МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного
Механіко – технологічний факультет
Кафедра «Технічна механіка та комп'ютерне проектування
імені професора В.М. Найдиша»

РОЗТЯГ-СТИСК. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СТЕРЖНЕВІ СИСТЕМИ

Методичні вказівки
до практичного заняття

з дисципліни «**Інженерна механіка. Механіка матеріалів і конструкцій**»

для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр»
зі спеціальностей 208 «Агроінженерія»,
133 «Галузеве машинобудування» та 131 «Прикладна механіка»

Мелітополь, 2020

УДК.531.2(075.8)

Розтяг-стиск. Статично невизначені стержневі системи: метод. вказівки до практичних занять з дисципліни «Інженерна механіка. Механіка матеріалів і конструкцій» для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальностей 208 «Агроінженерія», 133 «Галузеве машинобудування» та 131 «Прикладна механіка» / Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного; уклад.: **Л.Ю. Бондаренко, О.О. Вершков, Г.В. Антонова**. – Мелітополь: 2020. – 46с.

Рецензенти:
Караєв О.Г. – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач кафедри сільськогосподарських машин Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного.

Схвалено на засіданні кафедри «Технічна механіка та комп'ютерне проектування імені професора В.М. Найдиша»
Протокол № 12 від "8" травня 2020 року
Завідувач кафедри ТМКП
доц.________________ О.О. Вершков
"____"_____________ 2020 року

Схвалено методичною комісією механіко-технологічного факультету
Протокол № 7 від "29" травня 2020 року
Голова доц.______________ А.О.Смєлов
"___"__________2020 року

Методичні вказівки "**Розтяг-стиск. Статично невизначені стержневі системи**" розроблено з метою надання практичних навичок студентам під час виконання практичних завдань з дисципліни «Інженерна механіка. Механіка матеріалів і конструкцій». Видання включає короткі теоретичні відомості, приклади вирішення задач з необхідними теоретичними положеннями і практичними поясненнями. Видання призначене для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальностей 208 «Агроінженерія», 133 «Галузеве машинобудування» та 131 «Прикладна механіка».

ЗМІСТ

ВСТУП

Механіка матеріалів і конструкцій - перша навчальна дисципліна загально-інженерної підготовки, з якою стикається студент. Ця дисципліна про міцність і жорсткості елементів конструкцій і деталей машин, яка ставить за мету розробити прості, зручні для практичного застосування методи розрахунків типових елементів конструкцій, що найчастіше зустрічаються.

Механіка матеріалів і конструкцій відноситься до фундаментальних дисциплін загально-інженерної підготовки фахівців з вищою технічною освітою. Без фундаментального знання механіки матеріалів і конструкцій неможливо створення різного роду машин і механізмів, цивільних і промислових споруд, мостів, ліній електропередачі і антен, ангарів, кораблів, літаків і вертольотів, турбомашин і електричних машин, агрегатів атомної енергетики, ракетної і реактивної техніки та ін. В умовах, коли в навчальних планах постійно скорочуються часи, відведені на вивчення загально-технічних дисциплін, і в той же час необхідність формування у майбутніх інженерів базового обсягу знань про міцність та надійність виробів, що створюються або знаходяться в експлуатації, важливо забезпечити студентів методичними вказівками невеликими за обсягом, але таких, що охоплюють окремий розділ знань.

Методичні вказівки складені для студентів всіх форм навчання з метою полегшення виконання практичних робіт або самостійної роботи з дисципліни «Інженерна механіка. Механіка матеріалів і конструкцій». Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, приклади виконання завдань. У завданнях передбачено декілька рівнів складності: перший рівень складності передбачає проектувальний розрахунок за умовою міцності; другий рівень складності передбачає визначення вантажопідйомності за методом допустимих навантажень та за граничним станом з урахуванням неточності виготовлення та температурних змін.

1. Короткі теоретичні відомості

1.1 Статично невизначені задачі

Стержні й стержневі конструкції, у яких внутрішні силові фактори від заданого навантаження можна визначити з рівнянь рівноваги, називаються **статично визначними**. Зусилля у стержнях статично визначених систем виникають тільки від зовнішніх навантажень.

