L}{dt} = Li\frac{di}{dt}. \tag{16.3}$$

Якби струм у момент часу $t = 0$ змінився стрибком, це привело б до виділення в котушці нескінченно великої потужності, що немож-

ливо з фізичної точки зору. Стрибкоподібна зміна енергії потребує нескінченно великих потужностей в індуктивностях, що позбавленого фізичного смислу, оскільки реальні джерела живлення не володіють нескінченно великими потужностями.

Таким чином, можна сформулювати **перший закон комутації**: **у будь-якому розгалуженні з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень**.

Розглянемо включення ділянки кола з ємністю (рисунок 16.3).

До комутації напруга на ємності дорівнювала нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u_C = r\,i + u_C. \tag{16.4}$$

Зі співвідношень

$$u_C = \frac{q}{C}, \qquad i = \frac{dq}{dt}, \tag{16.5}$$

знаходимо

$$q = Cu_C, \qquad i = C\frac{du_C}{dt}. \tag{16.6}$$

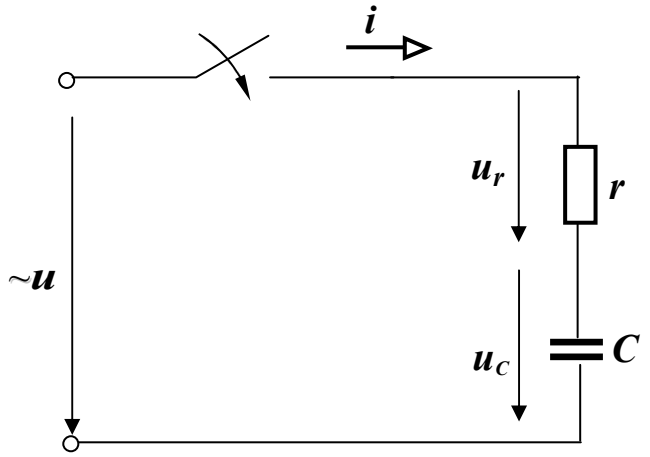


Рисунок 16.3 – Розрахункова схема включення ділянки кола з ємністю

Якщо припустити, що в момент комутації ($t = 0$) напруга на ємності зміниться стрибком, то $i = \infty$ і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації напруга на ємності буде дорівнювати нулю.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни напруги на ємності пояснюється неможливістю зміни стрибком потужності, накопиченої в конденсаторі. Енергія електричного поля конденсатора

$$W_C = \frac{Cu_C^2}{2}. \tag{16.7}$$

Миттєва потужність у ємності

$$p_C = \frac{dW_C}{dt} = Cu_C \frac{du_C}{dt}. \tag{16.8}$$

Якби напруга на ємності в момент часу $t = 0$ змінилася стрибком, то це привело б до виділення в ємності нескінченно великої потужності, що неможливо з фізичної точки зору.

Отже, **другий закон комутації** формулюється наступним чином: **на будь-якій ділянці кола з ємністю напруга і заряд на ємності в момент комутації зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень.**

16.3. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Розглянемо деякі загальні питання розрахунку перехідних процесів на прикладі включення нерозгалуженого кола, яке містить активний опір, індуктивність і ємність, підключені до джерела напруги u (або ЕРС e), яка змінюється в часі за довільним безперервним законом, заданим яким-небудь аналітичним виразом (рисунок 16.4).

Для будь-якого моменту часу за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u + u_C = u = r \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt\,, \qquad (16.9)$$

де i – струм перехідного режиму, який далі будемо називати перехідним струмом або просто струмом, A.

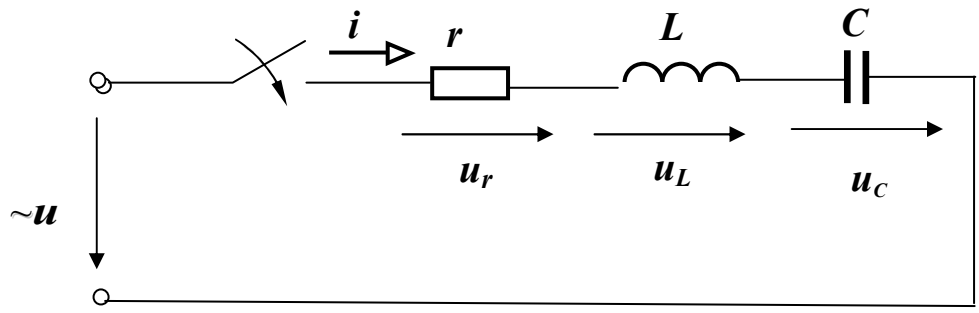


Рисунок 16.4 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних активного опору, індуктивності і ємності

Перехідним режимом будемо називати стан кола, який буде спостерігатися в ньому протягом деякого (теоретично нескінченно великого) часу після комутації.

Після закінчення перехідного режиму настає **примусовий режим**. Примусовий режим створюваний джерелом періодично змінної напруги (або струму), часто називають усталеним режимом.

Примусовим режимом будемо називати стан кола, коли з перехідним режимом можна не рахуватись. Примусовий режим, який створюється вільною складовою періодичної напруги, інколи називають усталеним режимом.

Коли настає примусовий режим, рівняння (16.9) приймає вигляд

$$u = r \cdot i_{пр} + L \cdot \frac{di_{пр}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{пр} \cdot dt\,, \qquad (16.10)$$

де $i_{пр}$ – струм примусового режиму або просто примусовий струм, A.

Віднімаючи почленно рівняння (16.9) від (16.10) та приймаючи до уваги, що

$$i - i_{пр} = i_{в}, \qquad (16.11)$$

одержимо

$$0 = r \cdot i_{в} + L \cdot \frac{di_{в}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{в} \cdot dt, \qquad (16.12)$$

або

$$0 = u_{r\,в} + u_{L\,в} + u_{C\,в}. \qquad (16.13)$$

Різниця струмів і напруг перехідного і примусового режимів називається відповідно **струмом і напругою вільного режиму** або просто **вільними струмом і напругою**.

Рівняння (16.13) показує, що при переході електричного кола з одного примусового стану до іншого, напруги на всіх елементах, що створюються вільними складовими струму, взаємно врівноважуються, але вільні напруги залежать, безумовно, від ЕРС *е* джерела. Завдяки вільним складовим і досягається у перехідному процесі безперервне приближення до примусового режиму.

Відповідно до рівняння (16.11) процес, який проходить у колі, можна розглядати як такий, що складається з накладених один на інший процесів – примусового, який наступив як би відразу, та вільного, який має місце тільки протягом перехідного режиму, тобто для струму або напруги $i = i_{пр} + i_{в}$, $u = u_{пр} + u_{в}$.

Звичайно, фізично існує тільки перехідний струм або напруга, а розкладання їх на примусову і вільну складові – це усього лише зручний спосіб, який полегшує розрахунки перехідних процесів у лінійних колах.

Розкладання перехідних струмів і напруг відповідає правилу рішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, відповідно до якого загальне рішення таких рівнянь дорівнює сумі часткового рі-

шення неоднорідного рівняння і загального рішення однорідного рівняння.

Дійсно, рівняння (16.12) показує, що вільний струм являє собою загальне рішення однорідного диференціального рівняння і в його рівнянні повинні бути постійні інтегрування, кількість яких дорівнює порядку диференціального рівняння.

У свою чергу рівняння (16.10) показує, що примусовий струм являє собою відповідне часткове рішення неоднорідного диференціального рівняння, саме таке, яке виходить з загального рішення неоднорідного диференціального рівняння при рівних нулю постійних інтегрування. Іншими словами, у складі примусового струму не повинно бути складових вільного струму. Тоді перехідний струм i, рівний сумі $i_{пр}$ і $_{в}$, і буде загальним рішенням того ж самого неоднорідного диференціального рівняння.

Класичний метод дослідження перехідних процесів зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, які пов'язують напруги і струми кола, в результаті чого з’являються постійні інтегрування та в визначенні цих постійних з початкових умов.

Незалежними початковими умовами назвемо значення перехідних струмів в індуктивностях і напруги на ємностях при $t = 0$, тобто ті величини, які в момент комутації не змінюються стрибком, тобто незалежні початкові умови виходять із законів комутації.

На відміну від них всі інші струми і напруги називають залежними початковими умовами. Залежні початкові умови визначаються з урахуванням незалежних початкових умов і значень ЕРС за допомогою закону Ома та першого і другого законів Кірхгофа.

Основні труднощі класичного методу дослідження перехідних процесів у складних електричних кола як раз і складається з визначення залежних початкових умов.

Приклад 16.1

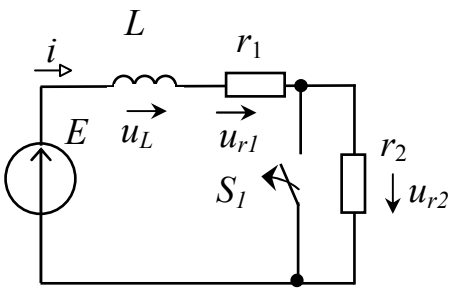


Рисунок 16.5

В заданій електричній схемі (рисунок 16.5) відомо: активний опір резистора r_1 дорівнює 4 *Ом*, активний опір резистора r_2 дорівнює 2 *Ом*, індуктивність L дорівнює 0,005 Гн. Електрорушійна сила ідеального постійного джерела дорівнює 12 *В*. **Визначити: незалежні і залежні початкові умови перехідного процесу в колі.**

Рішення

1. Визначаємо незалежні початкові умови за першим законом комутації для моменту комутації $t = 0$

$$i(-0) = \frac{E}{r_1} = \frac{12}{4} = 3 \ A \ ; \ \underline{i(-0) = i(0) = 3 \text{ А}.}$$

2. Визначаємо залежні початкові умови за другим законом Кірхгофа для моменту комутації $t = 0$ з урахуванням визначених незалежних умов

$$\text{E} = u_L(0) + u_{r1}(0) + u_{r2}(0) = u_L(0) + r_1 \cdot i(0) + r_2 \cdot i(0);$$

$$\underline{u_{r1}(0) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ В};}$$

$$\underline{u_{r1}(0) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ В};}$$

$$12 = u_L(0) + 2 \cdot 3;$$

$$\underline{u_L(0) = 12 - 18 = -6 \text{ В}.}$$

16.4. Підключення індуктивної котушки до джерела постійної ЕРС

Дослідимо перехідний процес підключення реальної котушки до джерела постійної ЕРС (включення кола r, L на постійну ЕРС), розрахункова схема якого показана на рисунку 16.6.

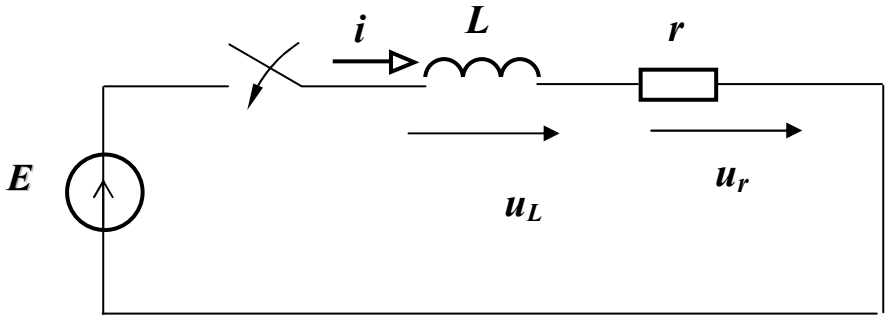


Рисунок 16.6 – Розрахункова схема перехідного процесу підключення котушки до джерела постійної ЕРС

У післякомутаційний період у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i = E, \tag{16.14}$$

або

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{r}, \tag{16.15}$$

де постійна часу τ перехідного процесу

$$\tau = \frac{L}{r}. \tag{16.16}$$

Рівняння (16.15) являє собою звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\tau \cdot p + 1 = 0, \tag{16.17}$$

звідки знаходимо корінь

$$p = -\frac{1}{\tau}. \tag{16.18}$$

Перехідний струм дорівнює сумі примусового і вільного струмів

$$i = i_{пр} + i_{в}. \tag{16.19}$$

Оскільки характеристичне рівняння задовольняє однорідному диференціальному рівнянню першого порядку, то вільний струм можна виразити так

$$i_{св} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{16.20}$$

де A – постійна інтегрування струму, А.

Примусовий струм після комутації буде

$$i_{пр} = \frac{E}{r}, \tag{16.21}$$

тому рівняння перехідного струму в колі у загальному вигляді

$$i = \frac{E}{r} + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.22}$$

Для розрахунку постійної інтегрування A знайдемо незалежні початкові умови: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при $t = 0$, $i(0) = 0$ рівняння (16.22) запишеться так

$$0 = \frac{E}{r} + A, \tag{16.23}$$

звідки постійна інтегрування струму

$$A = -\frac{E}{r}, \tag{16.24}$$

тобто вільна складова струму

$$i_в = -\frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.25}$$

Підставляємо значення постійної інтегрування в рівняння (16.22) одержуємо рівняння перехідного струму, будуємо графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі (рисунок 16.7)

$$i = \frac{E}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{16.26}$$

В рівнянні перехідного процесу величина $\boldsymbol{\tau}$ називається **постійною часу** перехідного процесу кола: це час, продовж якого вільний струм затухаючи, зменшується в $\boldsymbol{e}$ разів порівняно зі своїм початковим значенням. Тобто τ характеризує швидкість перехідного процесу

в електричному колі. Струм *i* зростає тим повільніше, чим більше постійна часу, тобто чим повільніше загасає вільний струм.

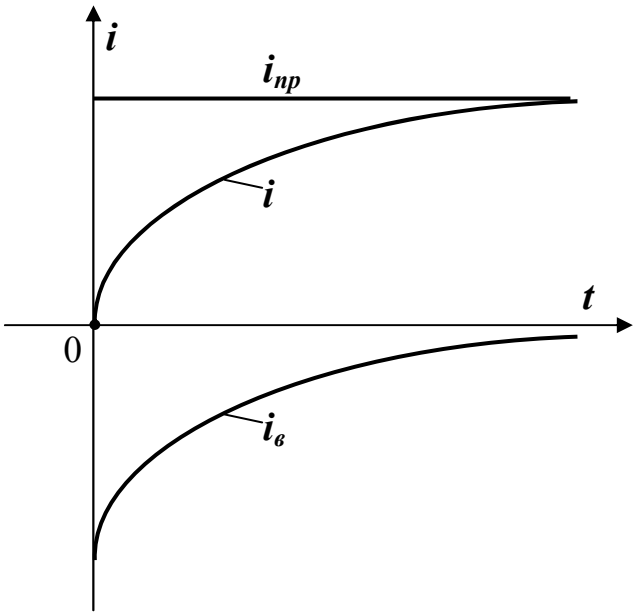


Рисунок 16.7 – Графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі

Після визначення струму легко знайти напруги на активному опорі та індуктивності.

Рівняння напруги на активному і індуктивному опорі котушки

$$u_r = r \cdot \frac{E}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \qquad (16.27)$$

$$u_L = u_{Lв} = -e_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{r} - \frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \qquad (16.28)$$

$$= \frac{E \cdot L}{\tau \cdot r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

З рівняння (16.27) слідує, що напруга на активному опорі зростає плавно від нуля до значення ЕРС джерела в примусовому режимі. З рівняння (16.28) видно, що напруга на індуктивності змінюється стрибком від нуля до значення ЕРС джерела в момент комутації, а в

процесі перехідного режиму зменшується до нуля. ЕРС самоіндукції протидіє зростанню струму.

Енергія, яку одержує коло, частково йде на збільшення енергії магнітного поля котушки, а частково перетворюється в тепло, яке виділяється на активному опорі.

За час перехідного періоду в магнітному полі котушки накопичиться енергія

$$W_L = \frac{L \cdot i_{np}^2}{2}. \qquad (16.29)$$

16.5. Коротке замикання котушки

Нехай у колі, розрахункова схема якого приведена на рисунку 16.8, ключ був у положенні 1 і джерело було підключено в часі досить довго, тобто наступив усталений режим. Якщо в деякий момент часу (t = 0) ключ миттєво (без розриву кола котушки) переключити в положення 2, то буде мати місце **коротке замикання котушки**.

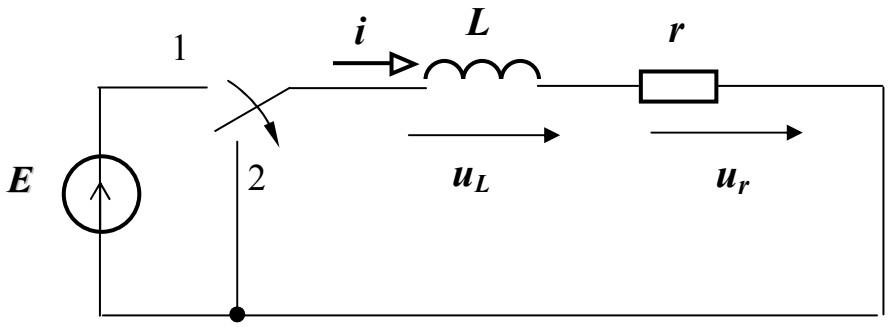


Рисунок 16.8 – Розрахункова схема перехідного процесу короткого замикання котушки

Знайдемо закон зміни струму в колі при короткому замиканні котушки. Для післякомутаційної схеми за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i = 0, \qquad (16.30)$$

або

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = 0. \qquad (16.31)$$

Рівняння (16.31) являє собою однорідне диференціальне рівняння, рішення якого дає тільки вільну складову струму. Таким чином, у даному випадку перехідний струм не буде містити примусової складової, тобто $i = i_в$, оскільки $i_{пр} = 0$.

Рішенням (16.31) є характеристичне рівняння, корінь якого та рівняння струму у загальному вигляді мають вигляд

$$\frac{L}{r} \cdot p + 1 = \tau \cdot p + 1 = 0; \qquad p = -\frac{1}{\tau}; \qquad i = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (16.32)$$

Знайдемо постійну інтегрування з початкових умов: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при $t = 0$ $i(0) = \frac{E}{r} = i_{пр} = I_0 = A$, з рівняння (16.32) постійна інтегрування запишеться так

$$\frac{E}{r} = I_0 = A. \qquad (16.33)$$

Остаточно, з урахуванням постійної інтегрування струму, одержимо рівняння перехідного струму при короткому замиканні котушки

$$i = \frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (16.34)$$

де постійна інтегрування струму

$$I_0 = \frac{E}{r}. \qquad (16.35)$$

Графік перехідного струму для цього випадку представлений на рисунку 16.9.

Після визначення рівняння перехідного струму легко знайти рівняння перехідної напругу на активному опорі та індуктивності котушки

$$u_r = r \cdot i = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \qquad (16.36)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E \cdot L}{\tau \cdot r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.37)$$

З рівняння (16.37) видно, що напруга на індуктивності та ЕРС самоіндукції в момент комутації змінюються стрибком. ЕСР самоіндукції підтримує протікання струму у колі в попередньому напрямку.

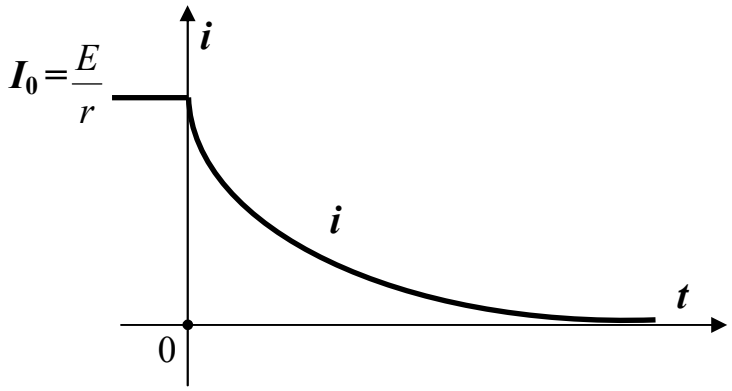


Рисунок 16.9 – Графік перехідного струму при короткому замиканні котушки

Це повинно враховувати в багатьох випадках електротехнічної практики. Наприклад, обмотку збудження потужної електричної машини в разі необхідності швидко зняти збудження не відключають від джерела живлення постійної напруги, а замикають на розрядний реостат, в якому енергія магнітного поля перетворюється в тепло. Якщо просто розімкнути коло обмотки збудження, то навіть при наявності електричної дуги струм дуже швидко зменшиться до нуля (швидкість змінення струму $\frac{di}{dt} \to \infty$). Оскільки обмотка збудження має велику індуктивність $L_{зб}$, то в ній виникає доволі значна ЕРС самоіндукції $e_L = -L \cdot \frac{di}{dt}$, яка може пробити ізоляцію обмотки на корпус машини або ізоляцію між витками.

Запас енергії магнітного поля котушки до комутації дорівнює

$$W_L = \frac{L \cdot I_0^2}{2} = \frac{L \cdot E^2}{2 \cdot r^2}\,. \qquad (16.38)$$

З енергетичної точки зору процес короткого замикання кола з котушкою характеризується тим, що вся енергія накопиченого магнітного поля котушкою продовж перехідного процесу перетворюється в тепло. Доведемо, що енергія, яка виділяється в активному опорі за час перехідного процесу дорівнює енергії магнітного поля котушки в примусовому режимі

$$W_r = W_L;$$

$$W_r = \int_0^\infty r \cdot i^2 dt = \frac{E^2}{r} \int_0^\infty e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \cdot dt = -\frac{E^2 \cdot L}{2 \cdot r^2}\Bigg|_0^\infty = \qquad (16.39)$$

$$. = 0 - (-\frac{L \cdot E^2}{2 \cdot r^2}) = \frac{L \cdot E^2}{2 \cdot r^2} = \frac{L \cdot I_0^2}{2}\,.$$

Таким чином, теплова енергія, що виділяється в активному опорі котушки W_r в перехідному процесі при короткому замиканні котушки і енергія магнітного поля котушки W_L рівні за величиною.

Приклад 16.2

Перехідний процес підключення котушки до джерела ЕРС (рисунок 16.5) за умов, що котушка має індуктивність 0,05 *Гн*, активний опір котушки дорівнює 10 *Ом*. Електрорушійна сила постійного джерела 50 В. **Визначити рівняння перехідного струму.**

Рішення

1. Визначаємо корінь характеристичного рівняння перехідного кола за (16.18) і (16.16)

$$p = -\frac{1}{\tau};\ \tau = \frac{L}{r} = \frac{0{,}05}{10} = 0{,}005\ c\ ;\ p = -\frac{1}{0{,}005} = -200\ 1/c.$$

2. Визначаємо примусову складову струму за (16.21)

$$i_{пр} = \frac{E}{r} = \frac{50}{10} = 5 \ \ A.$$

3. Визначаємо постійну інтегрування перехідного струму за (16.24)

$$A = -\frac{E}{r} = -\frac{50}{10} = -5 \ \ \ A.$$

4. Запишемо рівняння вільної складової перехідного струму за (16.20)

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -5 \cdot e^{-200 \cdot t} = -5 \cdot e^{-\frac{t}{0.005}} \ \ A.$$

5. Визначаємо рівняння перехідного струму за (16.19) і (16.26)

$$i = i_{пр} + i_{в} = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 5 \ -5^{-\frac{t}{0.005}} = 5 \ (1 - e^{-\frac{t}{0.005}}) \ \ A \ .$$

16.6. Заряд конденсатора через резистор

Розглянемо розрахункову схему послідовного з'єднання активного опору і ємності ідеального конденсатора в колі з постійною ЕРС (рисунок 16.10).

Знайдемо рівняння перехідної напруги на ємності після комутації. Запишемо для кола після комутації рівняння за другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_C = E \ . \qquad (16.40)$$

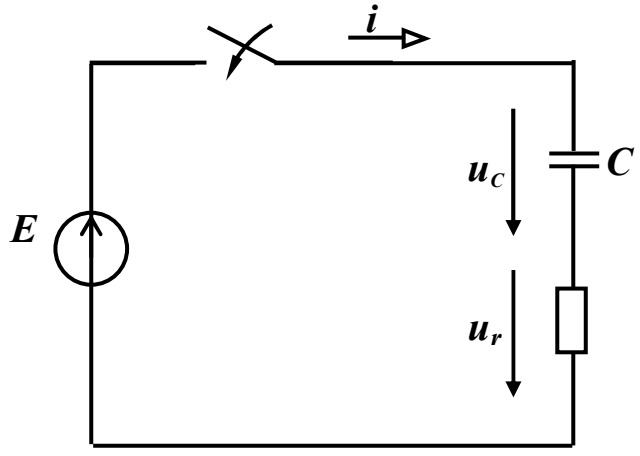


Рисунок 16.10 – Розрахункова схема перехідного процесу у при заряджанні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

Враховуючи, що напруга на активному опорі дорівнює

$$u_r = r \cdot i = r \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = \tau \cdot \frac{du_C}{dt}, \qquad (16.41)$$

де $\tau = r \cdot C$ – постійна часу кола, *с*;

одержимо диференціальне рівняння напруги для кола після комутації

$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \qquad (16.42)$$

Перехідна напруга на конденсаторі при зарядженні

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cв}. \qquad (16.43)$$

Примусова складова напруги на ємності

$$u_{Cпр} = E, \qquad (16.44)$$

оскільки у сталому режимі конденсатор зарядиться до величини ЕРС джерела напруги

Характеристичне рівняння і корінь рівняння

$$r \cdot C + p = \tau \cdot p + 1 = 0; \qquad p = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{r \cdot C}; \qquad (16.45)$$

Вільна складова напруги на ємності

$$u_{Cв} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.46)$$

Таким чином, загальне рішення рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = E + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.47)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідної напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації відповідно до другого закону комутації, напруга на ємності конденсатора дорівнює нулю, тобто при $t = 0$ $u_C(0) = 0$, таким чином, рівняння (16.47) для цього моменту часу приймає вигляд

$$0 = E + A, \qquad (16.48)$$

з якого отримуємо постійну інтегрування напруги на ємності конденсатора

$$A = -E\,. \tag{16.49}$$

Закон зміни перехідної напруги на ємності після комутації

$$u_C = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{16.50}$$

Графік перехідної напруги на ємності приведено на рисунку 16.11.

Отримаємо рівняння перехідного струму при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}\left[E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] = \frac{C \cdot E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.51}$$

З рівняння (16.51) видно, що в момент комутації струм в колі змінюється стрибком від нуля до значення $\frac{E}{r}$ і потім поступово зменшується до нуля.