У ряді випадків, необхідні для розрахунку зусилля, не можна знайти за допомогою методу перерізів, через те що кількість рівнянь статики, які можна скласти для відсіченої частини системи, недостатня (під системою розуміємо сукупність стержнів, з'єднаних між собою і прикріплених до нерухомих точок за допомогою шарнірів).

Задачі, у яких зусилля не можуть бути визначені за допомогою лише рівнянь статики, мають назву **статично невизначених**. У статично невизначених стержнях і конструкціях внутрішні зусилля можуть виникати і при відсутності зовнішніх навантажень, наприклад, у результаті зсуву опор чи неточності виготовлення різних елементів. При розв'язанні таких задач рівняння, яких не вистачає для визначення зусиль, складають на основі умов деформацій системи. Ці додаткові рівняння називають рівняннями сумісності деформацій (нерозривності деформацій). Кількість таких рівнянь визначає ступінь статичної невизначеності задачі, який дорівнює різниці між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статики, які можна скласти.

Пружна система (конструкція) є статично невизначеною, якщо кількість невідомих перевищує кількість лінійно незалежних рівнянь статики (рис.1.1). Кількість «зайвих» невідомих зумовлює ступінь статистичної невизначеності. Такі конструкції найбільш широко розповсюджені як більш жорсткі, надійні і економічні в порівнянні зі статично визначеними.

Ступінь статичної невизначені системи визначається надлишком загального числа невідомих реакцій зовнішніх зв'язків і внутрішніх зусиль по відношенню до числа незалежних рівнянь рівноваги , які можна скласти для даної системи. Ці "зайві" (в розумінні забезпечення рівноваги системи і її геометричної незмінності) зв`язки накладають додаткові обмеження на переміщення тих перерізів, біля яких вони накладені.

Визначення всіх невідомих сил, тобто розкриття статичної невизначеності, можливе тільки шляхом складання рівнянь, що доповнюють число рівнянь статики до числа невідомих. Ці додаткові рівняння відображають особливості геометричних зв`язків, накладених на деформовану систему. Вони можуть бути складені за допомогою уявлення картини переміщень в конструкції, при її деформуванні і тому їх називають рівняннями сумісності переміщень.

Методи розрахунку статично невизначених систем підрозділяються в залежності від того, що приймається при розв`язанні задачі за основні невідомі.

У разі, коли основними шуканими невідомими є зусилля в "зайвих" зв`язках системи, метод носить назву методу сил. Якщо основними невідомими є деформації або переміщення в системі, то розрахунок ведуть за так званим методом переміщень. Тепер існує досить великий різновид цих основних і змішаних методів.

Розв`язуючи рівняння переміщень сумісно з рівняннями статики, можна визначити невідомі зусилля в елементах системи. Причому, якщо система з жорсткими зв`язками, то рівняння сумісності переміщень утворюють самостійну систему, а її розв`язання дає значення зайвих невідомих. Якщо система має пружні зв`язки, то необхідно розв`язувати сумісно рівняння переміщень і статики.

Розрахунки рекомендується проводити в такій послідовності:

- записати незалежні рівняння статики та встановити ступінь статичної невизначеності;
- скласти рівняння сумісності переміщень (число рівнянь сумісності переміщень повинно дорівнювати ступеню статичної невизначеності системи)
- замінити деформації через зусилля за законом Гука;
- розв'язати отриману систему рівнянь, визначити внутрішні зусилля;
- розрахувати напруження або площі поперечних перерізів стержнів в залежності від виду задачі.

1.2. Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями

При розрахунках за допустимими напруженнями міцність конструкції або її елементів буде забезпечена, якщо максимальне напруження $\sigma_{\max}$ не перевищує допустимого $[\sigma]$, тобто виконується умова:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le [\sigma], \tag{1.1}$$

де N_{max} – максимальна внутрішня (поздовжня) сила, Н;

A – площа поперечного перерізу, мм^2.