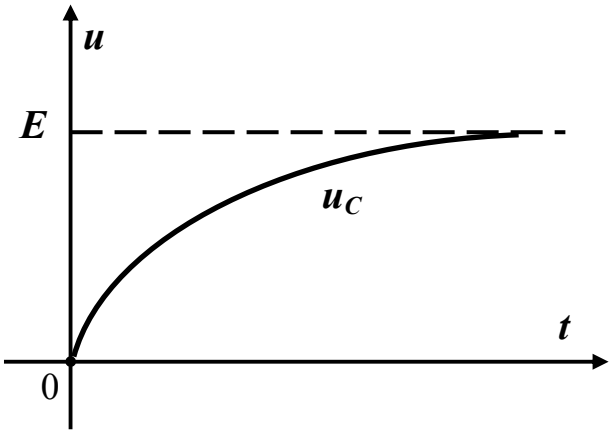


Рисунок 16.11 – Графік перехідної напруги на ємності при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

Рівняння перехідної напруги на активному опорі згідно (16.51)

$$u_r = r \cdot i = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.52}$$

Так само як і струм, напруга на активному опорі теж змінюється стрибком від нуля до значення E, а потім поступово зменшується.

Розглянемо енергетичний бік процесу заряду конденсатора. Енергія, що надходить від джерела, накопичується на конденсаторі і витрачається на нагрів резистора

$$W = W_C + W_r;$$

$$W = \int_0^\infty E \cdot i \cdot dt = \int_0^\infty \left(u_r \cdot di + u_C \cdot di\right) \cdot ddt = \int_0^\infty r \cdot di^2 \cdot ddt + \int_0^\infty C \cdot du_C \cdot du_C \tag{16.53}$$

або

$$E \int_0^\infty C \cdot du_C = C \cdot E^2 = \int_0^\infty r \cdot i^2 \cdot dt + \frac{C \cdot E^2}{2}, \tag{16.54}$$

тобто з (16.54)

$$\int_0^\infty r \cdot i^2 \cdot dt = \frac{C \cdot E^2}{2}. \tag{16.55}$$

Таким чином, при будь-яких значеннях r і C половина енергії, отриманої від джерела за час перехідного періоду, перейде в теплоту на активному опорі, а друга половина накопичиться в електричному полі конденсатора.

16.7. Розряд конденсатора через резистор

Припустимо, що конденсатор ємністю $\boldsymbol{C}$, заряджений від джерела постійної ЕРС до напруги $U_0 = E = u(0)$, у момент комутації замикається на активний опір (рисунок 16.12).

Знайдемо закон зміни напруги на ємності конденсаторі в післякомутаційний період.

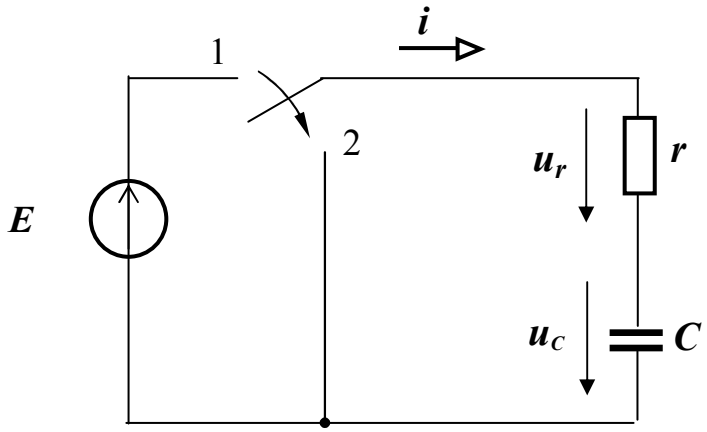


Рисунок 16.12 – Розрахункова схема перехідного процесу при розрядженні конденсатора через резистор

Для післякомутаційного кола справедливі рівняння згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_C = r \cdot i + u_C = r \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C = \tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (16.56)$$

В момент комутації $u_{Cпр}$ *(0-)*$= U_0$ Примусова складова напруги на ємності дорівнює нулю ($u_{Cпр} = 0$), оскільки примусовий струм в колі теж буде рівний нулю ($i_{пр} = 0$).

Одержимо характеристичне рівняння і корінь характеристичного рівняння для кола після комутації

$$r \cdot C \cdot p + 1 = \tau \cdot p + 1 = 0; \qquad p = -\frac{1}{\tau}; \quad (16.57)$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності аналогічно (16.46).

Знайдемо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації за другим законом комутації напруга на ємності дорівнює E, тобто при $t = 0$ $u(0) = E$ і тоді

$$E = A, \quad (16.58)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор

$$u_C = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.59)$$

Графік перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор наведено на рисунку 16.13.

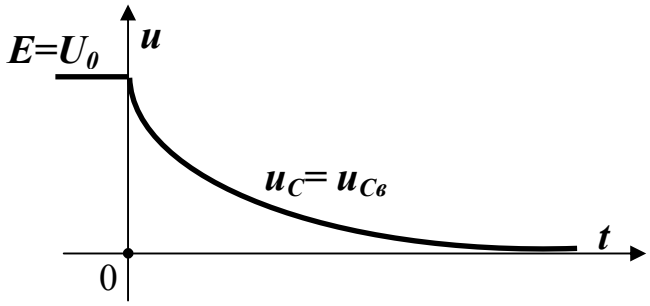


Рисунок 16.13 – Графік напруги на ємності $u_C=f(t)$

Знайдемо рівняння перехідного струму у колі при розрядженні конденсатора через резистор

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt} \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{C \cdot E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.60)$$

Рівняння напруги на активному опорі

$$u_r = r \cdot i = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.61)$$

З енергетичної точки зору, процес короткого замикання кола ***r***, ***C*** характеризується переходом енергії, що накопичилася до комутації е електричному полі конденсатора, у теплову енергію на активному опорі резистора.

$$W_r = W_C;$$

$$\int_0^\infty r \cdot i^2 \cdot dt = \frac{E^2}{r} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \cdot dt = -\frac{E^2 \cdot \tau}{2 \cdot r} e^{-\frac{2 \cdot t}{\tau}} \Bigg|_0^\infty = \frac{C \cdot E^2}{2}. \qquad (16.62)$$

Слід відмітити, що к дослідженню процесів заряду і розрядженню конденсатора через резистор, зводяться багато важливих практич-

них задач, що виникають при розрахунку перехідних процесів у колах автоматики, телемеханіки і зв'язку.

Приклад 16.3

Перехідний процес підключення конденсатора через резистор до джерела ЕРС (рисунок 16.10) за умов, що конденсатор має ємність 0,0025 *Ф*, активний опір резистора дорівнює 100 *Ом*. Електрорушійна сила постійного джерела 25 В. **Визначити рівняння перехідної напруги на ємності.**

Рішення

1. Визначаємо корінь характеристичного рівняння перехідного кола за (16.45).

$$p = -\frac{1}{\tau};\ \tau = r \cdot C = 0{,}025 \cdot 100 = 2{,}5\ \ c;\ p = -\frac{1}{2{,}5} = -0.4\ \ 1/c.$$

2. Визначаємо примусову складову напруги на ємності за (16.44)

$$u_{пр} = E = 25\ \ B.$$

3. Визначаємо постійну інтегрування перехідного струму

$$A = -E = -25\ \ B.$$

4. Запишемо рівняння вільної складової напруги на ємності

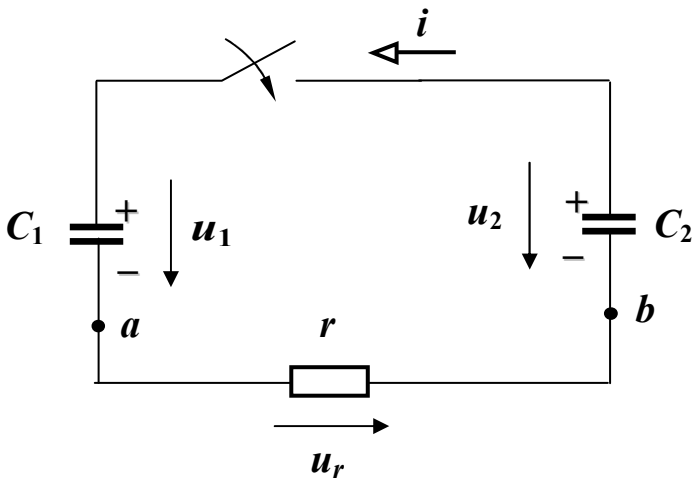
$$u_{Cв} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -25 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} = -25 \cdot e^{-\frac{t}{2{,}5}}\ \ B.$$

5. Визначаємо рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = u_{C\,пр} + u_{C\,в} = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 25 - 25^{-\frac{t}{5{,}5}} = 25\,(1 - e^{-\frac{t}{2{,}5}})\ \ B.$$

Приклад 16.4

В електричному колі (рисунок 16.14), замикається рубильник. Конденсатори на момент комутації були заряджені до напруги $u_1(0) = 100\ \ B$, $u_2(0) = 25\ \ B$ і ємності $C_1 = 1$ *мкФ* $= 10^{-6}$ *Ф*, $C_2 = 2$ мкФ $= 2 \cdot 10^{-6}$ *Ф*. Активний опір резистора r = 75 *Ом*.



Знайти закони зміни напруги на конденсаторах і струму в колі у перехідному режимі.

Рисунок 16.14

Рішення

1. Приймемо позитивні напрями струму i та напруги на конденсаторах u_1 та u_2 (рисунок 16.14).

2. Визначимо потенціали точок ***a*** і ***b***.

В примусовому режимі, що встановився, потенціали точок ***a*** і ***b*** зрівняються, тобто $u_{1\text{пр}} - u_2 = 0$ або $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$, де q_1 і q_2 – заряди на конденсаторах.

3. Визначаємо примусові значення напруг на конденсаторах.

Згідно закону збереження заряду

$$q_{1\text{пр}} + q_{1\text{пр}} = q_1(0) + q_2(0); \qquad \text{(а)}$$

$$q_{1} = C_1 \cdot u_1(0);\ \ q_{2} = C_2 \cdot u_2(0); \qquad \text{(б)}$$

Розв'язав одночасно рівняння (а) і (б), отримаємо

$$q_{1пр} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(C_1 \cdot u_1(0) + C_2 \cdot u_2(0)) = C_1 \cdot u_{1пр};$$

$$q_{2пр} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(C_1 \cdot u_1(0) + C_2 \cdot u_2(0)) = C_2 \cdot u_{2пр},$$

звідкіля

$$u_{1пр} = u_{2пр} = \frac{10^{-6} \cdot 100 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot 25}{1 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6}};$$

$$u_{1пр} = u_{2пр} = \frac{C_1 \cdot u_1(0) + C_2 \cdot u_2(0)}{C_1 + C2} = 50\ B.$$

4. Визначимо постійну часу перехідного процесу.

$$\tau = r \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}; \quad \tau = 75 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6}} = 50 \cdot 10^{-6} \ c.$$

5. Визначимо постійну інтегрування напруг на ємностях.

Згідно другого закону комутації при $t = 0$ отримаємо

$u_1(0\text{-}) = u_1(0\text{-}) = 100$ В, тоді $u_1(0) = u_{\text{пр}} + A_1 \cdot e^{-t/\tau} = u_{\text{пр}} + A_1$, звідкіля

$$A_1 = 100 - 50 = 50 \ B;$$

$u_2(0\text{-}) = u_2(0\text{-}) = 25$ В, тоді $u_2(0) = u_{\text{пр}} + A_2 \cdot e^{-t/\tau} = u_{\text{пр}} + A_2$, звідкіля

$$A_2 = 25 - 50 = -25 \ B;$$

6. Запишемо рівняння перехідного напруги на першому конденсаторі.

$$\underline{u_1 = u_{1\text{пр}} + A_1 \cdot e^{-t/\tau} = 50 + 50 \cdot e^{-t/\tau} \ B.}$$

7. Запишемо рівняння перехідного напруги на другому конденсаторі.

$$\underline{u_2 = u_{2\text{пр}} + A_1 \cdot e^{-t/\tau} = 50 - 25 \cdot e^{-t/\tau} \ B.}$$

8. Запишемо рівняння перехідного струму в колі.

$$i = C_1 \cdot \frac{du_1}{dt} = -C_2 \cdot \frac{du_2}{dt};$$

$$\underline{i = -1 \cdot e^{-t/\tau} \ A.}$$

16.8. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою і конденсатором

Розглянемо випадок включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при постійній напрузі джерела живлення (рисунок 16.15).

Для післякомутаційної схеми справедливе рівняння згідно другого закону Кірхгофа

$$E = u_L + u_r + u_C = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt. \qquad (16.63)$$

Якщо продиференціювати обидві частини рівняння (16.63), то одержимо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 i}{dt} + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i = 0 \qquad (16.64)$$

де прийняті наступні позначення

$$2 \cdot \alpha = \frac{r}{L}; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}. \qquad (16.65)$$

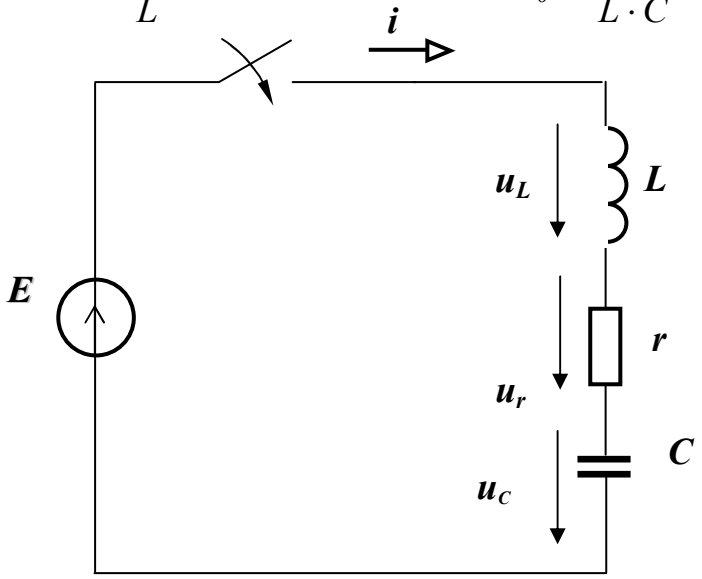


Рисунок 16.15 – Розрахункова схема включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора на постійну напругу джерела живлення

Рівняння (16.64) однорідне, а це значить, що струм у даному колі має тільки вільну складову.

Приймемо, що $\frac{di}{dt} = p$, з (16.64) отримаємо характеристичне рівняння:

$$p^2 + 2\alpha \cdot p + \omega_0^2 = 0, \qquad (16.66)$$

Оскільки характеристичне рівняння другого порядку, тоді вільний струм має дві постійні інтегрування A_1 і A_2, два корені характеристичного рівняння p_1 і p_2

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \qquad (16.67)$$

Рівняння вільного струму в загальному вигляді мають вид

$$i_в = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \qquad (16.68)$$

де A_1 і A_2 – постійні інтегрування струму, А;

p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння, 1/с.

Таким чином, характер вільного процесу залежить від параметрів котушки і конденсатора (L, r, C), тобто від коренів характеристичного рівняння і знака дискримінанту, який визначає, будуть корені дійсними ($D > 0$) або комплексними ($D < 0$). Можливі три випадки розвитку перехідного процесу.

Перший випадок. Якщо $\alpha > \omega_0$, дискримінант позитивний $D > 0$, співвідношення параметрів кола

$$\frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad (16.69)$$

тоді корені p_1 і p_2 дійсні, негативні та різні. При цьому загальне рішення рівняння перехідного струму (16.69) запишеться

$$i = i_{пр} + i_{св} = i_{пр} + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \qquad (16.70)$$

Примусовий струм $i_{пр} = 0$, оскільки в колі постійного струму у примусовому режимі $x_C^{(0)} = \infty$.

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов. Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації $t = 0$: $i(0) = 0$ і $u_C(0) = 0$. Залежні початкові умови при $t = 0$ знайдемо з рівняння для кола згідно другого закону Кірхгофа з урахуванням незалежних початкових умов

$$E = r \cdot i(0) + u_L(0) + u_C(0) \quad \Rightarrow \quad u_L(0) = E \qquad (16.71)$$

Для знаходження постійних інтегрування струму A_1 і A_2 складемо систему рівнянь: перехідного струму i та першої похідної струму i'

$$\begin{cases} i = 0 + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}; \\ i' = p_1 \cdot A_1 \cdot e^{p_1 t} + p_2 \cdot A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \end{cases} \qquad (16.72)$$

Перша похідна струму з урахуванням початкових умов, оскільки

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot i' \quad \Rightarrow \quad i'(0) = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{E}{L}. \tag{16.73}$$

Система рівнянь (16.71) з урахуванням початкових умов і першої похідної струму при $t = 0$ має вигляд

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad -A_1 = A_2; \\ \dfrac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 \Rightarrow \dfrac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_1 = A_1 \cdot (p_1 - p_2). \end{cases} \tag{16.74}$$

З (16.73) маємо постійні інтегрування струму

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L \cdot (p_1 - p_2)}. \tag{16.75}$$

Рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{L \cdot (p_1 - p_2)} (e^{p_1 \cdot t} - e^{p_2 \cdot t}). \tag{16.76}$$

Графік перехідного струму для випадку, що розглядається представлено на рисунку 16.17

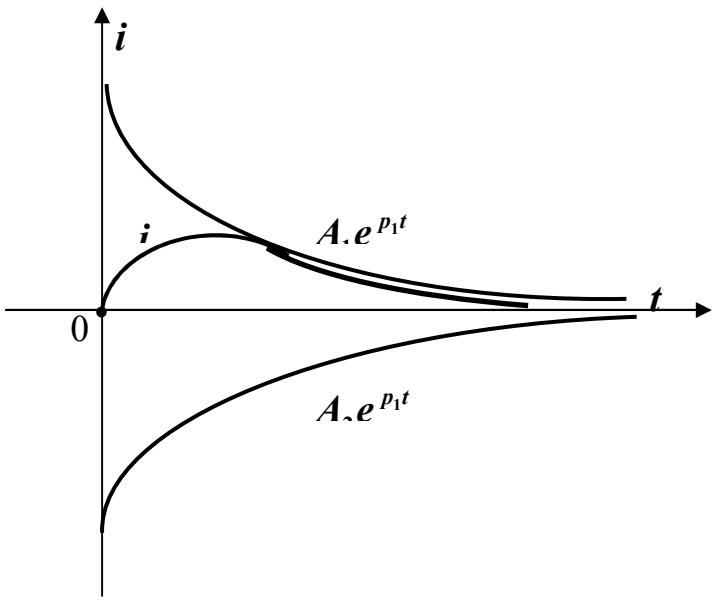


Рисунок 16.16– Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо $D > 0$

З графіку слідує, що перехідний струм в колі не змінює напрям і у колі йде накопичення зарядів на конденсаторі – це **аперіодичний процес**.

Другий випадок. Якщо $\alpha < \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то D = 0, корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega, \tag{16.77}$$

де ω – частота вільних затухаючих коливань, рад/с;

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} . \tag{16.78}$$

Загальний вигляд рівняння перехідного струму аналогічний (16.69).

Постійні інтегрування A_1 і A_2

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{\omega \cdot L}\cdot, \tag{16.79}$$

Підставляючи значення коренів, постійних інтегрування у (1.73), знаходимо рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{\omega \cdot L} e^{(-\alpha + j\omega)t} - \frac{E}{\omega \cdot L} e^{(-\alpha - j\omega)t} = \frac{E}{\omega \cdot L} e^{-\alpha t} \cdot (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \tag{16.80}$$

або

$$i = \frac{E}{\omega \cdot L} e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t . \tag{16.81}$$

На рисунку 16.17 показаний графік перехідного струму для випадку, якщо $D < 0$.

З графіку слідує, що перехідний струм в колі змінює напрям впродовж накопичення зарядів на конденсаторі – це **періодичний процес**.

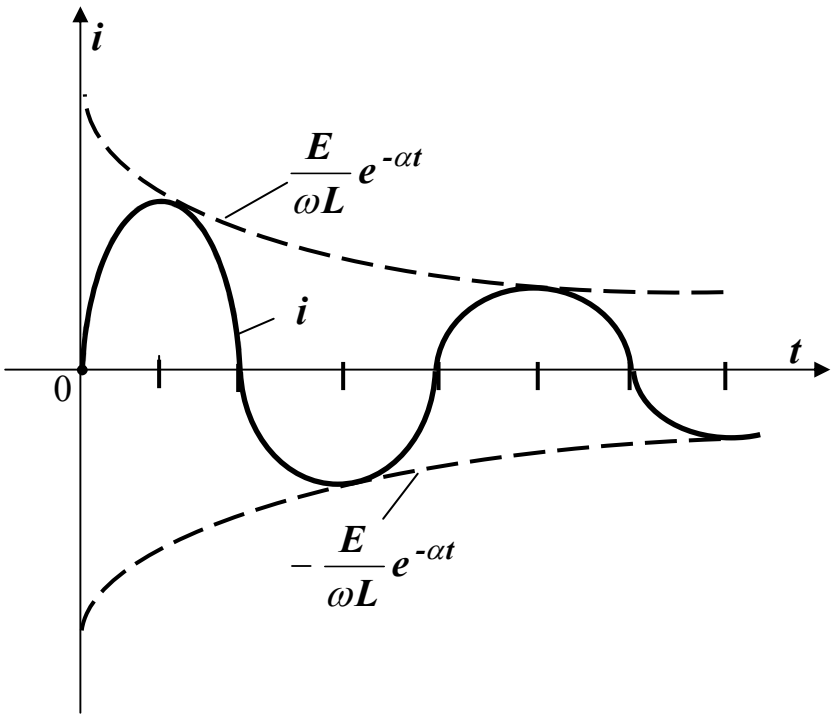


Рисунок 16.17– Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо $D < 0$

Третій випадок. Якщо $\alpha = \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то D = 0, корені $p_1 = -\alpha$, однакові, дійсні, негативні, заряд конденсатора **граничнo аперіодичний**. Загальне рішення рівняння (16.80) у цьому випадку має дріб

$$\frac{\sin \omega t}{\omega} \to \frac{0}{0}. \tag{16.82}$$

Виникає математична невизначеність, для розкриття якої по правилу Лопіталя продифиренціюємо чисельник і знаменник за ω.

$$\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)'\Bigg|_{\omega \to 0} = \frac{t \cdot \cos \omega t}{1} = 0. \tag{16.83}$$

Рівняння перехідного струму у цьому випадку наступне

$$i = \left(A_1 + A_2 \cdot t\right)e^{-\alpha \cdot t} = \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t}. \tag{16.84}$$

Форма кривої струму така ж, як і в першому випадку.

В усіх трьох розглянутих випадках під дією джерела постійної ЕРС відбувається заряджання конденсатора. У першому і третьому випадках зарядний струм не змінює свого напрямку, що характеризує аперіодичний процес. В другому випадку струм являє собою затухаючу синусоїду, що характеризує коливальний процес. Коливання в контурі виникають внаслідок періодичного взаємного перетворення енергії електричного поля, яка накопичується в конденсаторі, та магнітного поля котушки.

Наявність активного опору в колі приводить до затухання коливань внаслідок розсіювання енергії в активному опорі. Характер процесу залежить від коренів характеристичного рівняння, які, у свою чергу, визначаються співвідношенням параметрів елементів кола.

16.9. Розряд конденсатора на котушку

Нехай тепер заряджений до значення E конденсатор у момент часу $t = 0$ підключається до затисків котушки (рисунок 16.18).

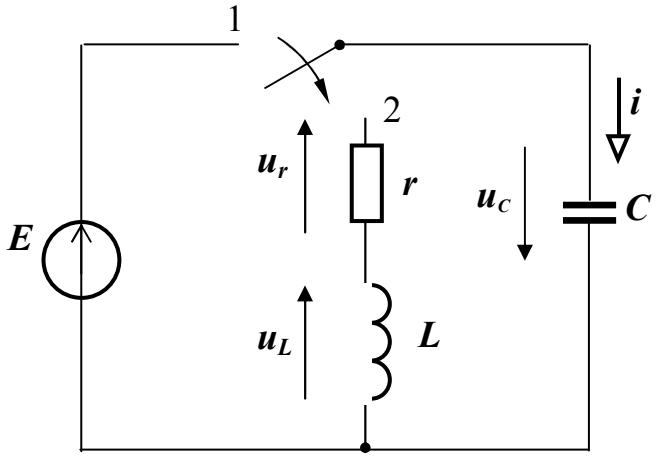


Рисунок 16.18 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при розряді конденсатора на котушку

Для післякомутаційної схеми справедливе рівняння

$$u_L + u_r + u_C = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = 0 . \qquad (16.85)$$

Характеристичне рівняння (16.66). В залежності від коренів характеристичного рівняння можливий аперіодичний і періодичний розряд конденсатора на котушку.

Перший випадок. Якщо $\alpha > \omega_0$, $D > 0$, тоді $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ тоді корені p_1 і p_2 дійсні, негативні та різні.

Знайдемо рівняння перехідної напруги на ємності u_C і перехідного струму i. Примусовий струм $i_{пр} = 0$. Примусова напруга на ємності $u_{Cпр} = 0$.

Загальне рішення рівняння перехідного струму (16.70). У загальному вигляді рівняння перехідної напруги на ємності u_C

$$u_C = 0 + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t \cdot} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} . \qquad (16.86)$$

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації при $t = 0$ $i(0) = 0$, оскільки $x_C^{(0)} = 0$, а $u_C(0) = E$.

Для знаходження постійних інтегрування струму A_1 і A_2 складемо систему рівнянь: перехідної напруги u_C та першої похідної u_C'

$$\begin{cases} u_C = 0 + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}; \\ u_C{}' = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 t} + p_2 \cdot A_2 e^{p_2 \cdot t} . \end{cases} \qquad (16.87)$$

Перша похідна з урахуванням початкових умов, оскільки

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot u_C{}' \Rightarrow \; u_C{}'(0) = \frac{i(0)}{C} = 0 . \qquad (16.88)$$

Визначимо постійні інтегрування напруги на ємності A_1 і A_2

$$A_1 = \frac{E \cdot p_2}{p_2 - p_1}, \qquad A_2 = \frac{-E \cdot p_1}{p_2 - p_1} . \qquad (16.89)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E}{p_2 - p_1}(p_2 \cdot e^{p_1 \cdot t} - p_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}). \qquad (16.90)$$

Графік перехідної напруги на ємності має вигляд, представлений на рисунку 16.19.

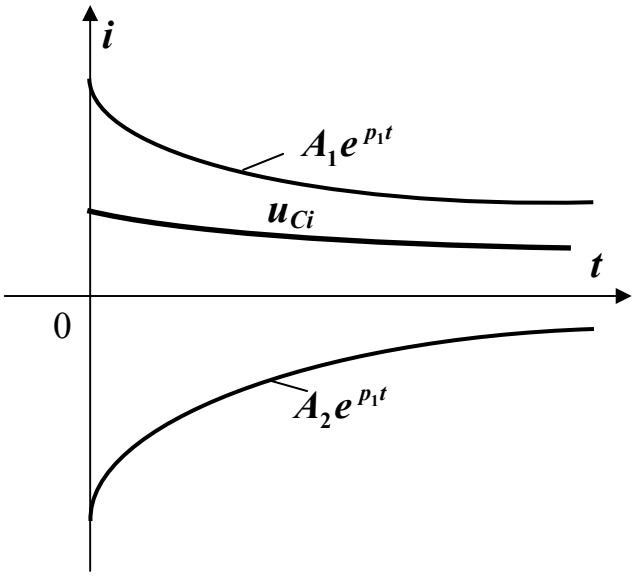


Рисунок 16.19 – Графік перехідної напруги
на ємності при розряді конденсатора, якщо $D > 0$

Рівняння перехідного струму в колі

$$i = \frac{C \cdot p_1 \cdot p_{2.} \cdot E}{p_2 - p_1}(e^{p_1 \cdot t} - e^{p_2 \cdot t}). \qquad (16.91)$$

З графіку слідує, що перехідна напруга на ємності при розряді не перетинає вісь часу – це **аперіодичний процес**.

Другий випадок. Якщо $\alpha < \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $D = 0$, корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені (16.77).

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}}. \qquad (16.92)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E \cdot \omega_0}{\omega} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos \omega t. \qquad (16.93)$$

На рисунку 16.20 показаний графік перехідного процесу в цьому випадку. З графіку слідує, що конденсатор при розрядці обмінюється енергією з котушкою – це **періодичний процес**.

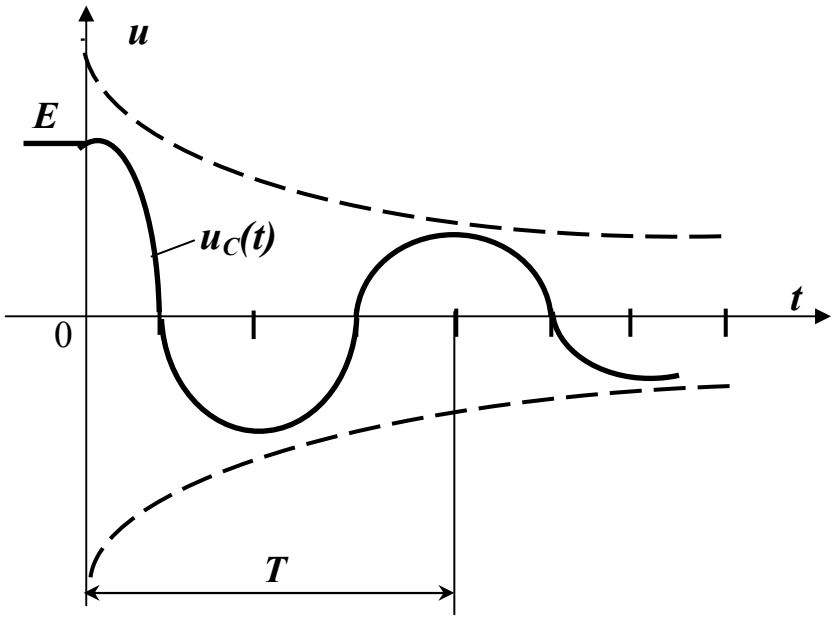


Рисунок 16.20 – Графік перехідної напруги на ємності при розряді конденсатора, якщо $D < 0$

Коливальний процес при розрядці конденсатора на котушку характеризується періодом власних коливань

Якщо втрати енергії в контурі відсутні ($r = 0$, $\alpha = 0$), то

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{L \cdot C}\,. \tag{16.94}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\,. \tag{16.95}$$

Таким чином, *LC-контур*, у якому будь-яким способом компенсуються втрати енергії, може служити генератором незатухаючих гармонічних коливань.

Третій випадок. Якщо $\alpha = \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то D = 0, корінь $p_1 = -\alpha$, дійсний, негативний.

Рівняння перехідних напруги на ємності і струму

$$u_C = E \cdot (1 - p \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = E \cdot (1 + \alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

$$i = -\frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{p \cdot t} \tag{16.96}$$

Розряд конденсатора на котушку **гранично аперіодичний**.

16.10. Включення котушки при синусоїдній напрузі

Нехай котушка індуктивності підключається до джерела гармонійної ЕРС з рівнянням (рисунок 16.21):

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e). \tag{16.97}$$

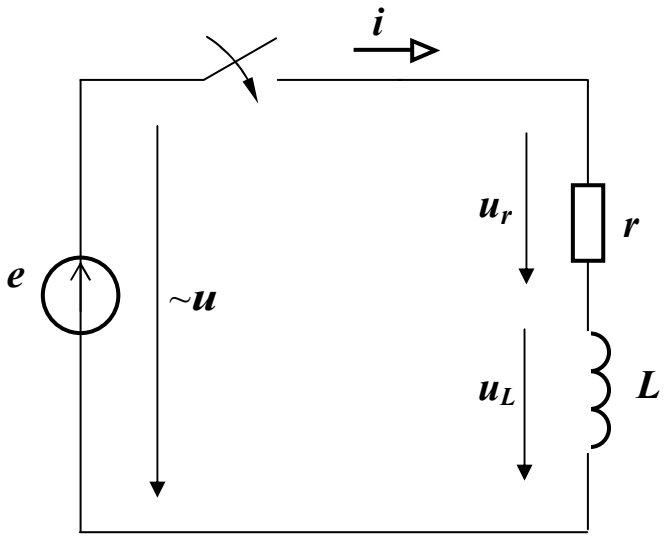


Рисунок 16.21 – Розрахункова схема підключення котушки до джерела синусоїдної напруги

Для цього кола в післякомутаційний період справедливі рівняння

$$L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i = e \tag{16.98}$$

або

$$\tau \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{E_m}{r} \cdot \sin\left(\omega t + \psi_i\right), \qquad (16.99)$$

де τ – постійна часу перехідного процесу

$$\tau = \frac{L}{r}. \qquad (16.100)$$

В загальному вигляді рівняння перехідного струму можна записати у вигляді суми вільної і примусової складових

$$i = i_{пр} + i_{св}. \qquad (16.101)$$

Примусовий (сталий) струм у колі

$$i_{пр} = I_m \cdot \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi\right), \qquad (16.102)$$

де I_m – максимальний струм, А. Визначимо як

$$I_m = \frac{E_m}{z}. \qquad (16.103)$$

Повний опір електричного кола в перехідному режимі

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L\right)^2}. \qquad (16.104)$$

Кут зсуву фаз між напругою і струмом кола в перехідному режимі

$$\varphi = \left| \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r} \right|. \qquad (16.105)$$

Вільна складова струму змінюється за експонентою $i_в = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Рівняння перехідного струму у загальному вигляді з урахуванням примусової складової струму

$$i = I_m \cdot \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi\right) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.106)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідного струму з початкових умов: $t = 0$ $i(0) = 0$, тому

$$A = -I_m \cdot \sin\left(\psi_e - \varphi\right). \qquad (16.107)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідного струму у колі

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \cdot \sin(\psi_e - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (16.108)$$

Максимально можливого значення струм у перехідному електричному колі досягає, якщо в момент включення котушки примусовий струм буде мати амплітудне значення. Це виникає при початковій фазі $\psi_i = \left(\psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, а постійна часу електричного кола буде дуже великою ($r \approx 0$, $\tau \to \infty$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$), тобто вільний струм буде затухати дуже повільно (рисунок 16.22).

За цих умов $\psi = \varphi$ і прикладена напруга буде проходити через нуль. У цьому випадку амплітуда перехідного струму в електричному колі може досягти подвоєного значення амплітуди примусового (усталеного) струму.

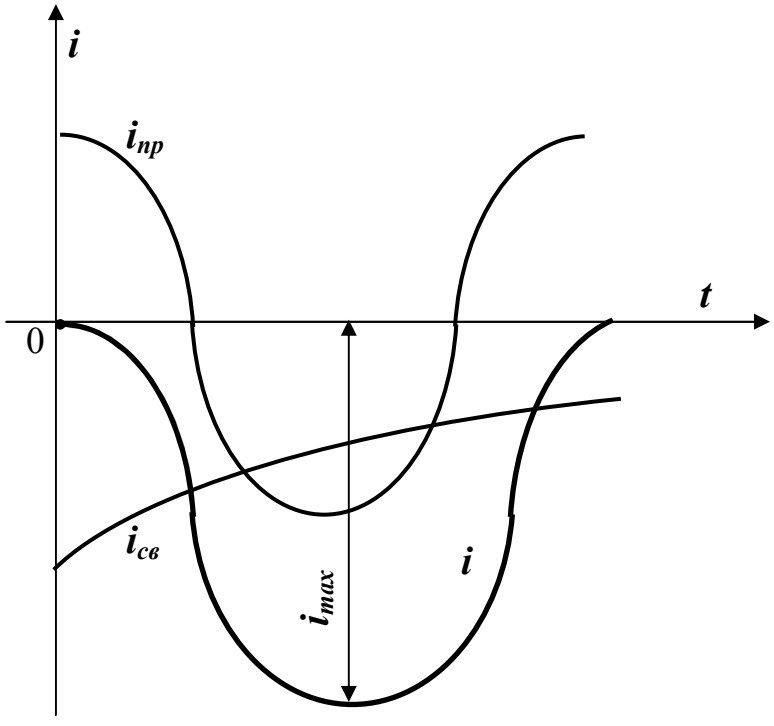


Рисунок16.22 – Графіки примусового, вільного і перехідного струму при його початкові фазі $\psi_i = \left(\psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

Приклад 16.5

Перехідний процес підключення котушки до джерела синусоїдної ЕРС з частотою 50 Гц (рисунок 16.20) за умов, що котушка має індуктивність 0,02758 *Гн*, активний опір котушки дорівнює 5 *Ом*. Електрорушійна сила постійного джерела e = 56,4sin(ωt+70º) В. **Визначити рівняння перехідного струму.**

Рішення

1. Визначаємо корінь характеристичного рівняння електричного кола

$$p = -\frac{1}{\tau};\ \tau = \frac{L}{r} = \frac{0{,}02758}{5} = 0{,}0055\ \ c;$$

$$p = -\frac{5}{0{,}02758} = -181{,}3\ \ 1/c.$$

2. Визначаємо примусову складову струму

$$i_{пр} = I_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_i);$$

$$x_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}02758 = 8{,}66\ \ Ом$$

$$z = \sqrt{r^2 + x_L{}^2} = \sqrt{5^2 + 8{,}66^2} = 10\ \ Ом.;$$

$$I_m = \frac{E}{z} = I = \frac{56{,}4}{10} = 5{,}64\ \ A.$$

$$\varphi = arctg\frac{x_L}{r} = arctg\frac{8{,}66}{5} = 60^\circ;$$

$$\Psi_i = \Psi_e - \varphi\ = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ;$$

$$i_{пр} = 5{,}64 \cdot \sin(\omega t + 10^\circ)\ \ A.$$

3. Визначаємо постійну інтегрування перехідного струму в колі за

$$A = -\frac{E}{r}\sin\Psi_i = -\frac{56{,}4}{10}\sin 10^\circ = -0{,}98\ \ A.$$

4. Запишемо рівняння вільної складової перехідного струму в колі за

$$i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -0{,}98 \cdot e^{-181{,}3 \cdot t} = -0{,}98 \cdot e^{-\frac{t}{0.0055}}\ \ A.$$

5. Визначаємо рівняння перехідного струму в колі за формулами

$$i = i_{пр} + i_в = i_{пр} = 5{,}64 \cdot \sin(\omega t + 10^\circ)\ \ - 0{,}98 \cdot e^{-181{,}3 \cdot t} =$$

$$= 5{,}64 \cdot \sin(314 \cdot t + 0{,}174^\circ)\ \ - 0{,}98 \cdot e^{-181{,}3 \cdot t}\ \ A.$$

16.11 Включення реального конденсатора при синусоїдній напрузі

Нехай послідовно з'єднані резистор і ідеальний конденсатор підключаються до джерела синусоїдної ЕРС (рисунок 16.23), що має миттєве рівняння

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e). \tag{16.109}$$

Для цього кола справедливе рівняння за другим законом Кірхгофа

$$r \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = e. \tag{16.110}$$

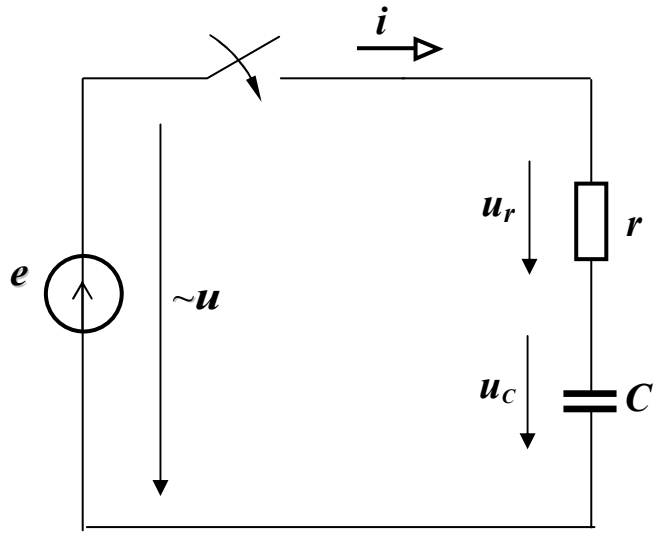


Рисунок 16.23 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних резистора і конденсатор при підключенні до джерела синусоїдної ЕРС

Струм у колі

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt}, \tag{16.111}$$

тоді

$$r \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = e \tag{16.112}$$

або

$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = e, \tag{16.113}$$

де $\tau = r \cdot C$ – постійна часу кола, *с*.

Перехідна напруга на ємності

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} \tag{16.114}$$

Примусова (усталена) напруга на ємності

$$u_C = U_{Cm} \cdot \sin\cdot\left(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ\right), \tag{16.115}$$

оскільки рівняння примусового струму

$$i_{пр} = I_m \cdot \sin\left(\omega t + \psi + \varphi\right), \tag{16.116}$$

де амплітудний струм в колі

$$I_m = \frac{E_m}{z}. \tag{16.117}$$

Повний опір кола

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}. \tag{16.118}$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності

$$u_{Ccc} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.119}$$

Для напруги на ємності рівняння у загальному вигляді

$$u_C = U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ\right) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{16.120}$$

Знаходимо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов: $t = 0$ $u_C(0) = 0$

$$A = -U_{Cm} \cdot \sin\left(\psi + \varphi - 90^\circ\right). \tag{16.121}$$

Остаточно одержимо рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ\right) - U_{Cm} \cdot \sin\left(\psi + \varphi - 90^\circ\right) \tag{16.122}$$

.

Максимально можливого значення напруга на ємності досягає, якщо в момент включення кола примусова складова напруги буде ма-

ти амплітудне значення. Це буде мати місце за умови, якщо початкова фаза напруги на ємності $\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$. Крім того, будемо вважати, що постійна часу кола має дуже мале значення, оскільки активний опір конденсатора $r \to 0$ (рисунок 16.24).

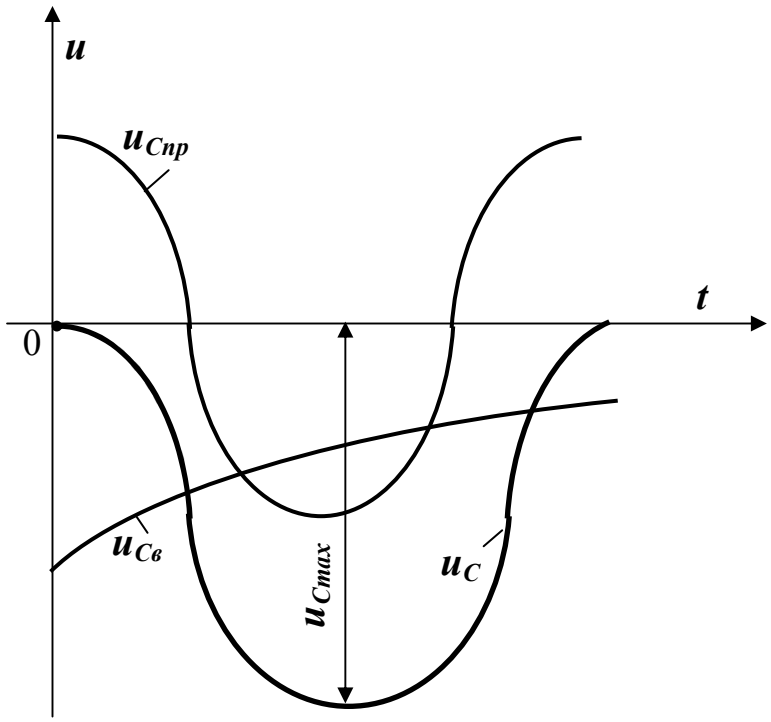


Рисунок 16.24 – Графік перехідної напруги на ємності при початковій фаза напруги на ємності $\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$

У цьому випадку максимальне значення перехідної напруги на ємності може досягати майже подвоєного значення амплітуди примусової складової перехідної напруги на ємності.

Приклад 16.5

Перехідний процес підключення конденсатора через резистор до джерела синусоїдної ЕРС з частотою 50 Гц (рисунок 16.23) за умов, що конденсатор має ємність 0,0000796 *Ф*, активний опір резистора дорівнює 30 *Ом*. Електрорушійна сила постійного джерела

e = 282sin(ωt+10^o) В. **Визначити рівняння перехідної напруги на ємності.**

Рішення

1. Визначаємо корінь характеристичного рівняння перехідного кола за

$$p = -\frac{1}{\tau};\ \tau = r \cdot C = 30 \cdot 0.0000796 = 0{,}00239\ \ c;$$

$$p = -\frac{1}{0{,}00239} = -418{,}76\ 1/c.$$

2. Визначаємо примусову складову напруги на ємності

$$u_{C\,пр} = U_{C\,m} \cdot \sin(\omega t + \Psi_{u_C});$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}0000796} = 40\ \ Ом$$

$$z = \sqrt{r^2 + x_C{}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \ Ом.;$$

$$I_m = \frac{E}{z} = \frac{282}{50} = 5{,}64\ \ \ A;$$

$$U_{Cm} = x_C \cdot I_m = 40 \cdot 5{,}64 = 225{,}6\ B;$$

$$\varphi = arctg\,\frac{x_C}{r} = arctg\,\frac{40}{30} = 53^\circ;$$

$$\Psi_{uC} = \Psi_e + \varphi - 90^o = 10^o + 53^o - 90^o = -27^o;$$

$$u_{Cпр} = 225{,}6 \cdot \sin(\omega t - 27^\circ)\ \ A.$$

3. Визначаємо постійну інтегрування перехідного струму

$$A = -225{,}6 \sin \Psi_{u_C} = -225{,}5 \sin(-27^\circ) = -102{,}73\ \ B.$$

4. Запишемо рівняння вільної складової перехідного струму за

$$u_{C\,св} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -102{,}73 \cdot e^{-418{,}76 \cdot t} = -0{,}98 \cdot e^{-\frac{t}{0.00239}}\ B.$$

5. Визначаємо рівняння перехідної напруги на ємності за (16.114), (16.120) і (16.122)

$$u_C = u_{C\,пр} + u_{C\,в} = 225{,}6 \cdot \sin(\omega t - 27^\circ)\ \ -102{,}73 \cdot e^{-418{,}76 \cdot t} =$$

$$= 225{,}6 \cdot \sin(314 \cdot t - 0{,}471) \ - 102{,}37 \cdot e^{-418{,}76 \cdot t} \ B.$$

16.12 Перехідний процес в колі з взаємною індуктивністю

В якості прикладу розглянемо включення трансформатору без осердя на постійну напругу $U_{0.}$ (рисунок 16.25).

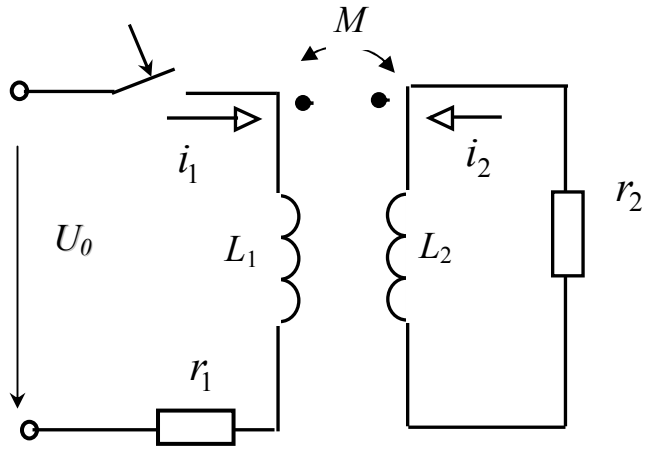


Рисунок 16.25 – Розрахункова схема перехідного процесу кола з взаємною індуктивністю

Складемо диференціальні рівняння для первинного і вторинного контурів трансформатора

$$r_1 \cdot i_1 + L_{1.} \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} = U_0; \qquad (16.123)$$

$$r_2 \cdot i_2 + L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} = 0. \qquad (16.124)$$

Продиференцируємо обидва рівняння за часом

$$r_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{1.} \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0; \qquad (16.125)$$

$$r_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + L_{2.} \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0. \qquad (16.126)$$

Помножимо рівняння для першого контуру (16.125) на L_2, а рівняння для другого контуру (16.126) на M

$$r_1 \cdot L_2 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_1 \cdot L_2 \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \cdot L_2 \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0; \qquad (16.127)$$

$$r_2 \cdot M \cdot \frac{di_2}{dt} + L_{2\cdot} \cdot M \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M^2 \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0. \qquad (16.128)$$

Віднімемо рівняння (16.128) від рівняння (16.127)

$$(L_1 \cdot L_2 - M^2) \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + r_1 \cdot L_2 \cdot \frac{di_1}{dt} - r_2 \cdot M \cdot \frac{di_2}{dt} = 0. \qquad (16.129)$$

З рівняння (16.121) знаходимо взаємну індуктивність M

$$M \cdot \frac{di_2}{dt} = U_0 - r_1 \cdot i_1 - L_{1\cdot} \cdot \frac{di_1}{dt}. \qquad (16.130)$$

Підставимо рівняння (16.128) у рівняння (16.127) і остаточно отримаємо

$$(L_1 \cdot L_2 - M^2) \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (r_1 \cdot L_2 + r_2 \cdot L_1) \cdot \frac{di_1}{dt} + r_1 \cdot r_2 \cdot i_1 = r_2 \cdot U_0. \qquad (16.131)$$

Таким чином, маємо диференціальне рівняння другого порядку. Хід розв'язання якого звичайний. Аналогічно можна отримати рівняння струму другого контуру i_2.

Початкові умови для струмів через індуктивний характер кола будуть: $i_1(0) = 0$; $i_2(0) = 0$. Примушені стуми в контурах трансформатора

$$i_{1пр} = \frac{U_0}{r_1}; \qquad i_{2пр} = 0. \qquad (16.132)$$

16.13 Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі

Перехідний процес в розгалуженому лінійному колі описується системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, загальне рішення яких знаходиться як сума примусової і вільної складових.

Нехай задана розрахункова схема (рисунок 16.26) та відомі всі параметри і ЕРС. Необхідно знайти струми в розгалуженнях і напруги на всіх елементах під час перехідного процесу.

Кожна електрична величина в перехідному процесі буде мати примушену і вільну складову, через що розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі зводиться до визначення примушених і вільних складових струмів і напруг, а також постійних інтегрування.

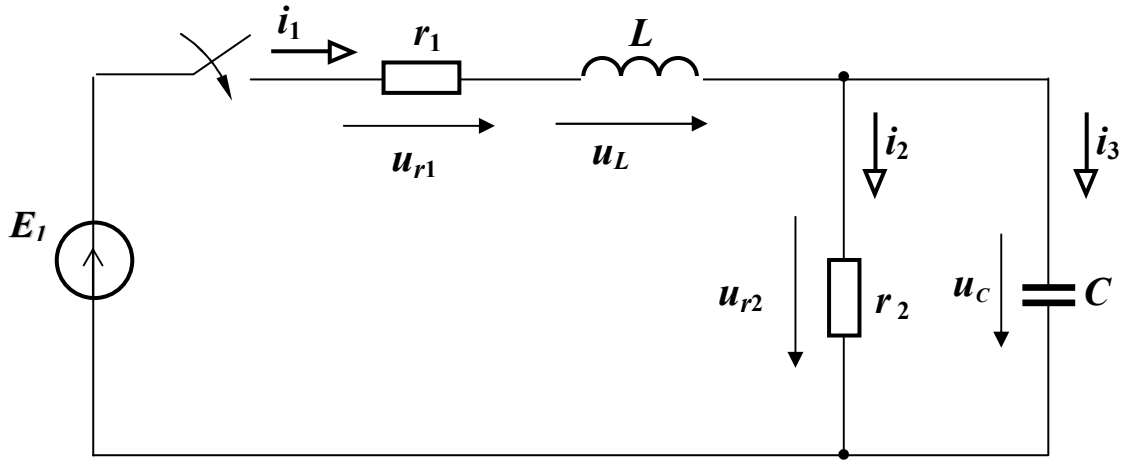


Рисунок 16.26 Розрахункова схема розгалуженого кола

а) Визначення вільних складових струмів і напруг.

Для післякомутаційної схеми складаємо рівняння за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ L \cdot \dfrac{di_1}{dt} + r_1 \cdot i_1 + r_2 \cdot i_2 = E_1 \\ r_2 \cdot i_2 - \dfrac{1}{C}\int i_3 \cdot dt = 0. \end{cases} \qquad (16.133)$$

У цих рівняннях i_1, i_2 і i_3 – повні струми.

Перепишемо систему рівнянь для вільних складових струмів

$$\begin{cases} i_{1в} - i_{2в} - i_{3в} = 0 \\ L \cdot \dfrac{di_{1в}}{dt} + r_1 \cdot i_{1в} + r_2 \cdot i_{2в} = 0 \\ r_2 \cdot i_{2в} - \dfrac{1}{C} \cdot \int i_{3в} \cdot dt = 0. \end{cases} \quad (16.134)$$

Вільний струм можна визначити шляхом рішення однорідного диференціального рівняння, яке записується у вигляді показової функції $A \cdot e^{pt}$. Таким чином, кожний вільний струм може бути представлений у вигляді

$$i_в = A \cdot e^{pt}. \quad (16.135)$$

Постійна інтегрування A для кожного вільного струму різна, а показники затухання p однакові для всіх вільних струмів, тому що все коло охоплене єдиним перехідним процесом.

Візьмемо похідну від вільного струму

$$\frac{di_в}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot e^{pt}\right) = p \cdot A \cdot e^{pt} = p \cdot i_в. \quad (16.136)$$

Знайдемо інтеграл від вільного струму

$$\int i_в \cdot dt = \int A \cdot e^{p \cdot t} = \frac{A \cdot e^{p \cdot \cdot t}}{p} = \frac{i_в}{p}. \quad (16.137)$$

Перепишемо систему рівнянь (16.134) з урахуванням (16.136) і (16.137)

$$\begin{cases} i_{1в} - i_{2в} - i_{3в} = 0 \\ \left(p \cdot L + r_1\right) \cdot i_{1в} + r_2 \cdot i_{2в} = 0 \\ r_2 \cdot i_{2в} - \dfrac{i_{3в}}{p \cdot C} = 0. \end{cases} \quad (16.138)$$

Отримана система рівнянь являє собою систему алгебраїчних рівнянь відносно $i_{1в}$, $i_{2в}$, $i_{3в}$ та не містить похідних і інтегралів.

Вирішимо систему рівнянь (16.138) методом визначників

$$i_{1в} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad i_{2в} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad i_{3в} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \tag{16.139}$$

Знаходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (p \cdot L + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\dfrac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix}. \tag{16.140}$$

Знаходимо доповнення визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\dfrac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix}; \tag{16.141}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ (p \cdot L + r_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix}; \tag{16.142}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ (p \cdot L + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{16.143}$$

Таким чином, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, тому що

$$i_{1в} = \frac{0}{\Delta}; \qquad i_{2в} = \frac{0}{\Delta}; \qquad i_{3в} = \frac{0}{\Delta}. \tag{16.144}$$

Кожний з вільних струмів не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому випадку не будуть виконуватися закони комутації. А це може бути тільки тоді, коли визначник системи Δ дорівнює нулю, тобто $\Delta = 0$.

Рівняння $\Delta = 0$ називають характеристичним. Єдиним невідомим у ньому є корінь p. У даному прикладі одержимо

$$\frac{r_2}{p \cdot C} + r_2 \cdot (p \cdot L + r_1) + \frac{p \cdot L + r_1}{p \cdot C} = 0 \qquad (16.145)$$

або

$$r_2 \cdot L \cdot C \cdot p^2 + (r_1 \cdot r_2 \cdot C + L) \cdot p + (r_1 + r_2) = 0. \qquad (16.146)$$

Корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-(r_1 \cdot r_2 \cdot C + L) \pm \sqrt{(r_1 \cdot r_2 \cdot C + L)^2 - 4 \cdot r_2 \cdot L \cdot C(r_1 + r_2)}}{2 \cdot r_2 \cdot L \cdot C} \qquad (16.147)$$

Знайшовши корені характеристичного рівняння системи, можна записати загальні вирази для кожного з вільних струмів. Можливі декілька випадків:

1) рівняння має один корінь, тоді вільна складова струму

$$i_в = A \cdot e^{p \cdot t}; \qquad (16.148)$$

2) рівняння має два дійсних нерівних корені, тоді

$$i_в = A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p2 \cdot t}; \qquad (16.149)$$

3) рівняння має два дійсних рівних корені, тоді

$$i_в = (A_1 + A_2 \cdot t) e^{p \cdot t}; \qquad (16.150)$$

4) рівняння має два комплексно-спряжених корені, тоді

$$i_в = (A_1 \cdot \cos \omega t + A_2 \cdot \sin \omega t) e^{p \cdot t}. \qquad (16.151)$$

б) Знаходження примушених складових струмів і напруг виконується відомими методами.

в) Знаходження загального рішення для струмів і напруг як суми примушених і вільних складових.

г) Знаходження постійних інтегрування виконується з урахуванням початкових умов, які поділяються на незалежні і залежні початкові умови.

Приклад 16.6

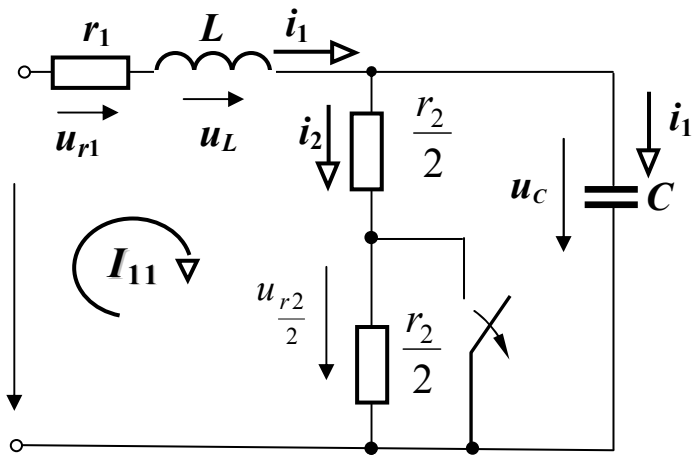


Рисунок 16.27 – Розрахункова схема електричного кола

В електричному колі, що підключено до синусоїдної напруги $u = 180\sin(300 \cdot t + 45^\circ)$ В (рисунок 16.27), розмикається рубильник. Параметри кола наступні: активний опір r_1 =30 Ом, r_2 = 10 Ом, індуктивність $9 \cdot 10^{-2}$ Гн, ємність $9 \cdot 10^{-4}$ Ф.

Знайти закони зміни перехідних струмів на ділянках кола і рівняння напруги на індуктивності.

Рішення

1. Визначимо рівняння миттєвого примусового струму в нерозгалуженій частині кола до комутації.

$$I_{np}(0\text{-}) = \frac{\dot{U}}{Z + \dfrac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}};$$

де $Z = r_1 + j\,x_L = 30 + j300 \cdot 9 \cdot 10^{-2}$ Ом; ·

$$Z_1 = 1/j\,x_C = 1/\,j300 \cdot 9 \cdot 10^{-4}\ \text{Ом};\ Z_2 = \frac{r_2}{2} = 5\ \text{Ом}$$

$$I_{np}(0\text{-}) = \frac{\dfrac{180}{\sqrt{2}} \cdot e^{j45^\circ}}{30 + j300 + \cdot \dfrac{\dfrac{1}{j300 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} \cdot 5}{\dfrac{1}{j300 + 9 \cdot 10^{-4}} \cdot 5}} = 3{,}14 + j0{,}4\ \text{A};$$

$i_{np}(0\text{-}) = 4{,}48\sin(300 \cdot t + 45^\circ)$ А; $i_{np}(0) = 4{,}48\sin(300 \cdot 0 + 45^\circ) = 0{,}574$ А

2.Визначимо примусові напруги на ємності і індуктивності до комутації.

$$\dot{U}_{Cпр}(0–) = I_{пр}(0–)\cdot\frac{Z_1\cdot Z_2}{Z_1+Z_2} \quad \dot{U}_{Cпр}(0–) = 6{,}5 - j6{,}8 \text{ В};$$

$$I_{2пр} = \frac{\dot{U}_{Cпр}(0–)}{Z_2} = 1{,}3 - j1{,}36 \text{ Ом}.$$

$$\dot{U}_{Lпр}(0–) = \dot{I}_{пр}(0–)\cdot j\omega\cdot L; \quad \dot{U}_{Lпр}(0–) = -10 + j85 \text{ В}.$$

$u_{Lпр}(0–) = 121{,}3\sin(300\cdot t + 97{,}3^{o})$ В; $u_{Lпр}(0) = 120{,}3$ В.

3. Знайдемо примусові струми на всіх ділянках кола після комутації.

$$\dot{I}_{пр} = \frac{\dot{U}}{Z + \frac{Z_1\cdot r_2}{Z_1+r_2}}; \quad I_{пр} = 3{,}21 + j0{,}44 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{пр\,1} = \dot{I}_{пр}\cdot\frac{r_2}{r_2 - j\omega C}; \quad \dot{I}_{пр\,1} = 3{,}04\cdot e^{j29^{\circ}} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{пр\,2} = \dot{I}_{пр}\cdot\frac{\frac{1}{\omega C}}{r_1 - j\omega C}; \quad \dot{I}_{пр\,2} = 1{,}65\cdot e^{-j63^{\circ}} \text{ А}.$$

$i_{пр} = 4{,}58\sin(300\cdot t + 7{,}7^{o})$ А; $i_{пр}(0) = 4{,}58\sin 7{,}7^{o}) = 0{,}618$ А;

4. Розрахуємо перехідні струми.

Складемо систему рівнянь для вільних складових контурних струмів

$$\begin{cases} (r_1 + r_2)\cdot i_{11} + L\cdot\dfrac{di_{11}}{dt} + r_2\cdot i_{22} = 0; \\ r_2\cdot i_{11} + r_2\cdot i_{22} + \dfrac{1}{C}\int i_{22}\cdot dt = 0. \end{cases}$$

Алгебраїзуємо систему рівнянь, підставимо параметри

$$\begin{cases} (40 + j9\cdot 10^{-2}\cdot p)\cdot i_{11} + 10\cdot i_{22} = 0; \\ 10\cdot i_{11} + \left(10 + \dfrac{1}{p\cdot 9\cdot 10^{-4}}\right)\cdot i_{22} = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння складемо, прирівняв до нуля визначник цієї системи однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 40 + 9 \cdot 10^{-2} \cdot p & 10 \\ 10 & 10 + \dfrac{1}{p \cdot 9 \cdot 10^{-4}} \end{vmatrix} = 0$$

або $81 \cdot 10^{-6} \cdot p^2 + 36 \cdot 10^{-3} \cdot p + 4 = 0$. Корні однорідного рівняння

$$p = p_1 = p_2 = -222 \ \frac{рад}{с}.$$

Напишемо спочатку рівняння для струму i

$$i = i_{пр} + i_в = 4{,}58 \sin(300 \cdot t + 7{,}7^{o}) + (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t}.$$

В момент комутації ($t = 0$) струм в індуктивності, згідно першого закону комутації, не змінюється стрибком, тому

$i(0) = i_{пр}(0–) = 0{,}574 = 0{,}618 + A_1$, звідкіля $A_1 = -0{,}044$ А/с.

Оскільки при $t = 0$ не змінюється стрибком напруга на конденсаторі u_C, то, як видно зі схеми (рисунок), не зміниться стрибком і напруга на індуктивності u_L, що дозволить одразу знайти $\left(L \cdot \dfrac{di}{dt}\Big|_{t=0}\right)$ $u_L(0) = u_{Lпр}(0\text{-}) = 120{,}3$ В;

$$u_L(0) = L \cdot \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 9 \cdot 10^{-2} \cdot (4{,}58 \cdot 300 \cdot \cos 7{,}7^{o}) + 0{,}044 \cdot 222 + A_2),$$

звідкіля $A_1 = -35{,}76$ А/с. Рівняння перехідного струму в нерозгалуженій частині кола

$$\underline{i_{пр} = 4{,}58 \sin(300 \cdot t + 7{,}7^{o}) – (0{,}044 + 35{,}76 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t}} \ \text{А}.$$

Склавши для першого контуру рівняння за другим законом Кірхгофа для вільних струмів

$$0 = r_1 \cdot i_в + L \frac{di_в}{dt} + r_2 \cdot i_{2в},$$

знайдемо, вільну складову струму $i_{в2}$

$$i_{в2} = -0{,}1 \cdot (30 \cdot i_в + 9 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{di_в}{dt}) \ (0{,}366 + 35{,}76 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t} \ \text{А},$$

тоді $i_{в1} = i_в - i_{в2} = -(0{,}41 + 35{,}76 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t}$ А.

Рівняння перехідних струмів

$$i_2 = i_{пр2} + i_{в2} = 1{,}65 \sin(300 \cdot t - 63^\circ) + (0{,}366 + 35{,}76 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t} \text{ А},$$

$$i_1 = i_{пр1} + i_{в1} = 4{,}325 \sin(300 \cdot t + 28{,}7^\circ) - (0{,}41 + 71{,}52 \cdot t) \cdot e^{-j222 \cdot t} \text{ А}.$$

16.14. Перетворення Лапласа

Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами можуть бути розв'язані за допомогою інтегральних перетворень Лапласа. Різним функціям дійсних змінних (часу t) ці перетворення відповідають функції комплексної змінної $p = \alpha + j\omega$ і навпаки. Комплексну змінну слід відрізняти від змінної $p = \frac{d}{dt}$, яка позначає оператор диференціювання. Пряме перетворення Лапласа функції часу $f(t)$ визначається співвідношенням

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-p \cdot t} f(t) \cdot dt \,. \qquad (16.152)$$

Функцію $f(t)$ називають оригіналом, а $F(p)$ – зображенням функції $f(t)$ за Лапласом. Таким чином, можна записати

$$f(t) \doteqdot F(p), \qquad (16.153)$$

тобто оригінал відповідає зображенню.

Запишемо деякі зображення, що доводяться в курсі вищої математики:

зображення постійної величини

$$A \doteqdot \frac{A}{p} \,, \qquad (16.154)$$

зображення похідної функції $f(t)$

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0) \qquad (16.155)$$

зображення інтеграла функції $f(t)$

$$\varphi(t) = \int f(t) dt \doteqdot \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p} \,. \qquad (16.156)$$

16.15. Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Нехай коло (рисунок 16.26) підключається до джерела напруги при ненульових початкових умовах, тобто до комутації в колі проходив деякий струм.

Тоді можемо записати $i(0) \neq 0$, $u_C \neq 0$. Складемо диференціальне рівняння перехідного процесу

$$ri + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = u(t), \qquad (16.157)$$

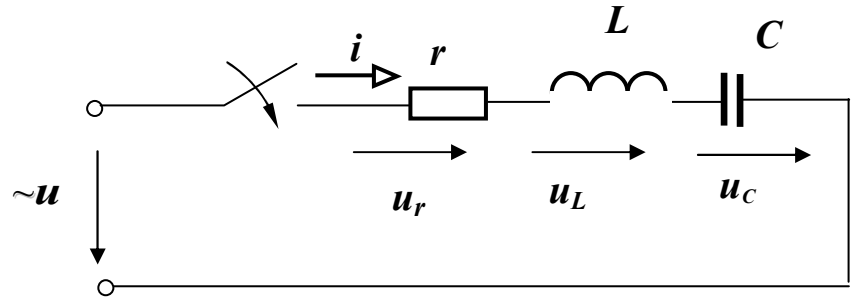


Рисунок 16.26 Розрахункова схема кола для миттєвих значень

Замінимо оригінали функцій їх зображеннями за Лапласом (рисунок 16.27)

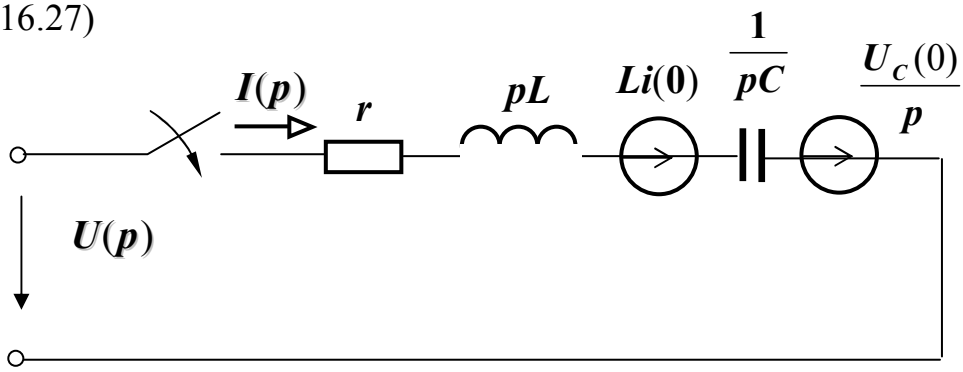


Рисунок 16.27 – Розрахункова схема кола в операторній формі

$$i(t) \doteqdot I(p); \qquad u(t) \doteqdot U(p); \qquad \frac{di}{dt} \doteqdot pI(p) - i(0); \qquad (16.158)$$

$$\frac{1}{C}\int idt = u_C(t) \doteqdot \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Тоді одержимо

$$r \cdot I(p) + p \cdot L \cdot I(p) - L \cdot i(0) + \frac{I(p)}{p \cdot C} + \frac{u_C(0)}{p} = U(p). \qquad (16.159)$$

Звідки

$$I(p) = \frac{U(p) + L \cdot i(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}}{r + p \cdot L + \dfrac{1}{p \cdot C}}. \qquad (16.160)$$

Отримане рівняння подібне закону Ома в операторній формі для перехідного процесу при ненульових початкових умовах. У знаменнику знаходиться операторний опір

$$Z(p) = r + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}. \qquad (16.161)$$

Він може бути визначений з комплексу повного опору синусоїдного струму

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \qquad (16.162)$$

шляхом заміни $j\omega$ на p.

При нульових початкових умовах, тобто при $i(0) = 0$ і $u(0) = 0$, одержимо

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \qquad (16.163)$$

Аналогічно можна записати закони Кірхгофа в операторній формі

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(p) = 0; \qquad (16.164)$$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(p) = \sum_{i}^{n} E_k(p). \qquad (16.165)$$

16.16 Включення пасивного двополюсника на напругу, що безперервно змінюється (формула або інтеграл Дюамеля)

Приймемо, що до джерела напруги $u(t)$ (рисунок 16.28а), що безперервно змінюється, підключається довільний пасивний лінійний

двополюсник (рисунок 16.28б). Треба знайти струм $i(t)$ або напругу в будь якій вітці $u_в(t)$ двополюсника після комутації (включення рубильника).

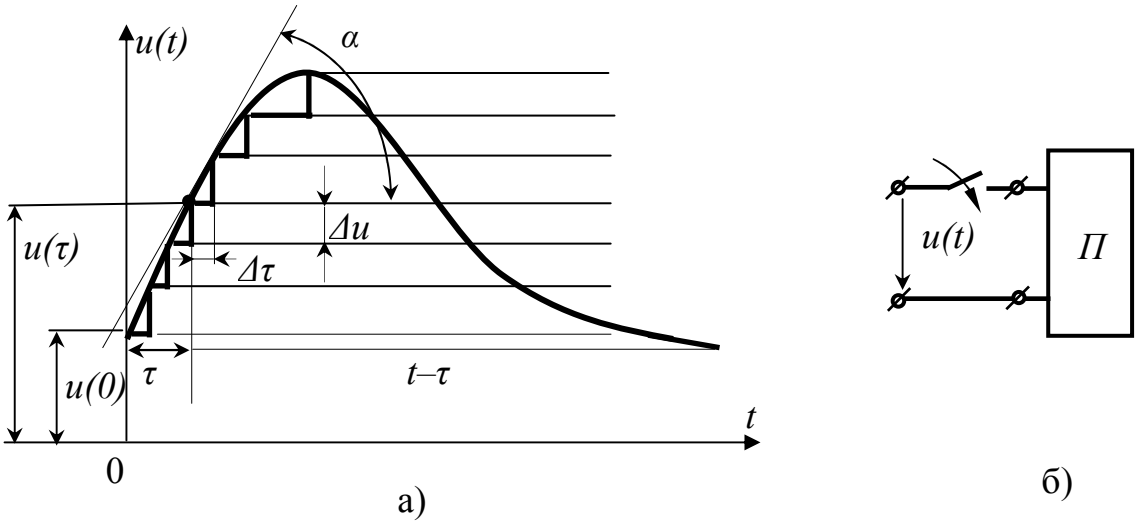


Рисунок 16.28 – Графік безперервно змінної напруги джерела (а) та схема включення двополюсника

Задачу вирішимо в два етапи. Спочатку знайдемо шукану величину на одиничний стрибок напруги, коли включаємо напруга постійна і за величиною рівна одиниці. Ці струм $i_1(t)$ або напруга $u_{1в}(t)$ відобразимо таким чином

$$i_1(t) = 1 \cdot g(t) = g(t)\,, \tag{16.166}$$

$$u_{1в}(t) = 1 \cdot y(t) = y(t), \tag{16.167}$$

де $g(t)$ – перехідна провідність, См;

$y(t)$ – перехідна функція напруги, В.

Обидві функції називають тимчасовими характеристиками і позначаються $h(t)$. Наприклад, для r, L перехідна провідність

$$g(t) = \frac{1}{r}(1 - e^{-\frac{r}{L}\cdot t}), \tag{16.168}$$

а для кола r, C перехідна функція напруги на ємності

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{r\cdot C}\cdot t}. \tag{16.169}$$

Перехідну провідність *g(t)* і перехідну функцію напруги при будь-якій схемі пасивного двополюсника можна знайти класичним методом, або методом інтеграла Фур'є). Таким чином, в подальших розрахунках *g(t)* та *y(t)* будемо вважати відомими.

До включення пасивного двополюсника при $t < 0$ струми і напруги в будь-якій ділянці кола рівні нулю. Тому при $t < 0$ слід вважати будь яку перехідну провідність *g(t)* і перехідну функцію напруги $y(t) = 0$.

Подальші міркування проведемо для випадку, коли потрібно розрахувати струм.

Напругу, що безперервно змінюється *u(t)* замінено ступінчатою функцією з елементарними прямокутними стрибками Δu. Тоді процес зміни напруги можна представити як включення при $t = 0$ постійної напруги $u(0)$, а потім як включення елементарних постійних напруг Δu, зміщених відносно одна до одної на інтервал часу $\Delta\tau$ і таких, що мають знак «плюс» або «мінус», дивлячись на те, розглядається зростаюча або спадаюча вітка заданої кривої напруги.

Складова шуканого струму в момент t від постійної напруги $u(0)$ рівна $u(0)\cdot g(t)$. Складова струму в $t = 0$ від елементарного стрибка напруги Δu, включеного в момент часу τ (рисунок 16. а), дорівнює $\Delta u\cdot g(t-\tau)$. В даному випадку аргументом перехідної провідності слугує час $(t-\tau)$, оскільки елементарний стрибок напруги починає діяти на час τ пізніше включення рубильника, або, інакше кажучи, оскільки проміжок часу τ між моментом початку дії цього стрибка і моментом часу t дорівнює $(t-\tau)$.

Елементарний стрибок напруги Δu може бути виражений наступним чином (рисунок 16.28а)

$$\Delta u \approx \Delta\tau \cdot tg\alpha = \Delta\tau \cdot u'(\tau). \qquad (16.170)$$

Тому шукана складова струму

$$\Delta u\cdot g(t-\tau) = u'(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot(t-\tau). \qquad (16.171)$$

Елементарні стрибки напруги включаються на інтервалі часу від $t = 0$ до моменту t , для якого визначається шуканий струм. Потім, підсумовуючи складові струму від всіх стрибків, переходячи до межі при $\Delta\tau \to 0$ і враховуючи складову струму від початкового стрибка напруги $u(0)$, отримаємо

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t) \cdot dt \,. \tag{16.172}$$

Формула для визначення струму при безперервно змінній прикладеній напрузі зветься формулою або інтегралом Дюамеля або першою формою запису формули Дюамеля.

З теорії визначених інтегралів відомо, що для любих двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ існує співвідношення

$$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau \,, \tag{16.173}$$

яке перевіряється заміною змінної інтегрування.

На основі (16.173) перепишемо рівняння (16.172) і отримаємо другу форму запису формули Дюамеля.

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(t-\tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau \,, \tag{16.174}$$

де $u'(t-\tau)$ – похідна функція $u(t-\tau)$ по її аргументу $(t-\tau)$ або, що теж саме, її похідна по t.

Інтегруючи по частинам у правій частині рівняння (16.172), отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_0^t g(t-\tau) \cdot u'(\tau) \cdot d\tau = \\ &= g(0) \cdot u(t) - g(t) \cdot u(0) + \int_0^t g'(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau \,, \end{aligned} \tag{16.175}$$

де $g'(t-\tau)$ – похідна функція $g(t-\tau)$ по її аргументу $(t-\tau)$ або, що теж саме, її похідна по t. Підставляючи значення отриманого інтеграла у праву частину (16.172), отримаємо третю форму запису формули Дюамеля.

$$i(t) = g(0) \cdot u\,(t) + \int_0^t g'(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau\,. \qquad (16.176)$$

Якщо застосувати формулу (16.173) до інтегралу правої частини останнього рівняння, отримаємо четверту форму запису формули Дюамеля

$$i(t) = g(0) \cdot u\,(t) + \int_0^t g'(\tau) \cdot u(t-\tau) \cdot d\tau\,. \qquad (16.177)$$

Якщо про диференціювати це рівняння,

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau\,. \qquad (16.178)$$

Прийдемо до першої і другої форми Дюамеля є п’ятою формою запису формули Дюамеля.

Шоста форма запису формули Дюамеля

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t u(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \qquad (16.179)$$

при диференціюванні призводить до третьої і четвертої форми.

Ту, чи іншу з отриманих перших чотирьох форм обирають, керуючись зручністю і простотою виконання розрахунків.

Крім того, якщо напруга, що впливає на коло, змінюється з нуля, тобто $u\,(0) = 0$, то перші доданки у першій і другій формах запису формули Дюамеля дорівнюють нулю І їх вирази кілька спрощуються. Якщо у вітках кола, в яких визначається струм і він не може змінитися стрибком, то $g(0) = 0$. При цьому перший доданок у третій і четвертій формах запису формули Дюамеля рівні нулю, тому вони теж кілька спрощуються.

П’ята і шоста форми представляють собою скорочений запис першої або другої і, відповідно, третьої і четвертої.

Приклад 16.6

Електричне коло на рисунку 16.29 має наступні параметри: активні опори r_1 =2 Ом, r_2 = 5 Ом, індуктивність 4 мГн = $4\cdot10^{-3}$ Гн. Форма кривої прикладеної напруги на рисунку 16.30, рівняння прикладеної напруги (рисунок 16.30) $u(t) = 100(1 - \cdot 800 \cdot t)$.

Знайти струм в індуктивності для проміжків часу $0 \le t \le 2{,}5$ мс та $t \ge 2{,}5$ мс.

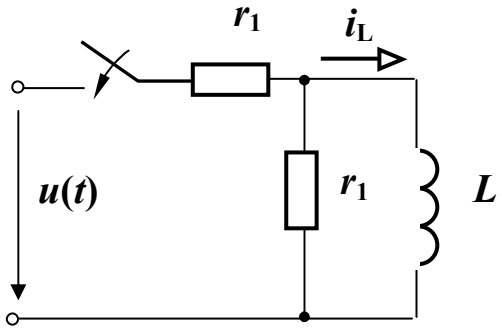


Рисунок 16.29 – Розрахункова схема електричного кола

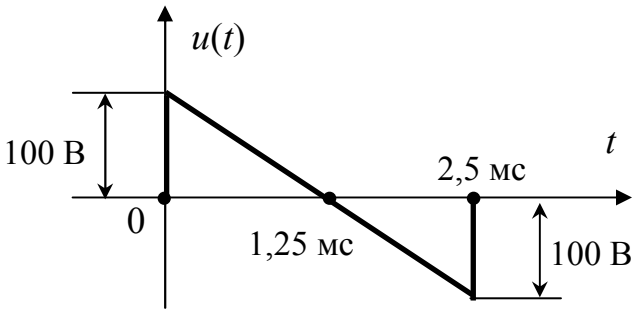


Рисунок 16.30 – Графік зміни напруги

Рішення

1. Визначаємо постійну часу перехідного процесу

$$\tau = \frac{L}{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}}, \quad \tau = \frac{4\cdot10^{-3}}{\frac{2\cdot5}{2+5}} = \frac{1}{357}\ c.$$

2. Визначимо перехідну провідність для вітки з індуктивністю.

$$g(t) = i_{Lnp} + [i_{Lnp}(0-) - i_{Lnp}(0)] \cdot e^{\frac{-t}{\tau}},$$

де i_{Lnp} = 0,5 А; $i_{Lnp}(0) = i_{Lnp}(0-) = 0$ А.

$$g(t) = 0{,}5(1 - \cdot e^{-357\cdot t})\ См.$$

3. Визначимо струм в індуктивності для проміжку часу 0 $t \le 2{,}5$ мс, використавши першу форму запису формули Дюамеля, якщо $u(t) = 100(1 - \cdot 800 \cdot t)$

$$i_L(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t g(t-\tau) \cdot u'(\tau) \cdot d\tau;$$

$$\underline{i_L(t) = 162 - 4 \cdot 10^4 \cdot t - 162 \cdot e^{-357 \cdot t}} \text{ А.}$$

Перевіряємо, що при $t = 0$ $i_L(0) = 0$.

, що

Для цього проміжку записуємо

$$i_L(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} g(t-\tau) \cdot u'(\tau) \cdot d\tau - u(t_1) \cdot g(t - t_1); \qquad \text{(а)}$$

$$\underline{i_L(t) = -11 \cdot e^{-357 \cdot t}} \text{ А.}$$

При $t = t_1 =$ струм i_L змінюватися не повинен. Переконуючись, що $i_L(t_1 - 0) = i_L(t_1 + 0) = -4{,}5$ А. Крива струму i_L наведена на рисунку 16.31.

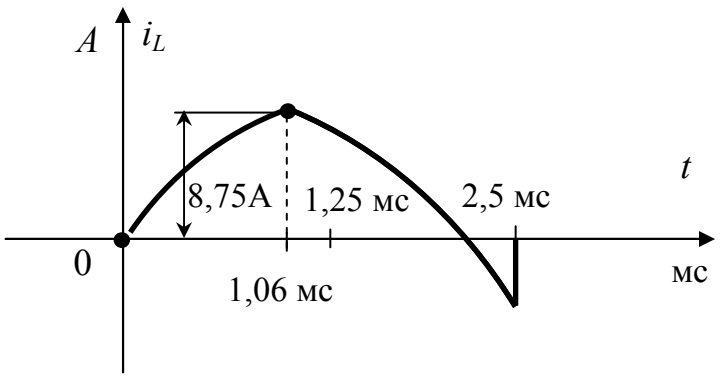


Рисунок 16.31 – Графік зміни струму на індуктивності i_L

Слід зауважити, що спроба застосувати при розрахунках струму $i_L(t)$ у проміжку 2,5 мс $\le t \le \infty$ другу форму запису формули Дюамеля, коли інтеграл

$\int_0^{t_1} g(t-\tau)\cdot u'(\tau)\cdot d\tau$ у правій частині рівняння (а) був би замінений інтегралом $\int_0^{t_1} g(\tau)\cdot u'(t-\tau)\cdot d\tau$, дає невірний результат. Дійсно, з рівняння (16.173) слідує, що ці інтеграли рівні тільки при верхніх границях t. Якщо ж верхня границя рівна t_1, то

$$\int_0^{t_1} g(t-\tau)\cdot u'(\tau)\cdot d\tau = \int_{t-t_1}^{t} g(\tau)\cdot u'(t-\tau)\cdot d\tau,$$

звідкіля і слідує, що для проміжку 2,5 мс $\le t \le \infty$ рівняння струму $i_L(t)$ по другій формі запису формули Дюамеля

$$i_L(t) = u(0)\cdot g(t) + \int_{t-t_1}^{t} g(\tau)\cdot u'(t-\tau)\cdot d\tau - u(t_1)\cdot g(t-t_1).$$

16.17 Включення пасивного двополюсника на напругу будь-якої форми

В подальшому під любою формою напруги будемо розуміти її зміну, що визначається кусочно-аналітичною функцією, тобто функцією, що аналітично задана на кожному кінцевому інтервалі і що має у точках стику інтервалів розриви безперервності першого роду.

Припустимо, що довільний пасивний двополюсник підключається до джерела напруги, крива зміни якого представлена на рисунку 16.32.

Для розрахунку струму визначимо перехідну провідність $g(t)$. Оскільки у проміжку $0 \le t \le t_1$ напруга задана функцією $u_1(t)$, то застосувавши першу форму запису формули Дюамеля (16.172) запишемо для цього проміжку часу

$$i(t) = u_1(0)\cdot g(t) + \int_0^{t} u'(\tau)\cdot g(t-\tau)\cdot d\tau. \qquad (16.180)$$

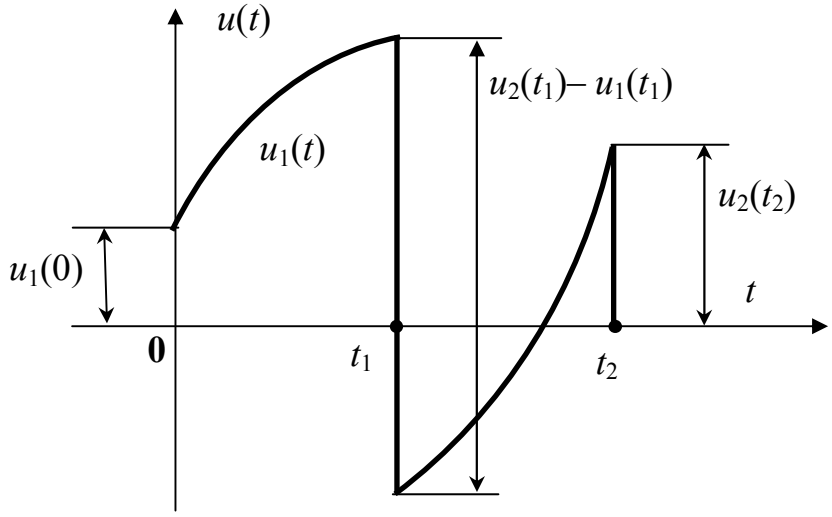


Рисунок 16.32 – Графік зміни напруги за кусочно-аналітичною функцією

У наступному проміжку $t_1 \le t \le t_2$ напруга задана іншою функцією $u_2(t)$, причому в момент t_1 воно змінюється стрибком від величини $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$. З урахуванням стрибка напруги в точці $t = t_1$ будемо вважати, в цей час до двополюсника прикладається негативна постійна напруга, яка дорівнює $u_2(t_1)– u_1(t_1)$. Крім того, якщо врахувати складові струму від початкового стрибка напруги $u_1(0)$ і від елементарних стрибків напруги, що визначаються кривою $u_1(t)$ і діючого від $t = 0$ до $t = t_1$.

Отримає наступне рівняння

$$i(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u'(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau + \qquad (16.181)$$

$$+[u_2(t_1) - u_1(t_1)] \cdot g(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} u_2'(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau .$$

В цьому рівняння у третьому члені аргументом перехідної провідності слугує величина $t - t_1$, оскільки напруга $u_2(t_1)– u_1(t_1)$ включається в момент t_1. Аргумент $t - \tau$ перехідної провідності g в обох ін-

тегралах один і той же, оскільки він має сенс проміжку часу, минулого від включення елементарного стрибка напруги $\Delta u\cdot$ до моменту часу t рисунок 16.28а). Однак, зрозуміле, що межі вимірювання в обох інтегралах різні.

Якщо стрибок струму принципово можливий, то $g \neq 0$. Тоді стрибок напруги в час $t = t_1$ від величини $u_1(t_1)$ до величини $u_2(t_1)$, викличе стрибок струму

$$(\Delta i)_{t=t_1} = [u_2(t_1) - u_1(t_1)] \cdot g(0). \qquad (16.182)$$

Якщо стрибка струму може не бути, то $g(0) = 0$ і по формулі (16.182) в момент часу $t = t_1$ також $(\Delta i)_{t=t_1} = 0$, незважаючи на наявність в цей момент стрибку напруги.

Нарешті, для проміжку часу $t_2 \le t \le \infty$ врахуємо, що в момент $t = t_2$ включається постійна напруга – $u_2(t_2)$ і що елементарні стрибки, які визначаються кривою напруги $u_2(t)$, діють до моменту часу $t = t_2$. Тому

$$i(t) = u_1(0) \cdot g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau + . \qquad (16.183)$$

$$+ [u_2(t_1) - u_1(t)] \cdot g(t - t_1) + \int_0^{t_2} u_2'(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau - u_2(t_2) \cdot g(t - t_2).$$

Розглянемо, нарешті, перехідні процеси при включенні довільного активного двополюсника до напруги любої форми. Знайдемо струм i в будь-якій вітці активного двополюсника (зокрема, і в вітці рубильника). Розрахунок проведемо за принципом накладання. Спочатку будемо вважати двополюсник пасивним, тобто тільки враховуючи напругу $u(t)$, що включається. Розрахунок струму при цьому проведемо за формулою Дюамеля. Потім врахуємо тільки джерела активного двополюсника, тобто знайдемо струм в тій же вітці при замиканні на коротко затискачів джерела напруги $u(t)$. Розрахунок струмів в

цьому випадку виконаємо класичним методом. Підсумовуючи знайдені складові струму, отримаємо шуканий струм.

Зауважимо ще, що при подачі на вхід активного двополюсника ряду імпульсів напруги (рисунок 16.33) розрахунок струмів в любій вітці можна провести за допомогою формули Дюамеля.

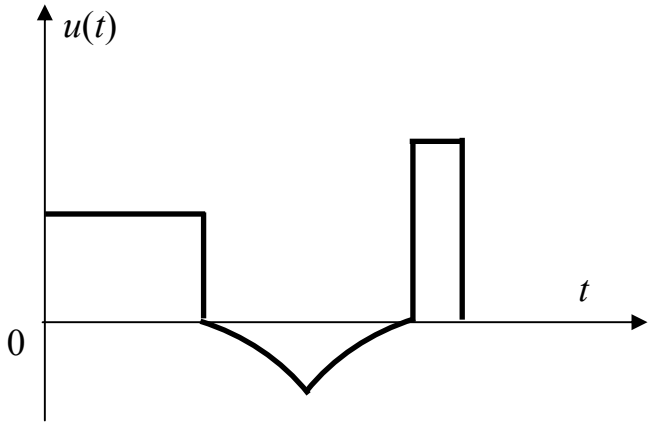


Рисунок 16.33 – Графік зміни напруги будь-якої форми на затискачах активного двополюсника

При дії послідовності прямокутних імпульсів розрахунок можна вести без застосування формули Дюамеля. Для обліку любого прямокутного імпульсу можна вважати, що в момент початку його дії включається постійна напруга, рівна за величиною напрузі імпульсу, а в момент закінчення дії імпульсу включається така ж постійна напруга, але протилежна за знаком.

16.18 Часова та імпульсна перехідні характеристики

В лінійній теорії автоматичного регулювання і в інших дисциплінах часто застосовують поняття часової і імпульсної характеристики будь-якої системи або кола.

Характеристикою за часом, наприклад, чотириполюсника, **називають реакцію напруги або струму на виході при прикладенні до входу одиничного ступінчатого впливу.**

Одиничний стрибок (або одиничне ступінчастий вплив) задається одиничною функцією $1(t)$, що зображена на рисунку 16.33, пред-

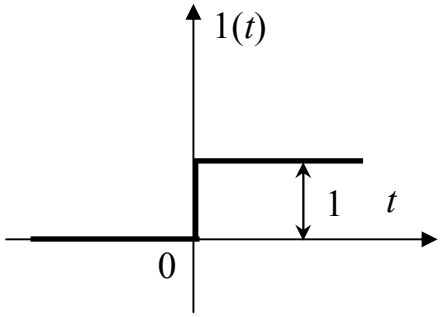


Рисунок 16.34 – Графік одиничної функції $1(t)$

ставляє собою з точки зору теорії електричних кіл одиничну постійну напругу або струм, що включаються на вході кола або системи в момент $t = 0$

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 1 \text{ при } t > 0 \end{cases} \qquad (16.184)$$

Якщо визначається струм, то часова функція $h(t)$ співпадає з перехідною провідністю $g(t)$, тобто

$$h(t) = g(t), \qquad (16.185)$$

а якщо визначається напруга, то вона співпадає з перехідною функцією напруги $y(t)$

$$h(t) = y(t) \qquad (16.186)$$

Поняття часової характеристики, як реакції системи (або вихідної величини, за яку може бути прийнята будь-яка з функцій системи) на одиничне ступінчастий вплив, прикладений до її входу (причому, з вхід системи може бути прийнята будь яка точка, вітка або два її затискача), може бути застосовано не тільки до електричних кіл, але і до

фізичних систем – механічних, пневматичних, гідравлічних електромеханічних тощо.

Часова характеристика введена за двома причинами:

1. Одиничний ступінчастий вплив $1(t)$ – стрибкоподібне і тому доволі тяжке для любої системи зовнішній вплив. Отже, важно знати реакцію системи саме від такого впливу. Інші, наприклад, плавні впливи будуть для системи легше.

2. Якщо визначена характеристика $h(t)$, то за допомогою інтеграла Дюамеля можна визначити реакцію системи при будь-якій формі зовнішніх впливів. Раніше були визначені перехідні процеси в колах r, L і r, C також при гармонічних зовнішніх впливах. Це робилося тому, що гармонічні впливи дуже часто зустрічаються в електротехніці. Але, зрозуміло, що реакції будь-яких кіл на прикладене до їх входу гармонічного зовнішнього впливу можна знайти і по відомим часовим характеристикам $h(t)$ за допомогою інтеграла Дюамеля.

Існує ще один вид зовнішніх впливів, який називається одиничним імпульсом, $\delta(t)$ або функцією Дірака, який визначається як похідна за часом одиничної функції

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}) \qquad (16.187)$$

і представляє собою граничний випадок імпульсу дуже великої величини і дуже малої тривалості. (рисунок 16.35), коли його тривалість прагне до нуля, а площа зберігається рівною одиниці.

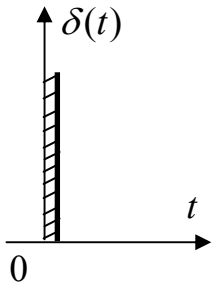


Рисунок 16.35 – Графік граничного випадку функції $\delta(t)$

З теорії узагальнених функцій ці операції достатньо строго обґрунтовані, знайдемо площу одиничного імпульсу

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cdot dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta 1(t)=\cdot 1(t)\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}=1(\infty)-1(-\infty)=1-0=1. \qquad (16.188)$$

Імпульсною перехідною характеристикою системи (наприклад, чотириполюсника) **називається реакція на на виході, якщо до входу прикладений зовнішній вплив у вигляді одиничного імпульсу** $\delta(t)$**.** Цю реакцію позначимо як $k(t)$. Оскільки зовнішні збурення $1(t)$ і $\delta(t)$ пов'язані рівністю (16.187), а також вважаючи, що, вважаючи, що $h(0+)=0$, отримаємо, що подібною рівністю пов'язані і їх реакції на виході системи

$$k(t)=\frac{dh(t)}{dt}. \qquad (16.189)$$

В справедливості (16.189) можна переконатися безпосередньо, розрахувавши $h(t),k(t),\frac{dh(t)}{dt}$, що особливо зручно зробити операторним методом. Якщо ж $h(0+)\neq 0$, то співвідношення (16.189) узагальнюється

$$k(t)=\frac{dh(t)}{dt}+h(0+)\cdot\delta(t). \qquad (16.190)$$

Наприклад, якщо при включенні кола r,C на одиничний імпульс в якості вихідної величини розглядається струм, то

$$i(t)=h(t)=\frac{1}{r}\cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \text{та} \quad h(0+)=\frac{1}{r}. \qquad (16.191)$$

Оскільки при $t=0$ в складі прикладеної напруги є дельта-функція і в цей момент за другим законом комутації $u_C(0+)=0$, то дельта-функція повинна бути і в складі струму, що і пояснює наявність другого доданка в правій частині (16.190).

В задачах теорії автоматичного керування буває необхідно знати імпульсну перехідну характеристику $k(t)$. Вона введена за тими ж двома причинами, що і $h(t)$:

1. Одиничний імпульс – стрибкоподібне і тому доволі важке збудження для системи або кола; воно важче, ніж плавне збудження. Відповідно, треба знати реакцію системи або кола на це збудження.

2.За допомогою деякого видозмінення інтеграла Дюамеля можна, якщо знаєш $k(t)$, визначити реакцію системи або кола на будь-яке зовнішнє збудження.

Реалізацію зовнішнього впливу у вигляді одиничного імпульсу $\delta(t)$ за звичай представляють як експоненціальний вплив з дуже більшою начальною ординатою (U_0) і дуже малою постійною часу τ

$$\delta(t) = \lim_{\substack{U_0 \to \infty \\ \tau \to 0}} U_0 \cdot \tau = 1 \tag{16.192}$$

де $U_0 \cdot \tau$ – площина, що обмежена експоненціальним імпульсом, тобто

$$\lim \int_0^{\infty} U_0 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \cdot dt = U_0 \cdot \tau \tag{16.193}$$

Зауважимо, що якщо в теорії електричних кіл типовими зовнішніми впливами є ступінчастий і гармонічний, то в інших дисциплінах – одиничне ступінчасте $1(t)$, одиничний імпульс $\delta(t)$ та гармонічний зовнішній вплив.

16.19 Перехідні процеси при стрибках струмів в індуктивностях

До сих пір розглядалися такі кола і режими їх роботи, для яких задовольнялись закони комутації

$$i_L(0-) = i_L(0+); \quad u_C(0-) = u_C(0+), \tag{16.194}$$

де $t = (0-)$ момент часу безпосередньо перед комутацією;

$t = (0+)$ – в момент часу відразу після комутації.

Тепер розглянемо такі кола і їх режими, для яких закони комутації не дотримуються, і перш за все процеси при відключенні віток в деяких колах з індуктивностями. Наприклад, нехай в колі, що живиться від джерела постійної ЕРС з напругою U (рисунок 16.36), миттєво відмикається вітка з опором r_3.

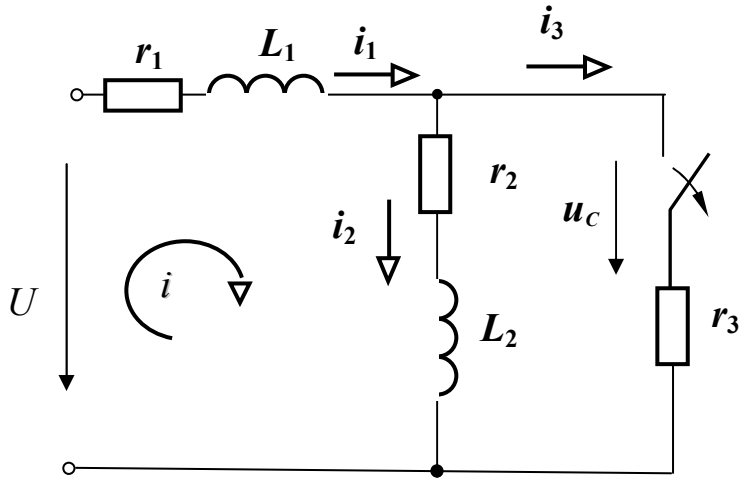


Рисунок 16.36 – Розрахункова схема електричного кола

Струми у всіх вітках безпосередньо перед комутацією $i_1(0–)$, $i_2(0–)$ та $i_3(0–)$ визначаються доволі легко. Після комутації струм i в контурі, що складений з r_1, L_1 першої і r_2, L_2 другої віток може бути визначений з диференціального рівняння

$$(r_1 + r_2) \cdot i + (L_1 + L_2) \cdot \frac{di}{dn} = U, \qquad (16.195)$$

рішення якого відомо

$$i = i_{пр} + A \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}, \qquad (16.196)$$

де постійна часу $\tau = \dfrac{(L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)}$.

Для визначення постійної інтегрування А не можливо скористатися першою з формул (16.191), оскільки до відключення вітки з опором r_3 струми

$$i_1(0-) = \frac{U \cdot (r_2 + r_3)}{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3},$$

$$i_2(0-) = \frac{U \cdot r_3}{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3}$$

були різні, а після її відключення вони, вочевидь, однакові, і, зокрема, в перший момент після комутації $i_1(0+) = i_2(0+) = i(0+)$. Значить, струми i_1 та i_2 в момент відключення рубильника повинні змінитися стрибком, що призведе до виникнення нескінченно великих напруг на індуктивностях. Але оскільки струми на всіх вітках схеми визначені величини, то для проміжку комутації (від $t = 0-$ до $t = 0+$) алгебраїчна сума нескінченно великих напруга індуктивностях і напруг на опорах повинна врівноважитися прикладеною напругою U

$$u_{L1} + u_{L2} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = U - i(r_1 + r_2) \text{ при } 0 \le t \le 0+.$$

Інтегруючи це рівняння за проміжком комутації, тобто від $t = 0-$ до $t = 0+$, і враховуючи, що з огляду визначеності правої частини при $t = 0$ і прагнення проміжку інтегрування до нуля інтеграл від правої частини рівний нулю, отримаємо

$$L_1 \cdot \int_{t=0-}^{t=0+} \frac{di_1}{dt} \cdot dt = L_1 \cdot \int_{i_1=0-}^{i_1=0+} \cdot dt_1 = -L_2 \cdot \int_{t=0-}^{t=0+} \frac{di_2}{dt} \cdot dt = -L_1 \cdot \int_{i_2=0-}^{i_2=0+} \cdot dt_{21}. \quad (16.197)$$

.

Перепишемо (16.197) наступним чином

$$\begin{aligned} &L_1 \cdot [i_1(0+) - i_1(0-)] = L_1 \cdot [i(0+) - i_1(0-)] = \\ &= L_2 \cdot [i_2(0+) - i_2(0-)] = L_2 \cdot [i(0+) - i_2(0-)] \end{aligned}, \quad (16.198)$$

або

$$L_1 \cdot \Delta i_1 + L_2 \cdot \Delta i_2) = 0 \text{ або } \Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_2 = 0 \quad (16.199)$$

або

$$(L_1 + L_1) \cdot i(0+) =] = L_1 \cdot i_1(0-) + L_2 \cdot i_2(0-) \ . \tag{16.200}$$

З рівняння (16.200) слід наступне, що потокозчеплення контуру Ψ, який складається з першого і другого котушок (інакше кажучи, сума потокозчеплень з з обома котушками), до і після відключення вітки осталося незмінним

$$\Psi(0+) = (L_1 + L_1) \cdot i(0+) = \Psi(0-) = L_1 \cdot i_1(0-) + L_2 \cdot i_2(0-) . \tag{16.201}$$

З (16.201) знаходимо

$$i(0+) = \frac{L_1 \cdot i_1(0-) + L_2 \cdot i_2(0-)}{L_1 + L_2}, \tag{16.202}$$

далі з (16.196) визначимо постійну інтегрування струму

$$A = \frac{U \cdot (L_1 \cdot r_1 - L_2 \cdot r_2}{(r_1 + r_2) \cdot (L_1 + L_2) \cdot (r_1 \cdot r_2 + r_3 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3)}. \tag{16.203}$$

Слід мати на увазі, що нескінченно великі напруги на котушках $u_{L_1}(0+)$ та $u_{L_2}(0+)$ протилежних знаків (рисунок 16.37 побудований у припущенні, що A>0) з'явилися внаслідок припущення про те, що комутація сталася за нескінченно малу тривалість: за нескінченно малий проміжок часу $\Delta t \to 0$.

Ці імпульси напруги мають нескінченно малу тривалість. Але інтеграли від цих імпульсів (16.197) мають кінцеві значення і рівні приростам $\Delta\Psi_1$ та $\Delta\Psi_2$ потокозчеплень кожної з котушок. На том же рисунку 16.37 показано, що струми в котушках при $t = 0$ змінюються стрибком і струм *i*, що тече в обох котушках після відключення вітки з опором r_3, змінюється у відповідності з постійної часу τ і прагне до величини $i(\infty) = \frac{U}{(r_1 + r_2)}$.

Підкреслимо, що різниця енергій, що запасені в магнітних полях обох котушок до комутації,

$$W(0-)=\frac{L_1\cdot i_1{}^2(0-)}{2}+\frac{L_2\cdot i_2{}^2(0-)}{2},\qquad(16.204)$$

і після комутації

$$W(0+)=(L_1+L_2)\cdot\frac{i^2(0+)}{2},\qquad(16.205)$$

тобто позитивна

$$\Delta W=W(0-)-W(0+)=\cdot\frac{L_1\cdot L_2\cdot r_2^2}{2\cdot(L_1+L_2)\cdot(r_1\cdot r_2+r_2\cdot r_3+r_1\cdot r_3)^2}\cdot U^2,\qquad(16.206)$$

і витрачається на виділення тепла в опорі іскри і дуги, яка появиться між контактами вимикача, і на можливе тут випромінювання.

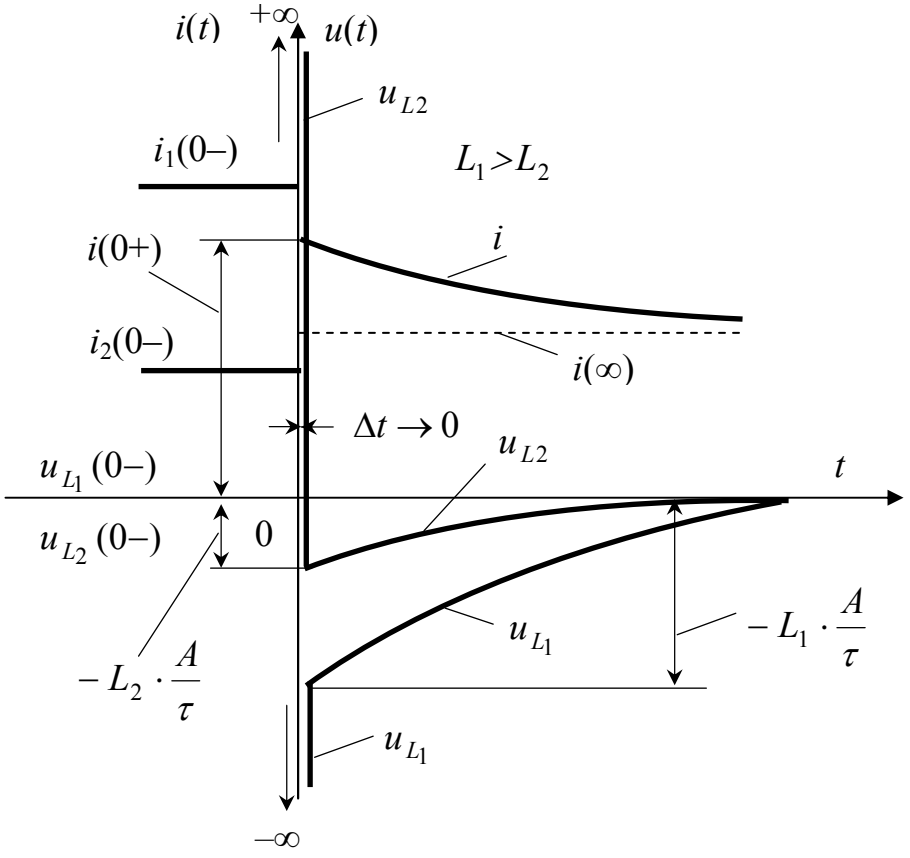


Рисунок 16.37 – Графіки зміни напруг і струмів

При рішенні задачи була прийнята ідеалізація процесу виключення, тобто миттєва комутація. Насправді вона проходить хоча і вельми швидко, але за кінцевий час Δt. При цьому в опорі іскри, що

виникає між контактами електричного вимикача, і витрачається частина енергії ΔW. Крім того, котушки L_1 та L_2 мають розподілену ємність між витками і між контактами вимикача, що розходяться, теж існує ємність, що призводить до появи складного коливального контуру, який може випромінювати енергію (на високій частоті), на що витрачається друга частина енергії ΔW. Якщо врахувати всі ці процеси, то ніяких нескінченно великих напруг на котушках не виникне і струми в них не будуть змінюватися стрибком, тобто будуть справедливі закони комутації.

Цікаво відмітити, при урахуванні опорів котушок закон комутації для струмів *виходить з більш загального закону про незмінність в момент комутації потокозчеплень контурів*. Покажемо це на прикладі схеми рисунку 16.38.

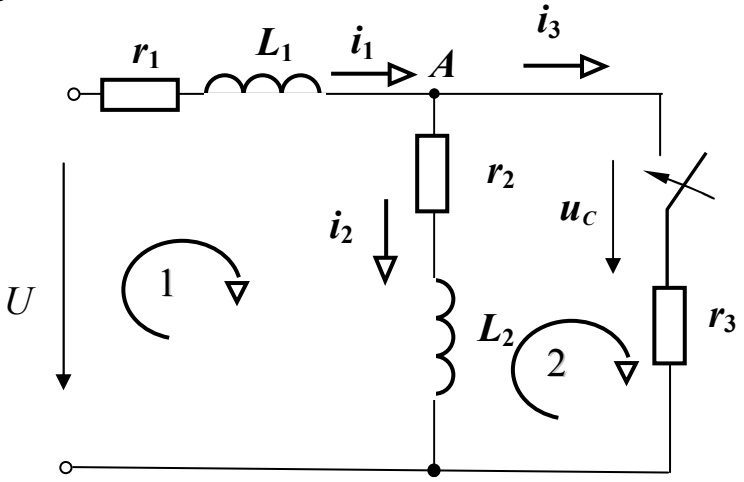


Рисунок 16.38 – Розрахункова схема електричного кола прикладу

Струми до комутації

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{U}{r_1 + r_2}; \qquad i_3(0-) = i(0) \ . \qquad (16.207)$$

Потокозчеплення першого контуру

а) до комутації

$$\Psi_{11}(0-) = L_1 \cdot i_1(0-) + L_2 \cdot i_2(0-) = (L_1 + L_2) \cdot \frac{U}{(r_1 + r_2)}; \qquad (16.208)$$

б) в момент комутації

$$\Psi_{11}(0+) = L_1 \cdot i_1(0+) + L_2 \cdot i_2(0+). \qquad (16.209)$$

Прирівнюючи їх, отримуємо

$$\Psi_{11}(0-) = \Psi_{11}(0+) = L_1 \cdot i_1(0+) + L_2 \cdot i_2(0+) = (L_1 + L_2) \cdot \frac{U}{(r_1 + r_2)}. \quad (16.210)$$

Потокозчеплення другого контуру

а) до комутації

$$\Psi_{22}(0-) = -L_2 \cdot i_2(0-) + L_3 \cdot i_3(0-) = -L_2 \cdot \frac{U}{(r_1 + r_2)}; \qquad (16.211)$$

б) в момент комутації

$$\Psi_{22}(0+) = -L_2 \cdot i_2(0+) + L_3 \cdot i_3(0+). \qquad (16.212)$$

Прирівняємо їх і отримаємо

$$\Psi_{22}(0-) = \Psi_{22}(0+) = -L_2 \cdot i_2(0+) + L_3 \cdot i_3(0+) = -L_2 \cdot \frac{U}{(r_1 + r_2)}. \quad (16.213)$$

За першим законом Кірхгофа для вузла А в момент комутації

$$i_1(0+) = i_2(0+) + i_3(0+). \qquad (16.214)$$

Вирішуємо одночасно рівняння (16.210), (16.212) і (16.214) відносно струмів $i_1(0+)$, $i_2(0+)$ і $i_3(0+)$

$$i_1(0+) = i_2(0+) = \frac{U}{(r_1 + r_2)}; \quad i_3(0+) = 0. \qquad (16.215)$$

Якщо врахувати (16.207), отримаємо

$$i_1(0+) = i_1(0-); \; i_2(0+) = i_2(0-) \; i_3(0+) = i_3(0-), \qquad (16.216)$$

тобто самі ті співвідношення, які дав би перший закон комутації.

Розуміючи під потокозчепленням контуру алгебраїчну суму потокозчеплень всіх котушок, що входять в нього, перший закон комутації будемо формулювати як узагальнений перший закон комутації: **потокозчеплення будь-якого замкненого контуру в момент кому-**

тації ($t = 0+$) дорівнює алгебраїчній сумі потокозчеплень всіх котушок, що входять в нього, які вони мали безпосередньо до комутації ($t = 0-$). Деякі з цих котушок перед комутацією могли єдиного замкнутого контуру і не складати, а створили його лише після комутації.

Контрольні запитання

1. Що розуміється під перехідними процесами?
2. Що розуміється під комутацією?
3. Сформулюйте перший закон комутації.
4. Сформулюйте 2-й закон комутації.
5. Складіть розрахункову схему перехідного процесу при послідовному з'єднанні елементів кола: активного опору, індуктивності і ємності.
6. Запишіть рівняння рівноваги кола в післякомутаційний період для будь-якого моменту часу.
7. Запишіть рівняння рівноваги кола в післякомутаційний період в усталеному режимі.
8. Запишіть рівняння рівноваги кола для вільної складової струму.
9. Сформулюйте класичний метод дослідження перехідних процесів.
10. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу підключення котушки до джерела постійної ЕРС.
11. Складіть диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період при підключенні котушки до джерела постійної ЕРС.
12. Як розрахувати постійну часу зазначеного перехідного процесу?
13. Складіть характеристичне рівняння отриманого диференціального рівняння при підключенні котушки до джерела постійної ЕРС.
14. Як визначити корінь диференціального рівняння при підключенні котушки до джерела постійної ЕРС?

15. Як визначити примушену складову струму?
16. Як визначити вільну складову струму?
17. Як визначити постійну інтегрування, записавши початкові умови.
18. Як визначити рівняння перехідного струму.
19. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу короткого замикання котушки, підключеної до джерела постійної ЕРС.
20. Складіть диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період перехідного процесу короткого замикання котушки.
21. Як розрахувати постійну часу перехідного процесу короткого замикання котушки?
22. Складіть характеристичне рівняння перехідного процесу короткого замикання котушки.
23. Як визначити корінь диференціального рівняння?
24. Чому дорівнює примушена складова струму?
25. Як визначити постійну інтегрування струму перехідного процесу короткого замикання котушки, записавши початкові умови.
26. Як визначається рівняння перехідного струму перехідного процесу короткого замикання котушки?
27. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС.
28. Складіть диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС.
29. Як розрахувати постійну часу зазначеного перехідного процесу?
30. Яке характеристичне рівняння для кола заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС?

31. Як визначити корінь диференціального рівняння для кола заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС?
32. Як записується примушену складову напруги на ємності?
33. Як визначити постійну інтегрування напруги на ємності для кола заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС, записавши початкові умови?
34. Як визначити рівняння перехідної напруги на ємності для кола заряджання конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС?
35. Який вигляд має рівняння перехідного струму в колі при заряджанні конденсатора через резистор від джерела постійної ЕРС
36. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС.
37. Складіть диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період для перехідного процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС.
38. Як розрахувати постійну часу зазначеного перехідного процесу?
39. Як визначити корінь характеристичного рівняння для перехідного процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС?
40. Як визначити примушену складову напруги на ємності процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС?
41. Як визначите постійну інтегрування для розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС?
42. Як записується рівняння напруги на ємності для процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС?

43. Як записується рівняння струму в колі для процесу розрядки конденсатора через резистор, підключених до джерела постійної ЕРС?
44. Складіть розрахункову схему для дослідження процесу підключення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора до джерела постійної ЕРС.
45. Складіть диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період перехідного процесу підключення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора до джерела постійної ЕРС.
46. Перетворіть диференціальне рівняння (пункт 46), прийнявши позначення $2\alpha = \frac{r}{L}; \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$.
47. Складіть характеристичне рівняння отриманого диференціального рівняння.
48. Як визначити корені характеристичного рівняння для випадку, якщо $\alpha > \omega_0$?
49. Як визначити примушену складову струму перехідного процесу підключення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора до джерела постійної ЕРС?
50. Яке рівняння вільної складової струму перехідного процесу підключення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора до джерела постійної ЕРС для випадку, якщо $\alpha > \omega_0$?
51. Запишіть вираз перехідного струму для випадку, якщо $\alpha > \omega_0$.
52. Який вигляд графіку перехідного струму для випадку $\alpha > \omega_0$?
53. Як визначити корені характеристичного рівняння у випадку $\alpha < \omega_0$?
54. Запишіть вираз перехідного струму для випадку, якщо $\alpha < \omega_0$.
55. Який вигляд графіку перехідного струму для випадку $\alpha < \omega_0$?
56. Визначити корені характеристичного рівняння у випадку $\alpha = \omega_0$.

57. Запишіть вираз перехідного струму для випадку, якщо $\alpha = \omega_0$.
58. Який вигляд графіку перехідного струму для випадку $\alpha = \omega_0$?
59. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу розрядки конденсатора, підключеного до джерела постійної ЕРС, на котушку.
60. Як розрахувати постійну часу зазначеного перехідного процесу (пункт 59)?
61. Який вираз періоду власних коливань (пункт 59)?
62. Складіть розрахункову схему для дослідження перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС.
63. Складіть диференціальне рівняння кола період перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС.
64. Як розрахувати постійну часу зазначеного перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
65. Як визначити корінь характеристичного рівняння перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
66. Як визначити примушену складову струму перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
67. Яке рівняння вільної складової струму перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
68. Як визначити постійну інтегрування, записавши початкові умови перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
69. Яке рівняння перехідного струму перехідного процесу підключення котушки до джерела гармонійної ЕРС?
70. Яке диференціальне рівняння кола в післякомутаційний період перехідного процесу заряджання конденсатора через резистор, підключених до джерела гармонійної ЕРС?

ТЕМА 17
КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

17.1 Загальні відомості

У попередніх розділах розглядалися лінії і електричні кола (рисунок 17.1) з зосередженими параметрами, тобто передбачалося, що електричне коло представляє собою сукупність деяких самостійно існуючих елементів r, L і C, зосереджених в різних його точках. Напруга і струми цих елементів зв'язуються відомими співвідношенням:

$$u_r = r \cdot i\,; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \qquad i = C \cdot \frac{du_C}{dt}; \qquad u_C = \frac{1}{c} \cdot \int i \cdot dt\,.$$

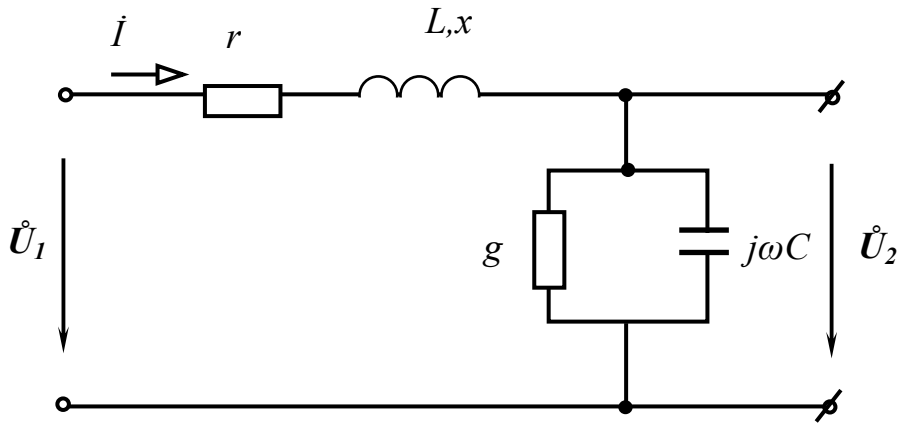


Рисунок. 17.1 Схема заміщення ЛЕП с зосередженими параметрами

В лінії невеликої довжини, при частоті 50 Гц і напругах до 35 кВ можна знехтувати струмами, зумовленими ємністю між проводами (струмами зміщення) і провідністю ізоляції (струмами витоку через гірлянди ізоляторів і струмами, зумовленими коронним електричним зарядом поблизу поверхні проводів). Вони застосовуються лише до ділянок нескінченно малої довжини.

Наведені вище рівняння засновані на припущенні, що струм, що входить в кожен з цих елементів, дорівнює струму, який виходить з

нього. Вирішення цих рівнянь дає закон зміни досліджуваної електричної величини, в залежності від часу, але не від координати довжини, яка в ці рівняння не входить. При великих напругах, що зустрічаються в електроенергетиці, і при великих частотах з якими має справу електрозв'язок, а також при значній довжині ліній нехтувати струмами зміщення і струмами витоку неприпустимо. Отже, струм в проводах не однаковий у різних точках лінії. Струм в проводах лінії викликає падіння напруга в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, яке в свою чергу наводить уздовж всієї лінії ЕРС самоіндукції. Тому напруга між проводами також не залишається постійним уздовж лінії.

Щоб врахувати зміну струму і напруги вздовж лінії, потрібно вважати, що кожен як завгодно малий елемент лінії володіє опором і індуктивністю, а між провідниками – провідністю та ємністю, тобто розглядати лінію як коло з розподіленими параметрами. Таку лінію називають довгою. Довгу лінію вважають **однорідною**, якщо активний опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподіленими вздовж лінії.

17.2 Диференціальні рівняння однорідних ліній

Довгу лінію (рисунок 17.2) можна представити у вигляді безлічі сполучених в коло нескінченно малих елементів довжиною dx, кожен з яких має активний опір – $r_o dx$, індуктивність – $L_o dx$, провідність – $g_o dx$ і ємність – $C_o dx$. Приймаються опір $r_o dx$ і індуктивність $L_o dx$ включеними в один провід. Складемо диференціальні рівняння, яким задовольняють струми і напруги в будь-якому перетині двопровідної лінії.

Нехай відомі **первинні параметри** однорідної лінії, віднесення до одиниці довжини: r_0 – активний опір прямого і зворотного прово-

дів, *Ом/км*; L_0 – індуктивність кола, що утворена прямим і зворотним проводами, *Гн/км*; g_0 – активна провідність між проводами, *См/км*; C_0 – ємність між проводами, *Ф/км*;

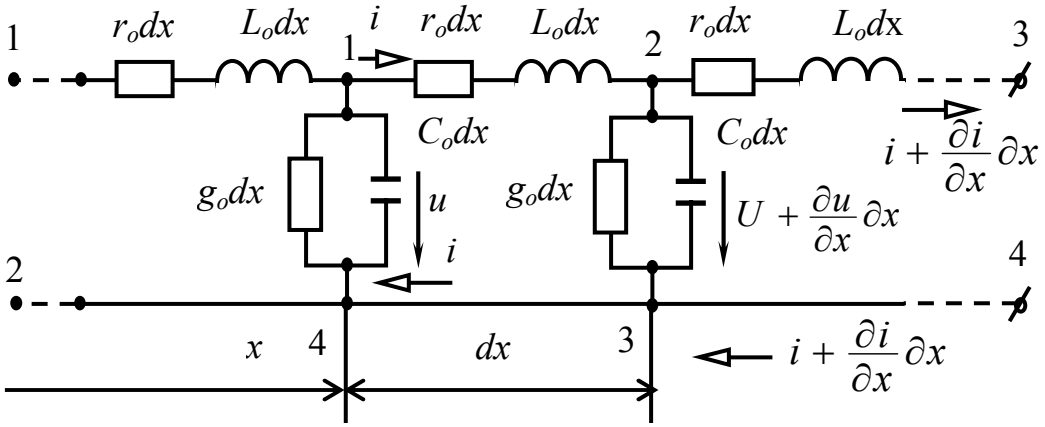


Рисунок 17.2 – Схема заміщення ЛЕП з розподіленими параметрами

Позначимо через x відстань від початку лінії до поточного елемента її довжини. Напруга і струм лінії є функціями двох незалежних змінних: просторової координати x, що визначає місце спостереження, і часу t, що визначає момент спостереження. Передбачається, що напрямок координатної осі x збігається з напрямком осі лінії.

Зважаючи на наявність двох незалежних змінних (x і t) рівняння записуються в приватних похідних. Миттєві значення напруги і струму на початку вибраного елемента лінії dx позначимо через i і u, на початку наступного - через $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ і $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. На підставі законів Кірхгофа для елемента лінії довжиною dx можна записати наступні рівняння

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) = r_o \cdot dx \cdot i + L_o \cdot dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \qquad (17.1)$$

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx \right) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) g_o \cdot dx + C_o \cdot dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) \qquad (17.2)$$

Наводячи подібні члени і скорочуючи на *dx*, легко отримати наступні диференціальні рівняння – **рівняння довгої лінії**

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_o \cdot i + L_o \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \qquad (17.3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (17.4)$$

Початковими умовами будуть значення напруги і струму на початку або кінці лінії в момент часу, прийнятий за нуль.

Граничні умови визначаються зв'язками між напругою і струмом на початку або в кінці лінії, залежними від заданого режиму роботи лінії.

17.3 Сталий режим однорідної лінії

Розглянемо сталий режим у довгій лінії при синусоїдній напрузі джерела живлення.

Перепишемо рівняння (17.3) і (17.4) для сталого режиму, вводячи комплексні напруги, струми, опори і провідності:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r_0 + j\omega L_0)\,\dot{I} = Z_0\,\dot{I}\,, \qquad (17.5)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (g_0 + j\omega C_0)\,\dot{U} = Y_0\,\dot{U}\,. \qquad (17.6)$$

де $Z_0 = r_0 + j\omega L_0$ – поздовжній комплексний опір; Ом;

$Y_0 = g_0 + j\omega C_0$ – поперечна комплексна провідність одиниці лінії, См;

$Y_0 \neq \frac{1}{Z_0}$.

Продиференціюємо рівняння (17.5) и (17.6) і замінимо $\frac{d\dot{I}}{dx}$ і $\frac{d\dot{U}}{dx}$ їх значеннями, згідно (17.5) і (17.6).Отримаємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{d_2\dot{U}}{dx^2} &= Z_0 \cdot Y_0 \cdot \dot{U}\,, \\ \frac{d_2\dot{I}}{d^2x} &= Z_0\ Y_0\ \ \dot{I}\ . \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(17.7) \\ &(17.8) \end{aligned}$$

Диференціальні рівняння (17.7) і (17.8), визначаючі зміни комплексних напруги і струму вздовж лінії, однакові. Тому достатньо знайти закон зміни напруги $\mathring{U}$, а струм можна отримати з рівняння (17.5). Рішення лінійного диференціального рівняння другого порядку (17.7) з постійними коефіцієнтами має вигляд:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}\,, \qquad (17.9)$$

де γ – корінь характеристичного рівняння або постійна поширення,

$\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ - постійні інтегрування (комплексні числа)

$\dot{U}$ - комплексна напруга в лінії на відстані *x* від її початку.

Вираз для комплексного струму $\dot{I}$ визначаємо з рівняння (17.5)

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0}\cdot\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0}\,(\dot{A}_1\cdot e^{-\gamma x} - \dot{A}_2\cdot e^{\gamma x}) = \frac{\dot{A}_1\cdot e^{-\gamma x} - \dot{A}_2\cdot e^{\gamma x}}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}}. \qquad (17.10)$$

Знаменник рівняння (17.10) називають хвильовим опором лінії

$$Z_C = z_C e^{j\theta} = r_C + jx_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{y_0}}e^{j\theta}\,, \qquad (17.11)$$

де $\theta = \frac{1}{2}\cdot arctg\frac{\omega(g_0\cdot L_0 - r_0\cdot C_0)}{r_0\cdot g_0 + \omega^2\cdot L_0\cdot C_0}$.

Хвильовий опір лінії постійному струму

$$Z = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{r^2} = r. \qquad (17.12)$$

Підставляючи Z_C (17.12) в формулу (17.11), отримаємо

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_C} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_C}\ e^{\gamma x}. \qquad (17.13)$$

Таким чином, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{A}e^{-\gamma x} + \dot{A}e^{-x}, && (17.14)\\ \dot{I} &= \frac{\dot{A}_1}{Z_C} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_C}\ e^{\gamma x}\ . && (17.15) \end{aligned}\right\}$$

Величини γ, α, β и Z_C називаються **вторинними** або **хвильовими параметрами** лінії.

Для визначення постійних інтегрування $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ підставимо в (17.14) и (17.15) граничні значення $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_2$ на початку лінії. Вирішуючи спільно ці рівняння, знайдемо постійні інтегрування

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\dot{U}_1 + Z_c \cdot \dot{I}_1\right), && (17.16)\\ \dot{A}_2 &= \frac{1}{2}\left(\dot{U}_1 - Z_c \cdot I_1\right). && (17.17) \end{aligned}\right\}$$

Підставимо значення постійних інтегрування (17.16), (17.17) у (17.14), (17.15) і після перетворення рівнянь отримаємо

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1\, ch\, \gamma x - Z_C\, \dot{I}_1\, sh\, \gamma x\ , && (17.18)\\ \dot{I} &= \dot{I}_1\, ch\, \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_C}\ sh\, \gamma x. && (17.19) \end{aligned}\right\}$$

де $\dot{U}$ і $\dot{I}$ – комплексні діючі значення напруги і струму на відстані x від кінця лінії;

ch, *sh* – гіперболічний косинус і синус відповідно;

Z_c – хвильовий або характеристичний опір лінії;

γ – коефіцієнт розповсюдження.

$$\gamma = \alpha + j\beta\,, \qquad (17.20)$$

де α – коефіцієнт загасання, Нп (Непер). В лінії без втрат α =0;

β – коефіцієнт фази, рад.

Користуючись цими рівняннями, можна отримати напруга і струм в будь-якій точці лінії по заданих параметрах лінії і відомим значенням $\dot{U}_1$ і $\dot{I}_1$ на початку лінії.

17.4 Хвилі в лінії при сталому режимі

Для отримання рівнянь, що визначають миттєві значення напруги та струму в будь-якій точці лінії, всі комплексні величини, що входять в рівняння (9) і (10) необхідно надати у показовій формі. Комплекси $\dot{A}_1$ і $\dot{A}_2$, що мають розмірність напруги, можна записати у вигляді $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1}$ і $\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\Psi_2}$. Характеристичний опір Z_C представити у показовій формі (17.11).

Тоді вирази миттєвих значень напруги та струму

$$u = \sqrt{2}\ A_1 e^{-\alpha l} \sin(\omega t+\psi_1 -\beta x) + \sqrt{2}\ A_2 e^{\alpha l} \sin(\omega t+\psi_2 + \beta x), \qquad (17.20)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{z_C}\ A_1 e^{-\alpha l} \sin(\omega t+\psi_1 - \vartheta - \beta x - \frac{\sqrt{2}}{z_C} A_2 e^{\alpha l} \sin(\omega t+\psi_2 - \vartheta + \qquad (17.21)$$

$$+\beta x).$$

Перші доданки в правій частині отриманих виразів характеризують **біжучі хвилі** напруги і струму, що рухаються в напрямку зростання координати x і затухають у напрямку руху (рисунок 17.3).

Величина α, характеризує зміна амплітуди хвилі на одиницю довжини лінії і називається **коефіцієнтом загасання**. Величина β рівна зміні фази на одиницю довжини лінії, називається **коефіцієнтом фази.**

Другий доданок – відбита хвиля.

Якщо опір навантаження в кінці лінії дорівнює хвильовому ($Z_н = Z_c$) відбита хвиля відсутня, і в лінії встановлюється режим біжу-

чої хвилі, яка подає енергію від джерела до навантаження. При цьому в лінії без втрат потужність джерела буде тільки активною і рівною потужності приймача. Такий режим роботи довгої лінії називають режимом узгодженого навантаження.

Якщо опір навантаження рівний 0; ∞ або носить тільки реактивний характер, в лінії виникає режим **стоячої хвили**. Передачі енергії від джерела до навантаження не відбувається.

Змішаний режим – коли в лінії є хвилі, що біжать, і стоячі хвилі. Цей режим виникає, коли навантаження носить комплексний характер. У змішаному режимі передається у навантаження мала частка енергії джерела живлення.

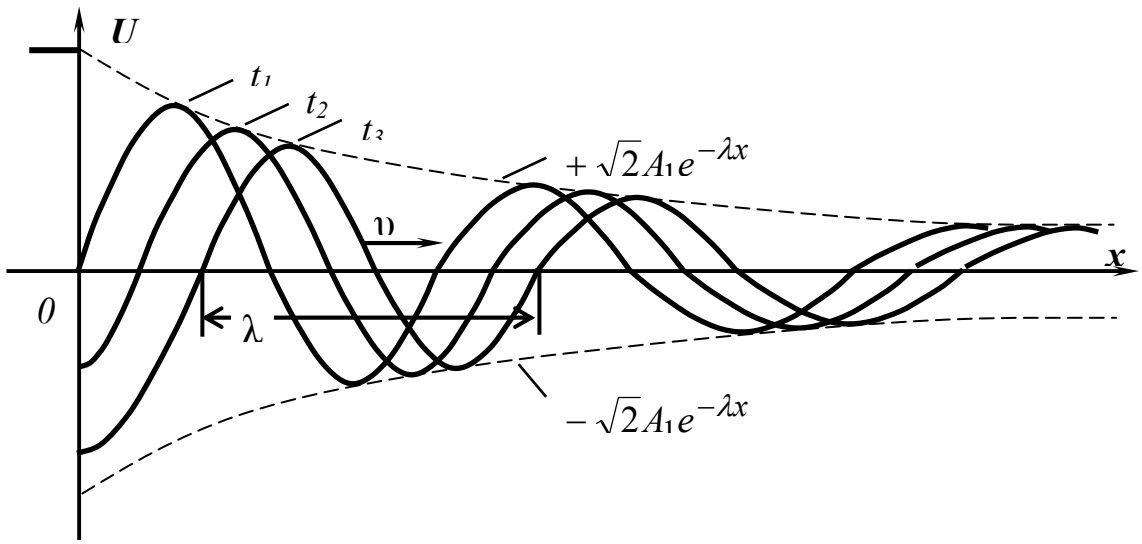


Рисунок 17. 3 – Графіки біжучих загасаючих хвиль напруги і струму

Хвилі, що поширюються вздовж лінії від джерела до приймача в напрямку збільшення координати *x*, називають **прямими (падаючими)**, а хвилі, що поширюються в зворотному напрямку, - **зворотними (відбитими)**.

Характерною величиною біжучої хвилі є її довжина λ, яка визначається відстанню між найближчими двома точками, взятими в напрямку поширення хвилі, з фазами коливання, що відрізняються на

2π. Лінії, фізична довжина яких порівнянна з довжиною хвилі, вважаються **довгими лініями**.

Довжина хвилі в лінії

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \qquad (17.22)$$

Фазова швидкість повітряної лінії близька до швидкості світла (близько $3 \cdot 10^8$ м / с).

Кола з розподіленими параметрами мають явну залежність їх параметрів від частоти струму. Наприклад, звичайна котушка індуктивності на високій частоті (одиниці МГц) вже може розглядатися як лінія з розподіленими параметрами (рисунок 17.4).

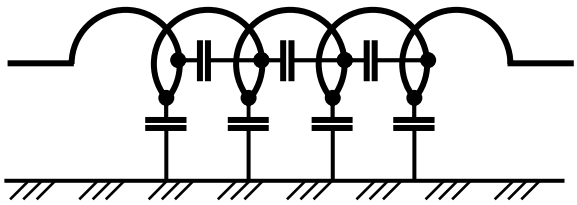


Рисунок 17.4 – Схема заміщення котушки струмам високої частоти

При частоті струму рівній десяткам ГГц в цілому котушка буде оказувати проходженню струму ємнісний, а не індуктивний опір.

Розглянемо схему заміщення котушки, приведену на рисунку 4. З рисунку 4 видно, що окрім індуктивностей, в колі є між виткові ємності і ємності між витками і землею (загальним проводом). Якщо по котушці проходить змінний струм, то при зростанні частоти буде рости і індуктивний опір кожного повздовжньої ділянки *dx* (рисунок 17.2) кола, в той час, як ємнісний опір поперечної ділянки буде зменшуватися. Таким чином, з збільшенням частоти змінного струму в повздовжньому напрямі розповсюдження хвилі буде зменшуватися, а у поперечному (ємнісному), навпаки – збільшуватися.

Приклад 17.1

Швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі дорівнює 300000 км/с. **Визначити довжину електромагнітної хвилі, при частоті струму 50 Гц и 50 МГц.**

Рішення

1. Визначаємо довжину електромагнітної хвилі, при частоті струму 50 Гц з (17.34):

$$\lambda = \frac{300000}{50} = 6000 \ \ км .$$

2. Визначаємо довжину електромагнітної хвилі, при частоті струму 50 МГц з (17.34):

$$\lambda = \frac{300000}{50 \cdot 10^6} = 6 \ м .$$

Приклад 17.2

Трифазна лінія передачі електроенергії, довжиною 900км працює при частоті f = 50 Гц і напрузі $U_л$ = 400 кВ. Первинні параметри лінії мають таке значення:

$r_o = 0{,}08$ *Ом/км*; $L_o = 1{,}336 \cdot 10^{-3}$ *Гн/км*;

$x_o = \omega L_o = 314 \cdot 1{,}336 \cdot 10^{-3} = 0{,}42$ *Ом/км*; $C_o = 8{,}6 \cdot 10^{-9}$ *Ф/км*;

$b_o = \omega C_o = 314 \cdot 8{,}6 \cdot 10^{-9} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ 1/(*Ом·км*);

Втрати P_x в ізоляції на корону при $U_л$ = 400 *кВ* складають 2 *кВт/км* на одну фазу.

Визначити вторинні параметри (характеристики) лінії: хвильовий опір Z_c, коефіцієнтом фази α і коефіцієнтом загасання β, а також довжину хвилі λ і фазову швидкість ϑ.

Рішення

1. Провідність (виток) між проводами g_0 знаходимо з формули

$$P_x = U_ф^2 g_0 ;$$

$$g_0 = \frac{P_x}{U_{ф}^2} = \frac{2000}{\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3{,}75 \cdot 10^{-8}\ 1/(Ом \cdot км).$$

2. Визначаємо комплексний опір і комплексну провідність лінії на 1 *км*:

$Z_0 = r_0 + jx_0 =$ 0,08 + j0,42 = 0,427 $e^{j79°}$ Ом/км;

$Y_0 = g_0 + jb_0 = 3.75\ 10^{-8} + j2{,}7\ 10^{-6} = 2{,}7\ 10\ e^{j90°}$ 1/(*Ом·км*).

3. Визначимо вторинні параметри (характеристики) лінії:

– хвильовий опір

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0{,}427 \cdot e^{j79^\circ}}{2{,}7 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ}}} = 397\ e^{-j5°}\ Ом;$$

– коефіцієнт розповсюдження хвилі

$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = 1{,}073\ 10^{-3}\ e^{j84{,}5°} = 0{,}1028 \cdot 10^{-3} + j\,1{,}068 \cdot 10^{-3}$ 1/*км*;

– коефіцієнт загасання, оскільки $\gamma = \beta + \alpha$, дорівнює $\beta = 0{,}1028 \cdot 10^{-3}$ *дб/км*; коефіцієнт фази $\alpha = 1{,}068 \cdot 10^{-3}$ *рад/км;*

– довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1{,}068 \cdot 10^{-3}} = 5880\ км;$$

– фазова швидкість

$\vartheta = \lambda f = 5880\ 50 = 294000$ *км/с.*

17.5 Лінія без спотворень

Передача сигналів без спотворень по лініях зв'язку має виключне значення.

Неспотвореної передачею сигналу називається така передача, при якій форма сигналу на початку і кінці лінії однакова, тобто всі ординати кривої напруги або струму в кінці лінії прямо пропорційні відповідним ординатам кривої на початку лінії.

Таке явище має місця в тому випадку, коли коефіцієнт загасання лінії β, а також фазова швидкість υ на всіх частотах однакові.

Неоднакове загасання на різних частотах створює **амплітудні спотворення**, а неоднакова швидкість хвиль на різних частотах – **фазові спотворення**. Таким чином, для неспотвореної передачі потрібно, щоб коефіцієнт загасання β не залежав від частоти, коефіцієнт фази α був прямо пропорційний частоті. В цьому випадку фазова швидкість $\upsilon = \frac{\omega}{\beta}$ виходить незалежною від частоти. Це дотримується при умові

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}, \tag{17.23}$$

В цьому випадку коефіцієнт поширення дорівнює

$$\gamma = \sqrt{r_0 \cdot g_0} + j\omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}, \tag{17.24}$$

Таким чином, лінія, параметри якої задовольняють умові (17.23) називається **лінією без спотворень**.

Хвильовий опір ліній без спотворень - дійсне число, що дорівнює активного опору, не залежному від частоти

$$Z_C = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{17.25}$$

Фазова швидкість в лінії без спотворень постійна

$$\upsilon = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \tag{17.26}$$

Для усунення спотворень, що викликаються неузгодженістю опорів навантаження (приймача) з опором лінії, опір навантаження повинен бути рівним хвильовому опору. Коефіцієнт корисної дії у цьому випадку має максимальне значення $\eta_л = e^{-2\alpha x}$.

Для коротких високочастотних ліній, застосованих у радіотехніці, часто з доволі великою точністю можна знехтувати опором r_0 і активною провідністю g_0, в порівнянні з ωL_0 і ωC_0. Тому в радіотехні-

ці часто розглядають двупровідні повітряні лінії і коаксіальні кабелі як лінії без втрат.

Контрольні запитання

1. Чи змінюється величина струму від початку до кінця довгої лінії?
2. Чи змінюється величина напруги між проводами довгої лінії?
3. Якими параметрами володіє кожен як завгодно малий елемент довгої лінії?
4. Навіщо довгу лінію розглядають як лінію з розподіленими параметрами?
5. З яких струмів складається струм у довгій лінії?
6. Яку довгу лінію називають однорідною?
7. Складіть розрахункову схему однорідної лінії з розподіленими параметрами.
8. Як позначають відстань від початку лінії до поточного елемента її довжини?
9. Як позначаються миттєві значення напруги і струму на початку вибраного елемента dx довгої лінії?
10. Як позначається миттєве значення напруги на початку наступного елементу довгої лінії?
11. Як позначається миттєве значення струму на початку наступного елементу довгої лінії?
12. Що розуміється під первинним параметром однорідної лінії $r_o\,dx$?
13. Якою одиницею вимірюється $r_o\,dx$?
14. Що розуміється під первинним параметром однорідної лінії $L_o\,dx$?
15. Якою одиницею вимірюється L_o?
16. Що розуміється під первинним параметром однорідної лінії $g_o\,dx$?
17. Якою одиницею вимірюється $g_o\,dx$?
18. Що розуміється під первинним параметром однорідної лінії $C_o\,dx$?

19. Якою одиницею вимірюється $C_o\,dx$?
20. Навести рівняння для елементу однорідної лінії dx на основі закону Ома і першого закону Кірхгофа
21. Складіть розрахункову схему однорідної довгої лінії.
22. Як визначити поздовжній комплексний опір однорідної лінії Z_0?
23. Як визначити поперечну комплексну провідність Y_0 ?
24. Навести диференційне рівняння зміни комплексу напруги вздовж довгої лінії.
25. Навести диференційне рівняння зміни комплексу струму вздовж довгої лінії.
26. Яке рівняння хвильового опору довгої лінії синусоїдному струму?
27. Чому дорівнює хвильовий опір для ліній синусоїдного струму без втрат ($r = g = 0$)?
28. Чому дорівнює хвильовий опір для ліній синусоїдного струму з малими втратами $\left(\frac{r}{\omega L} << 1, \frac{g}{\omega C} << 1\right)$?
29. Як визначити коефіцієнт розповсюдження**?**
30. Який вираз миттєвого значення напруги у сталому режимі лінії?
31. Який вираз миттєвого значення струму у сталому режимі?
32. Які хвилі називають прямими (падаючими)?
33. Які хвилі називають зворотними (відбитими)?
34. Що характеризує коефіцієнт загасання і коефіцієнтом фази?
35. Яку передачу сигналу називають неспотвореною?
36. Що утворює амплітудні спотворення сигналу?
37. Що утворює фазові спотворення сигналу?
38. Яка умова неспотвореної передачі сигналу вздовж лінії?
39. Чому дорівнює хвильовий опір лінії без спотворень?
40. Як визначити коефіцієнт загасання у лінії без спотворень сигналу?
41. Як визначити коефіцієнт форми у лінії без спотворень сигналу?

Тема 18

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТА МЕТОДИ ЙОГО АНАЛІЗУ

18.1 Основні параметри електростатичного поля

Електростатичне поле – це частковий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю електричних зарядів, нерухомих в просторі по відношенню до наглядача і незмінних в часі.

З курсу фізики відомо, що люба речовина складається з елементарних заряджених часток, оточених електромагнітним полем.

Елементарні заряди (заряди електрона і протона) характеризуються зв'язком з власним і взаємодією з зовнішнім електричним полями. Електростатичне поле має лише електричну складову електромагнітного поля.

Під **зарядом** (зарядом тіла) розуміють скалярну величину, яка дорівнює алгебраїчній сумі елементарних електричних зарядів в цьому тілі. У основу визначення електричного поля покладено механічний його прояв. Воно описується законом Кулона.

Закон Кулона формулюється таким чином: **два точкових заряди q_1 і q_2 у вакуумі взаємодіють між собою з силою $\vec{F}$, прямо пропорційною добутку зарядів q_1 і q_2 і зворотно пропорційно квадрату відстані R між ними.** Ця сила направлена по лінії, яка з'єднує точкові заряди (рисунок 18.1).

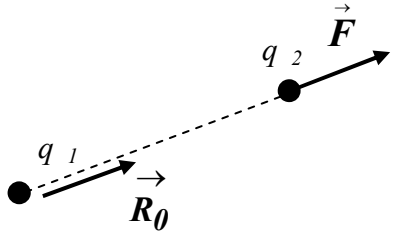


Рисунок 18.1 – Ілюстрація до закону Кулона

Математичний запис закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} \cdot \vec{R}_0 , \qquad (18.1)$$

де $\vec{F}$ – сила взаємодії між точковими зарядами, *Н*;

q_1 , q_2 – точкові заряди, *Кл*;

r – відстань між точковими зарядами, *м*;

ε_0 – електрична постійна, *Ф/м*;

ε – відносна діелектрична проникність середовища, у якому знаходяться заряди;

$\vec{R}_0$ – одиничний вектор, направлений по лінії, яка з'єднує заряди.

Електричне поле зарядженого тіла діє на електричний заряд, поміщений в будь-яку його точку, з визначеною силою.

Для силової характеристики електричного поля введене поняття **напруженості** електричного поля в даній точці, під якою розуміється фізична величина, чисельно рівна відношенню сили, з якою поле діє на одиничний заряд, поміщений у дану точку поля, до значення цього заряду, тобто

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (18.2)$$

де $\vec{E} = E$ – напруженість електричного поля, *В/м*;

$\vec{F} = F$ – сила, *Н*;

q – заряд, *Кл*.

Напруженість електричного поля – величина векторна, яка визначається в кожній точці величиною і напрямом.

Сила, діюча на заряд може бути визначена за рівнянням

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q . \qquad (18.3)$$

Якщо поле утворюється декількома зарядами q_1 , q_2 , q_3 ..., то його напруженість дорівнює геометричній сумі напруженостей від кожного заряду поодинці

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots \ . \tag{18.4}$$

Поле є носієм енергії, тобто може виконувати роботу за допомогою сил поля по переміщенню заряду.

Потенціал точки поля може бути визначеним як відношення роботи, яка виконується силами поля по переносу одиничного позитивного заряду з даної точки поля в точку поля, до величини цього заряду. Потенціал якої дорівнює нулю (у нескінченність).

$$\varphi = \frac{\vec{F} \cdot dl}{q_0}. \tag{18.5}$$

Робота, яка пов'язана з переміщенням заряду по будь-якому замкнутому шляху, дорівнює нулю: після повернення заряду в початкову точку отримаємо попереднє розподілення зарядів і попередній запас енергії:

$$\oint \vec{F}\, dl = \oint \vec{E} \cdot q\ dl = 0. \tag{18.6}$$

Геометричне місце точок електричного поля, де потенціал має однакові значення $\varphi = const$ називають **еквіпотенціальними поверхнями**.

Напруга U_{12} – це різниця потенціалів між точками 1 і 2, яка залежить тільки від положення цих точок і не залежить від шляху, по якому проходило переміщення.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \cdot dl. \tag{18.7}$$

Якщо пройти по **замкнутому** шляху, то початкова точка 1 і кінцева 2 співпадуть, тоді різниця потенціалів цих точок буде дорівнювати нулю.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \oint E \cdot dl = 0. \tag{18.8}$$

В електростатичному полі силові лінії не можуть бути замкнутими, оскільки це протиріч рівнянню 18.9.

Якщо різницю потенціалів між двома точка розділити на найкоротший шлях, то отримана величина буде швидкістю зміни потенціалу в напряму найкоротшого шляху між точками. Ця швидкість буде залежати від напряму, вздовж якого взяті точки. У курсі математики є поняття **градієнту** – скалярної функції, під якою розуміють швидкість зміни скалярної функції, взяту в напрямі її найбільшого збільшення.

Приймемо що $\varphi_1 > \varphi_2$ **,** напруженість електричного поля направлена від більш високого потенціалу φ_1 до більш низького потенціалу φ_2. Тоді маємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \cdot dl = -d\varphi, \qquad (18.9)$$

де $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – прирощення потенціалу при переході з точки 1 до точки 2.

Градієнт потенціалу – це швидкість зміни потенціалу, яка визначається за формулою

$$grad\ \varphi = d\varphi/dl \qquad (18.10)$$

де dl – прирощення відстані, *м*.

Рівнянню (18.10) рівноцінний математичний запис

$$\vec{E} = -\ grad\ \varphi = -d\varphi/dl \qquad (18.11)$$

Знак «мінус у формулі 18.11 вказує, що вектор напруженості направлений в сторону зменшення потенціалів, а радіан потенціалу приймається в сторону збільшення.

Для скорочення запису різних операцій над скалярними і векторними величинами використовують диференційний **оператор Гамільтона (оператор набла ∇).** Під диференційним оператором Гамільтона (оператором набла) розуміють суму часткових похідних по трьох координатних осях, помножених на відповідні одиничні вектори (орти). В декартовій системі координат його записують так

$$\nabla = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \qquad (18.12)$$

Застосуємо оператор ∇ до потенціалу φ.

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right)\varphi = \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot \qquad (18.13)$$

Виходячи з визначення градієнту потенціалу слід зауважити, що $\nabla\varphi$ еквівалентна запису *grad* φ. Оператор означає взяття градієнту від цієї скалярної функції.

$$\nabla\varphi = grad\,\varphi \qquad (18.14)$$

Якщо взяти поверхневий інтеграл напруженості електричного поля по деякій поверхні *S*, то отримаємо ще одну скалярну характеристику електричного поля – **потік вектора його напруженості**:

$$N_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \qquad (18.15)$$

Потік вектору через елемент поверхні може бути позитивним, або негативним. Позитивне значення потоку $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ означає, що він направлений в сторону $\vec{dS}$, негативне його значення, що він направлений зворотно. Значок s під знаком інтегралу означає, підсумовування проводиться по елементам поверхні.

Якщо потік вектора напруженості проходить через замкнену поверхню, яка охоплює заряд *q*, то на знаку інтегралу ставлять кружок $\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} \cdot$.

В електротехнічних розрахунках окрім вектору $\vec{E}$ використовують вектор електричної індукції або **вектор електричного зміщення** $\vec{D}$.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot = \varepsilon_a \cdot \vec{E} \qquad (18.16)$$

В системі «СІ» [$\vec{D}$] = Кл/м^2.

Теорема Гауса э однією з важливіших теорем електростатики. Вона відповідає закону Кулона і принципу накладання. **Теорему Гауса формулюється** таким чином: **потік вектора електричного зміщення через любу замкнуту поверхню, яка оточує деякий об'єм, дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, які знаходяться усередині цієї поверхні**

$$\oint_S \vec{D} \cdot dS = \sum q_k \,. \qquad (18.17)$$

З (18.17) слідує, що вектор $\vec{D}$ є такою характеристикою поля, яка не залежить від діелектричних властивостей середовища ε_a. Оскільки виконується рівняння (18.16), тоді теорему Гауса для однорідного і ізотропного середовища можна записати і в такій формі

$$\oint_S \vec{E} \cdot dS = \frac{\sum q_k}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \,. \qquad (18.18)$$

Формули (18.17) і (18.18) це математичний запис теореми Гауса в інтегральній формі.

Теорема Гауса в інтегральній формі виражає зв'язок між потоком вектора зміщення $\vec{D}$ через поверхню S, яка обмежує деякий об'єм. За допомогою теореми Гауса в інтегральній формі неможливо визначити, як пов'язаний $\vec{D}$ у даній точці поля з щільністю зарядів в даній точці поля. Відповідь на це запитання дає диференціальна форма теореми Гауса. Розділимо обидві частини рівняння (18.17) на одну й ту ж скалярну величину – об'єм V, який знаходиться в середині замкнутої поверхні S

Вираз (18.19) незмінний для об'єму любої величину. Спрямуємо об'єм до нуля:

$$lim \frac{\oint \vec{D} \cdot \vec{dS}}{V} = lim \frac{\sum q}{V} \,. \qquad (18.20)$$

При спрямування об’єму до нуля $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{dS}$ теж прямує до нуля.

Межа відносини потоку $lim\dfrac{\oint \vec{D}\cdot\vec{dS}}{V}$ векторної величини крізь замкнуту поверхню, яка обмежує деякий об’єм до об’єму ***V*** називають **дивергенцією вектора** $\vec{D}$ ($div\vec{D}$). Часто замість терміну «дивергенція» вживають термін **«розходження»** або **«виток»** вектору $\vec{D}$. У правій частині рівняння (18.20) знаходиться об’ємна щільність зарядів ρ.

Таким чином теорему Гауса в диференціальній формі записують наступним чином (*перша форма запису*):

$$div\vec{D} = \rho. \qquad (18.21)$$

Залежність вектору електричного зміщення від щільності зарядів наведена на рисунку 18.2

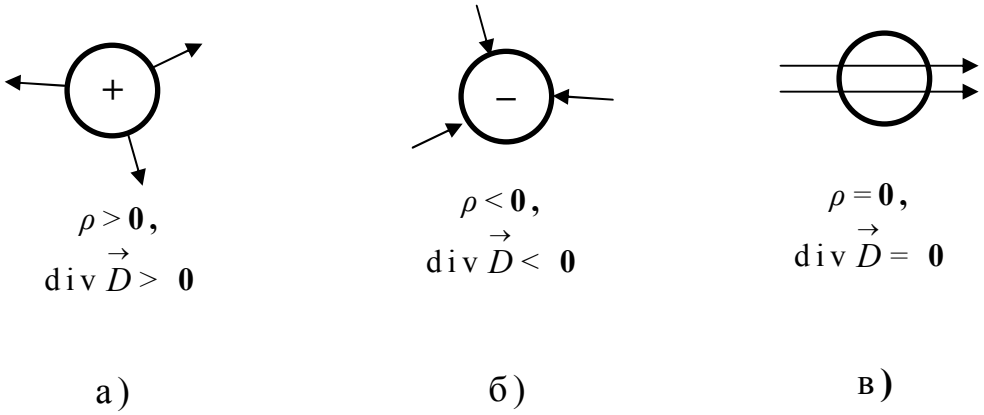


Рисунок 18. 2 – Залежність вектор електричного зміщення від щільності зарядів

Таким чином розходження ліній вектору $\vec{D}$ в даній точці поля визначається величиною щільності зарядів в даній точці. Якщо об’ємна щільність зарядів в точці позитивна ($\rho > 0$) (рисунок 18.2, а), тоді лінії вектору $\vec{D}$ виходять, виток позитивний. Якщо об’ємна платність зарядів в точці негативна ($\rho < 0$) (рисунок 18.2, б), тоді маємо

стік ліній вектору $\vec{D}$, тобто вони входять, виток негативний. І якщо ρ=0 (рисунок 18.2*в*), то в даній точці поля нема ні витоку ні стоку ліній вектору $\vec{D}$, тобто в даній точці вони не починаються і не закінчуються.

Якщо середовище однорідне і ізотропне, тоді його $\varepsilon_a = const$, замість (18.21) запишемо $div\ \varepsilon_a \cdot \vec{E} = \rho$, тоді вірна наступна *друга форма запису*

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \qquad (18.22)$$

Рівняння Пуассона і Лапласа є основними диференціальними рівняннями електростатичного поля. Вони витікають з теореми Гауса в диференціальній формі. Оскільки $\vec{E} = -\ grad\ \varphi$, в той же час згідно теоремі Гауса $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_a$, отримаємо

$$div\vec{E} = div(-grad\ \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_a}\ . \qquad (18.23)$$

Винесемо мінус за знак дивергенції

$$div(grad\ \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}\ . \qquad (18.24)$$

Замість *grad* φ запишемо його еквівалент оператор потенціалу $\nabla\varphi$, замість div напишемо ∇ , тоді отримаємо рівняння:

$$\nabla\ (\nabla\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}\ . \qquad (18.25)$$

або

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}\ . \qquad (18.26)$$

Рівняння (25) називають рівнянням Пуассона.

Окремий випадок рівняння Пуассона, коли $\rho = 0$, називають **рівнянням Лапласа**. Рівняння Лапласа записується так

$$\nabla^2\varphi = 0\ . \qquad (18.27)$$

Оператор $\nabla^2 = div(grad\ \varphi)$ називають **оператором Лапласа** або **лапласіаном** і іноді позначають його символом **Δ**. Тому можна зустріти і таку форму запису рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \quad . \tag{18.28}$$

Енергія поля, утвореного системою n заряджених тіл, які мають потенціали $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ і заряди $q_1 \ldots q_n$:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} q_k \cdot \varphi_k \quad . \tag{18.29}$$

При інтегруванні рівняння Лапласа (або Пуассона) в рішення входять постійні інтегрування. Їх визначають, виходячи з граничних умов. Під граничними умовами розуміють умови, яким підкорюється поле на границях розділу середовищ з різними електричними властивостями.

Поле в середині провідного тіла в умовах електростатики

В провідному тілі, яке знаходиться в електростатичному полі, внаслідок явища електростатичної індукції відбувається розділ зарядів. Негативні заряди зміщуються на поверхню тіла, яка повернута в сторону з більш високим потенціалом, позитивні – в протилежну сторону. Всі точки тілі будуть мати однаковий потенціал. Якщо між будь-якими точками виникла б різниця потенціалів, то під її дією з'явився би упорядкований рух зарядів, що протирічить поняттю електростатичного поля.

Поверхня тіла еквіпотенціальна. Вектор напруженості зовнішнього поля в любій точці поверхні підходить до неї під прямим кутом. **В середині провідного тіла напруженість поля дорівнює нулю,** так як зовнішнє поле компенсується полем зарядів, розташованих на поверхні тіла.

Умови на границі розділу провідного тіла і діелектрика

На границі провідне тіло-діелектрик при відсутності струму по провідному тілу виконуються дві умови:

1) відсутня тангенціальна (дотична к поверхні) складова напруженості поля:

$$E_t \cdot = 0; \tag{18.30}$$

2) вектор електричного зміщення $\vec{D}$ в любій точці діелектрика, що безпосередньо примикає до поверхні провідного тіла, чисельно рівний щільності заряду $\boldsymbol{\sigma}$ на поверхні провідного тіла в цій точці

$$D \cdot = \sigma \, . \tag{18.31}$$

Що до першої умови, то всі точки провідного тіла мають однаковий потенціал. Як слід, між двома любими надто близько розташованими одна до одної точками поверхні прирощення потенціалу $d\varphi = 0$, але $d\varphi = E_t \cdot$, як слідство $E_t \cdot dl = 0$. Оскільки елемент шляху dl не рівний нулю, тоді рівний нулю $E_t \cdot$.

Для доказу другої умови виділимо нескінченно малий паралелепіпед (рисунок 18.3).

Верхня грань його паралельна поверхні провідного тіла і розташована у діелектрику. Висоту паралелепіпеду візьмемо дуже малою.

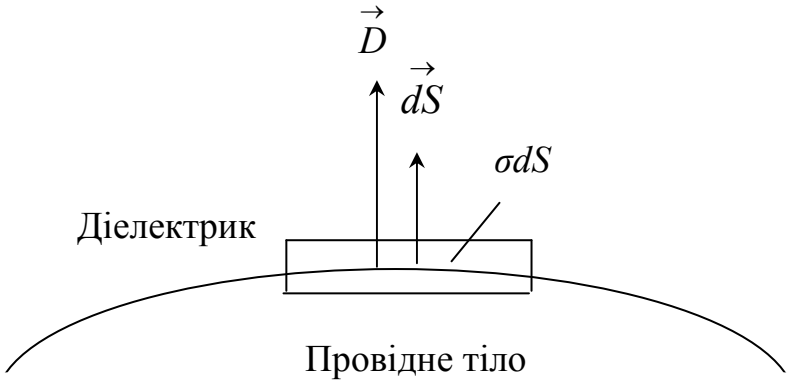


Рисунок 18.3 – Розташування вектору електричного зміщення на границі розділу провідного тіла і діелектрика

Застосуємо теорему Гауса. В силу малих лінійних розмірів можна прийняти, що щільність заряду σ у всіх точках на поверхні dS про-

відного тіла, потрапив в середину паралелепіпеду, одна й та ж. Повний заряд в середині розглянутого об'єму рівний σdS.

Потік вектору $\vec{D}$ через верхню грань об'єму $\vec{D} \cdot \vec{dS} = D \cdot dS$. Потоку вектору $\vec{D}$ через бокову грань (оскільки вона дуже мала) немає, він дотикається її. Через нижню границю об'єму потік теж відсутній, оскільки всередині провідного тіла $E \cdot = 0$ і $D \cdot = 0$ (а провідного поля є величина кінцева). Таким чином, потік вектору $\vec{D}$ із об'єму рівний $D \cdot dS = \sigma dS$ або $D = \sigma$.

Умови на границі розділу двох діелектриків

На границі розділу двох діелектриків з різними діелектричними проникністями виконуються дві наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові напруженості поля (рисунок 18.4)

$$E_{t1} \cdot = E_{t2} \cdot . \qquad (18.32)$$

Індекс 1 відноситься до першого діелектрика, 2 – до другого.

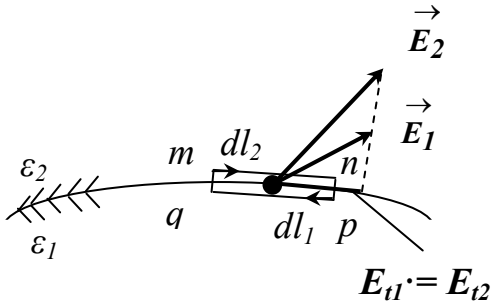


Рисунок 18.4 – Вектори напруженості на границі розділу двох діелектриків

2) рівні нормальні складові електричної індукції (рисунок 18.5)

$$D_{1n} \cdot = D_{2n}. \qquad (18.33)$$

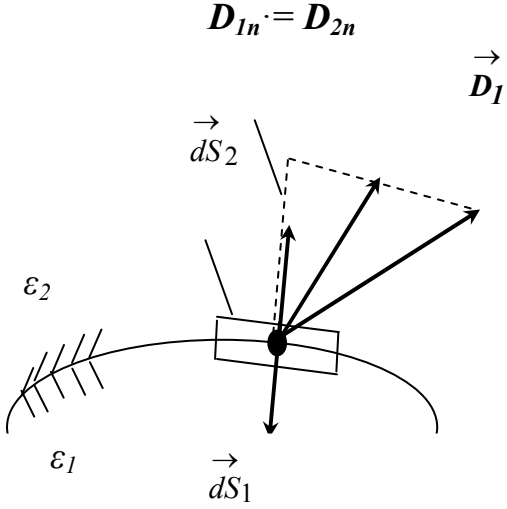


Рисунок 18.5 – Електричні індукції на границі розділу двох діелектриків

Приклад 18.1

Діелектричний плоский конденсатор складається з слюди і повітря. Товщина слюди $d_1 = 0{,}002$ *м*, а повітря $d_2 = 0{,}003$ *м*. Площа пластин $S = 0{,}04$ $м^2$. Відносна діелектрична проникність слюди $\varepsilon_1 = 5$, а повітря $\varepsilon_2 \approx 1$. Електрична напруженість пробою слюди $E_{пр1} = 70000$ *кВ/м*, а повітря – $E_{пр2} = 3700$ *кВ/м*. **Визначити ємність конденсатора, гранично допустиму напругу його, електричну напруженість поля в слюді.**

Рішення

1. Визначаємо ємність конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}},$$

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}04}{\frac{0{,}002}{5} + \frac{0{,}003}{1}} = \frac{0{,}04 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{0{,}0034} = 104 \cdot 10^{-12}\,Ф.$$

2. Визначаємо гранично допустиму напругу конденсатора:

$$U_{доп.} = E_{пр\,1} \cdot d_1 + E_{пр\,2} \cdot d_2.$$

Оскільки електрична напруженість пробою повітря значно менша за електричну напруженість пробою слюди, а $\frac{E_{пр1}}{E_{пр2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ то визначимо допустиму напругу таким чином:

$$U_{доп.} = E_{пр\,2} \cdot (d_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot d_1).$$

$$U_{доп.} = 3700\ (0{,}003 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}002) = 3700 \cdot 0{,}0034 = 12{,}58\ \text{кВ}.$$

3. Визначаємо електричну напруженість поля в слюді:

$$E_1 = \frac{U_{доп}}{(d_1 + d_2 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})},$$

$$= \frac{12580}{\left(0{,}002 + 0.003 \cdot \frac{5}{1}\right)} = 740\ \frac{кВ}{м}.$$

Електрична напруженість слюди значно менша за електричну напруженість пробою, так як $E_1 = 740$ *кВ/м* < $E_{пр\,1} = 70000$ *кВ/м*.

18.2 Електричне поле постійного струму в електропровідному середовищі та його основні параметри

Якщо під впливом зовнішніх джерел у провідному середовищі (металевих проводах, землі, рідині) створено електричне поле, то в ньому буде протікати електричний струм.

Упорядкований рух вільних електронів у металі і іонів у рідині під впливом електричного поля прийнято називати **струмом провідності**.

При своєму упорядкованому русі носії зарядів випробовують численні зштовхування з іншими частками речовини, які знаходяться в тепловому русі. Властивість середовища, що характеризує його здібність проводити струм, називають **питомою провідністю γ**, має розмірність $Ом^{-1} \cdot м^{-1} = См/м$.

Основною величиною в електричному полі провідного середовища є **щільність струму** $\bar{\delta}$. Це векторна величина, яка направлена по напруженості електричного поля. Вона чисельно дорівнює відношенню Δi , що проходить через елемент поверхні (перпендикулярний до направлення напруженості поля в даній точці) до величини ΔS цієї поверхні, має розмірність А/м^2.

Якщо поверхня має конечні розміри, то напрям вектора щільності струму у всіх елементах, на які може бути розбита ця поверхня, і напрям елементів поверхні можуть бути різними, і струм визначить таким чином

$$I = \int_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S}. \qquad (18.34)$$

Таким чином, **струм є потік вектора щільності струму**.

При протікання постійних струмів як всередині провідних тіл, так і зовні їх існують постійні (незмінні в часі) магнітні поля. Оскільки такі поля незмінні в часі, то не виникає явища електромагнітної індукції, тобто магнітне поле, створене постійним струмом, не впливає на електричне поле постійного струму. Тому електричні і магнітні поля постійного струму можна розглядати окремо.

Закон Ома встановлює зв'язок між струмом, що тече в провіднику і напругою на його кінцях.

$$U = R \cdot I \qquad (18.35)$$

Коефіцієнт пропорційності називається опором провідника, який визначається за рівнянням:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S}. \qquad (18.36)$$

Для елементу провідника довжиною *dl*, опір має величину $\frac{dl}{\gamma \cdot dS}$, а струм через переріз *dS* цього елементу дорівнює $\delta \cdot dS$, і в силу закону Ома напруга між двома торцевими поверхнями цього елементу, тобто

на довжині *dl*, повинна рівнятися $dU = \frac{\delta \cdot dl}{\gamma}$. З іншого боку, напругу між двома точками провідника можна визначити як лінійний інтеграл вектора напруженості електричного поля

$$U = \int_1^2 E \cdot dl. \tag{18.37}$$

Для напруги на довжині *dl* величину напруги $dU = E \cdot dl$ і як слідує

$$\vec{\delta} = \gamma \cdot E. \tag{18.38}$$

Рівняння (18.38) називають **диференціальною формою закону Ома**.

Рівняння (18.38) справедливе для областей поза джерел ЕРС. В областях, які зайняті джерелами ЕРС, окрім кулонова (електростатичного) поля існує ще так зване стороннє поле, яке забезпечує безперервний рух зарядів у електричному колі.

Під стороннім полем розуміють електричне поле, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними процесами. Напруженість сторонніх сил позначається $\vec{E}_{стор}$. У областях, зайнятих джерелами ЕРС, повне значення напруженості поля дорівнює геометричній сумі напруженості кулонова і стороннього полів $\vec{E} + \vec{E}_{стор}$. Рівняння **узагальненого закону Ома** і **диференціальної форми другого закону Кірхгофа** має вигляд:

$$\vec{\delta} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{стор}). \tag{18.39}$$

Потужність, що обумовлена виділенням тепла у провіднику при протіканні по ньому електричного струму, визначається законом Джоуля-Ленца:

$$P = R \cdot I^2. \tag{18.40}$$

В тому об’ємі ділянки проводу довжиною *dl* розвивається потужність, яка дорівнює $\delta \cdot dS \cdot \frac{dl}{\gamma}$. Якщо віднести її на одиницю об’єму і

прийнявши до уваги співвідношення (18.40), получимо для питомої потужності вираз

$$p = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma \cdot E^2. \qquad (41)$$

Рівняння (18.37) є **диференціальною формою закону Джоуля-Ленца**.

Якщо у об'ємі елементу провідника протікає постійний струм, незмінний в часі, то можна сказати, що сума струмів, що входить до об'єму елементу проводу дорівнює сумі струмів, що виходять із об'єму, тобто

$$\oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = 0. \qquad (18.42)$$

Тоді рівняння (18.42) є **диференціальною формою першого закону Кірхгофа**.

Енергія, що виділяється в одиниці об'єму провідника в одиницю часу (у секунду) дорівнює:

$$\frac{I^2 \cdot R}{V} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma \cdot E^2. \qquad (18.43)$$

Перехід струму від середовища з провідністю γ_1 до середовища з провідністю γ_2. Граничні умови

На границі переходу струму з середовища з одною провідністю в середовище з іншою провідністю виконуються дві наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові напруженості поля

$$E_{t1} = E_{t2}; \qquad (18.44)$$

2) рівні щільності струму:

$$\delta_{1t} = \delta_{2t}. \qquad (18.45)$$

Індекс 1 відноситься до першого середовища, 2 – до другого.

Проведемо аналогію між полем у провідному середовищі і електростатичним полем. По своїй природі поле електростатичне і поле постійного струму у провідному середовищі різні. Електростатичне поле утворюється електричними зарядами, незмінними в часі і неру-

хомими у просторі, тоді, як електричне поле у провідному середовищі – це поле, у якому заряди мають упорядкований рух під дією зовнішнього джерела. Але між двома полями може бути проведена формальна аналогія (таблиця 18.1).

Таблиця 18.1 – Формальна аналогія між електростатичним полем і електричним полем у провідному середовищі

Електростатичне поле	Електричне поле у провідному середовищі
1 У областях електростатичного поля, не зайнятих зарядами виконується рівняння Лапласа $\nabla^2\varphi = = div(grad\ \varphi) = 0$. Розходження швидкості зміни потенціалів при відсутності зарядів дорівнює нулю.	Електричне поле постійного струму в провідному середовищі теж йому задовольняє.
2 Силова характеристика вектор напруженості $\vec{E}$.	Силова характеристика вектор напруженості $\vec{E}$.
3 Вектор електричного зміщення $\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot = \varepsilon_a \cdot \vec{E}$. $[\vec{D}] = $ Кл/м^2.	Вектор щільності струму $\vec{\delta} = \gamma \cdot \vec{E}\ E$, $[\vec{\delta}] = $ А/м^2.
4 Потік вектора зміщення, позначимо його ψ. $\psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{S}$	Вектор щільності струму $I = \int \vec{\delta} \cdot d\vec{S}$.
5 Граничні умови на поверхні розділу двох середовищ: $E_{1t} = E_{2t}, D_{1t} = D_{2t}$. Сукупність силових і еквіпотенціальних ліній полів буде однаковою.	Граничні умови на поверхні розділу двох середовищ з різними провідностями: $E_{1t} = E_{2t}$, $\delta_{1t} = \delta_{2t}$. Сукупність силових і еквіпотенціальних ліній полів буде однаковою.

18.3 Магнітне поле постійного струму. Зв'язок основних величин, що характеризують магнітне поле

Магнітне поле постійного струму є одним із компонентів електромагнітного поля. Воно утворюється незмінними в часі струмами, що протікають по провідних тілах, нерухомих в просторі по відношенню до наглядача. Оскільки струм незмінний у часі, то магнітне поле не залежить від електричного поля.

Магнітне поле характеризується індукцією $\vec{B}$, намагніченістю $\vec{J}$ і напруженістю магнітного поля $\vec{H}$. Ці три величини зв'язані співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) \cdot \mu_0 \cdot \mu \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H} \qquad (18.46)$$

де $\vec{B}$ - вектор магнітної індукції, Тл;

$\vec{H}$ - вектор напруженості, А/м;

$\vec{J}$ - вектор намагніченості, А/м;

μ_0 - магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м;

μ - відносна магнітна проникність;

μ_a - абсолютна магнітна проникність.

Одним з основних проявів магнітного поля є вплив його на провід з током, який поміщений в це поле. Сила $\vec{F}$, з якою магнітне поле діє на елемент провідника довжиною $\vec{dl}$ визначається співвідношенням (18.47), якщо сила направлена перпендикулярно індукції в даній точці поля і перпендикулярна елементу струму $I \cdot \vec{dl}$

$$\vec{F} = I(\vec{dl}\,\vec{B}) \qquad (18.47)$$

Магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля, що слідує з (18.47).

Кількісний зв'язок між циркуляцією вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру і струмом всередині контуру визначає **закон повного струму** *в інтегральній формі*: **лінійний інтеграл від напруженості магнітного поля вздовж любого замкнутого контуру рівний повному току, який пронизує замкнутий контур**:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I \tag{18.48}$$

Під повним струмом розуміють весь струм (струм провідності і струм зміщення).

Інтегральна форма використовується коли є симетрія в магнітному полі, наприклад напруженість поля в деякій точці A у полі відокремленого прямого проводу з током I, можна розрахувати за формулою:

$$H = \frac{I}{2\pi R} \ , \tag{18.49}$$

де R – радіус (відстань) в площині, перпендикулярній осі проводу від точки А до проводу.

Співвідношення (18.48) придатне для контурів любих розмірів, в тому числі і для дуже малих. Якщо площа мала, то можна прийняти, що щільність струму $\vec{\delta}$ в межах цієї площі однакова і тоді струм, що пронизує площу, рівний

$$\Delta i = \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = \delta_n \cdot \Delta S \tag{18.50}$$

де δ_n – проекція вектора щільності струму $\vec{\delta}$ на нормаль до площини, тобто на напрям $\Delta \vec{S}$.

Оскільки

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \delta_n \cdot \Delta S \ , \tag{18.51}$$

тоді розділимо праву і ліву части (18.51) на ΔS, при чому $\Delta S \to 0$. Межа отриманого відношення має вигляд:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot \vec{dl}}{\Delta S} = \delta_n. \qquad (18.52)$$

У лівій частині рівняння (1852) знаходиться величина, яка є проекцією ротора $\vec{H}$ на напрям нормалі до площини ΔS. Як слідство $rot_n \vec{H} = \delta_n$. Тоді замість рівності проекцій двох векторів $rot_n \vec{H}$ і δ_n можна записати рівність самих векторів

$$rot \vec{H} = \vec{\delta} \ , \qquad (18.53)$$

Рівняння (18.53) представляє собою **закон повного струму** *у диференціальній формі*.

Для сукупності точок, де $\delta = 0$, $rot_n \vec{H} = 0$ **(**область, не зайнята струмом**)**, магнітне поле може розглядатися як потенціальне, тобто як поле, кожна точка якого має скалярний магнітний потенціал $\boldsymbol{\varphi_м}$, $[\boldsymbol{\varphi_м}]$ = А/м.

Різниця скалярних магнітних потенціалів між точками 1 і 2 називають спадом магнітної напруги $\boldsymbol{U_{м12}}$, $[\boldsymbol{U_{м12}}]$.= А

$$U_{м12} = \varphi_{м1} - \varphi_{м2} = \int_1^2 \vec{H} \cdot \vec{dl} \qquad (18.54)$$

Для розрахунку магнітних полів широко використовують векторний потенціал, або вектор-потенціал магнітного поля. Його позначають $\vec{A}$. Це векторна величина, яка плавно змінюється від точки до точки поля, ротор якої рівний магнітній індукції

$$\vec{B} = rot \vec{A} \ . \qquad (18.55)$$

На відміну від скалярного магнітного потенціалу $\boldsymbol{\varphi_м}$, використовувати який можна для областей, не зайнятих струмом, векторним потенціалом можна користуватися як для областей, не зайнятих струмом, так і для областей, зайнятих струмом.

Магнітний потік, що пронизує будь-яку поверхню S дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_S rot\, \vec{A} \cdot \vec{dS} \ , \qquad (18.56)$$

Згідно теореми Стокса $\int_S rot\, \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl}$, тоді:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} \ , \qquad (18.57)$$

Таким чином, **магнітний потік через поверхню *S* дорівнює лінійному інтегралу векторного потенціалу по замкнутому контуру, що обмежує цю поверхню**.

Магнітний опір середовища магнітному потоку визначається за формулою:

$$R_м = \frac{U_м}{\Phi}, \qquad (18.58)$$

де $R_м$ – магнітний опір, 1/Гн.

Магнітна провідність – величина, зворотна $R_м$, одиниця виміру – Гн.

У магнітному полі, як в електростатичному і полі провідного середовища, виконуються визначені граничні умови.

На границі розділу двох однорідних і ізотропних середовищ, які мають різні магнітні проникності виконуються дві наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові векторів напруженості магнітного поля

$$H_{t1} \cdot = H_{t2} \cdot ; \qquad (18.59)$$

2) рівні нормальні складові векторів магнітної індукції

$$B_{1n} = B_{2n}. \qquad (18.60)$$

18.4 Основні рівняння змінного електромагнітного поля

Під змінним електромагнітним полем розуміють **сукупність змінних в часі і взаємно зв'язаних і обумовлюючих один одне електричного і магнітного полів**.

Воно визначається двома векторними величинами – напруженістю електричного поля $\vec{E}$ і напруженістю магнітного поля $\vec{H}$.

Змінне електромагнітне поле є одним з видів матерії. Воно володіє енергією, масою, кількістю руху, може перетворюватися в інші види матерії і самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль. Швидкість розповсюджування електромагнітних хвиль у вакуумі – $3 \cdot 10^8$ м/с.

При дослідженні процесів в змінному електромагнітному полю користуються рівняннями Максвелла. Систему рівнянь Максвелла створюють чотири рівняння.

Перше рівняння Максвелла виражає зв'язок між ротором напруженості електричного поля і щільністю струму в тій же точці поля, записується перше рівняння Максвелла наступним чином:

$$rot\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ ; \qquad (18.61)$$

де $\vec{\delta}$ – щільність струму провідності, А/м^2;

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – щільність струму електричного зміщення А/м^2.

Струм електричного зміщення виникає в любому діелектрику, в тому числі і в вакуумі. Хоча природа струму провідності і струму зміщення неоднакова, але кожен з них має властивість викликати магнітне поле.

Друге рівняння Максвелла визначає зв'язок між ротором напруженості електричного струму і швидкості зміни магнітного поля в тій же точці. Друге рівняння Максвелла записується наступним чином:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ ; \qquad (18.62)$$

Фізичний смисл складається в тому, що люба зміна магнітного поля в часі $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в будь-якій точці поля збуджує вихор або ротор електричного поля в тій же точці, тобто викликає вихрове електричне поле. Друге рівняння Максвелла називають диференціальною формою закону електромагнітної індукції.

Окрім рівнянь Максвелла, велике значення в теорії електромагнітного поля має **теорема Умова-Пойнтінга,** яка описує енергетичні співвідношення у електромагнітному полі.

Теорему Умова-Пойнтінга для миттєвих значень записують наступним чином:

$$-\oint_S \vec{E}\cdot\vec{H}\cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = \int_V \gamma\cdot E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)dV \ , \quad (18.63)$$

де $\vec{\Pi} = \vec{E}\cdot\vec{H}$ – вектор Пойнтінга, *ВА/м*^{2};

$\int_V \gamma\cdot E^2 dV$ – енергія, що виділяється у вигляді теплоти у одиницю об'єму;

$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right)dV$ – швидкість зміни електромагнітної енергії в одиниці об'єму.

Теорему Пойнтінга слід трактувати як рівняння енергетичного балансу: ліва части (18.63) є потужність або енергія в одиницю часу, яка доставляється у вигляді потоку вектора Пойнтінга в середину деякого об'єму; права частина є енергія, що витрачається одиницю часу в середині об'єму.

Якщо поле не змінюється в часі, тоді:

$$-\oint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = \int_V \gamma\cdot E^2 dV \ ; \quad (18.64)$$

оскільки в незмінному полі

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) dV = 0. \qquad (18.65)$$

Контрольні запитання

1. Чим створюється електростатичне поле?
2. Електростатичне є якою складовою електромагнітного поля?
3. Що розуміють під зарядом (зарядом тіла?)
4. Сформулюйте закон Кулона.
5. Який математичний запис закону Кулону?
6. Що означає $\vec{R_0}$?
7. Як позначається електрична постійна?
8. Яка одиниця електричної постійної?
9. Як позначається відносна діелектрична проникність?
10. Що є силовою характеристикою електричного поля?
11. Що розуміється під напруженістю електричного поля в даній точці?
12. Як визначити напруженість електричного поля?
13. Яка одиниця напруженості електричного поля?
14. Що розуміється під потенціалом електричного поля?
15. За якою формулою визначають потенціал електричного поля?
16. Яка одиниця потенціалу?
17. Що таке електрична напруга між точками 1 і 2?
18. Яку поверхню в електричному полі називають еквіпотенціальною?
19. Що розуміють під градієнтом потенціалу?
20. Як позначається градієнт потенціалу?
21. За якою формулою визначається градієнт потенціалу?
22. Що розуміють під диференційним оператором Гамільтона (оператором набла)?
23. Якою літерою позначається оператор Гамільтона?

24. За якою формулою визначається оператор Гамільтона?
25. Як позначається вектор електричного зміщення?
26. За якою формулою визначається вектор електричного зміщення?
27. Наведіть формулювання теореми Гауса.
28. Наведіть математичний запис першої форми запису теореми Гауса.
29. Що розуміють під дивергенцією електричного вектора зміщення?
30. Наведіть рівняння Пуассона.
31. Наведіть рівняння Лапласа
32. Наведіть математичний запис першої форми запису теореми Гауса.
33. Як позначається об'ємна щільність зарядів електричного поля?
34. Який напрям мають лінії вектору електричного зміщення $\vec{D}$, якщо об'ємна щільність зарядів в точці позитивна ($\rho>0$)?
35. Який напрям мають лінії вектору електричного зміщення $\vec{D}$, якщо об'ємна щільність зарядів в точці негативна ($\rho<0$)?
36. Який напрям мають лінії вектору електричного зміщення $\vec{D}$, якщо об'ємна щільність зарядів в точці негативна ($\rho=0$)?
37. Наведіть формулу для визначення енергії електростатичного поля, утворених системою n заряджених тіл, які мають потенціали $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ і заряди $q_1 \ldots q_n$.
38. Що розуміють під струмом провідності?
39. Яка величина характеризує властивість середовища проводити електричний струм?
40. Якою літерою позначається питома провідність?
41. Яку розмірність має питома провідність?
42. Як визначити силу струму через щільність струму і площу елементу поверхні?
43. Наведіть рівняння диференціальної форми закону Ома.
44. Наведіть рівняння узагальненого закону Ома і диференціальної форми другого закону Кірхгофа

45. Наведіть рівняння диференціальної форми закону Джоуля-Ленца.
46. Наведіть рівняння диференціальної форми першого закону Кірхгофа.
47. Наведіть формулу для визначення вектору щільності струму.
48. Яку розмірність має щільності струму?
49. Як визначити потужність, що обумовлена виділенням тепла у провіднику при протіканні електричного струму?
50. Яку розмірність має електрична потужність?
51. Якими величина характеризується магнітне поле?
52. Яким співвідношення зв'язані магнітна індукція, намагніченість і напруженість магнітного поля?
53. Чому дорівнює магнітна стала?
54. Наведіть формулювання закону повного струму.
55. Наведіть рівняння закону повного струму в інтегральній формі.
56. Наведіть рівняння закону повного струму в диференціальній формі.
57. Як позначається скалярний магнітний потенціал?
58. Як позначається векторний магнітний потенціал?
59. В чому вимірюється магнітний потік?
60. Що розуміють під змінним електромагнітним полем ?
61. Якими векторними величинами визначається змінне електромагнітне поле?
62. Який зв'язок між якими величинами виражає перше рівняння Максвелла?
63. Як записується перше рівняння Максвелла?
64. Який зв'язок між якими величинами виражає друге рівняння Максвелла?
65. Як записується друге рівняння Максвелла?
66. Що описує теорема Умова-Пойнтінга?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Овчаров В.В. Теоретичні основи електротехніки / В.В. Овчаров. – К.: Урожай, 1993. – 224 с.

2. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник, 5-е изд. / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Атомэнергоиздат, 1989. – 657 с.

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи /Л.А. Бессонов. – 12-е изд., исправ. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 701 с.

4. Башарин С.А. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля / С.А. Башарин, В.В. Федоров. М.: Издательский дом «Академия», 2004. – 304 с.

5. Нейман Л.Р. Теоретические основы электротехники. Т.2. / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчан. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.

6. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле. Ч. 2, 3. / Г.И. Атабеков. – М.: Энергия, 1979. – 432 с.

Навчальне видання

Попова Ірина Олексіївна,
Курашкін Сергій Федорович,
Вовк Олександр Юрійович,
Попрядухін Вадим Сергійович

Теоретичні основи електротехніки, частина 3

Навчальний посібник

Формат 60х84
Папір офсет. Друк офсет.
Ум. друк. арк.. 13,5
Наклад прим.

Видавництво та друк: видавничо-поліграфічний центр «Люкс