Якщо матеріал по різному чинить опір розтяганню і стисканню (характерно для крихких матеріалів), то найбільші розтягувальні напруження не повинні перевищувати допустимих напружень на розтягання $[\sigma]_{\text{р}}$, а найбільші стискаючі напруження − допустимих напружень на стискання $[\sigma]_{\text{ст}}$. Формула (1.1) дає можливість розв'язувати низку інженерних задач: проектний, перевірочний розрахунок та розрахунок на визначення вантажопідйомності стержнів.

Проектний розрахунок – підбір перерізу елементу конструкції при відомих силах, що діють на елемент:

$$A \ge \frac{N_{max}}{[\sigma]}. \tag{1.2}$$

Перевірочний розрахунок дозволяє визначити напруження і порівняти його з допустимим значенням:

$$\sigma_{max} \le [\sigma]. \tag{1.3}$$

При перевірочному розрахунку, як правило, визначають коефіцієнт запасу міцності $n_{\text{т}}$, з яким працює елемент.

Визначення допустимого навантаження на існуючий елемент із умови міцності дозволяє визначити вантажопідйомність елемента конструкції:

$$[N_{max}] = A \cdot [\sigma]. \tag{1.4}$$

Умови міцності вимагають, щоб напруження, які виникають в елементах конструкцій, не перевищували допустимих. Допустимі напруження $[\sigma]$ становлять деяку частину від небезпечних (граничних) напружень $\sigma_{\text{гр}}$. Для пластичних матеріалів таким небезпечним напруженням є границя текучості $\sigma_т$, при якій деформації, що швидко зростають, перешкоджають нормальній експлуатації конструкції. Для крихких матеріалів небезпечним напруженням є границя міцності $\sigma_в$, при якій настає руйнування матеріалу.

Допустиме напруження визначають за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{гр}}{n_{гр}}, \tag{1.5}$$

де $\sigma_{гр}$ – небезпечні напруження, для пластичних матеріалів приймається границя текучості: $\sigma_{гр} = \sigma_т$; для крихких матеріалів приймається границя міцності: $\sigma_{гр} = \sigma_в$;

$n_{гр}$– коефіцієнт запасу міцності при дії на конструкцію статичного навантаження встановлюється для пластичних матеріалів у межах $n_т$ = 1,5...2, для крихких $n_в$ = 3...5, а іноді і вище (наприклад, для каменів природних і штучних він може бути у межах $n_в$ = 10...30).

Коефіцієнт запасу міцності $n_{гр}$ залежить також від умов роботи конструкції, точності розрахунків напружень, характеру навантажень.

У тих випадках, коли розміри стержня задані, виникає задача про визначення його вантажопідйомності, тобто визначення сили, яку стержень може витримати, не зазнаючи будь-яких змін, небезпечних для його довговічної роботи.

Для вирішення зазначених питань необхідно провести спеціальні розрахунки. Існує три методи вирішення цих завдань:

1) розрахунок по руйнівних навантаженнях;

2) розрахунок по допустимих напруженнях;

3) розрахунок за граничним станом.

Усі три методи переслідують одну мету - забезпечити міцність і довговічність конструкції або споруди. Перший метод передбачає визначення мінімального навантаження, яке руйнує споруду, з тим, щоб порівняти це навантаження з передбачуваним для конструкції або споруди. Другий метод до недавнього часу широко застосовувався у будівельній справі і до сих пір застосовується в машинобудуванні. За цим методом розміри елемента споруди повинні призначатися так, щоб у всіх перерізах напруження, що викликаються навантаженням, не перевищували деякої допустимої величини.

1.2.1. Метод руйнівних навантажень

За умову міцності при цьому методі розрахунку виставляється вимога, щоб найбільше навантаження на конструкцію або споруду не перевищувало деякого допустимого навантаження $[F]$, яке дорівнює руйнувальному (небезпечному) навантаженню $F_\text{р}$, поділеному на коефіцієнт запасу міцності:

$$[F_{max}] = [F] = \frac{F_\text{р}}{n}. \tag{1.6}$$

Для визначення руйнівного навантаження в конструкціях з матеріалів, що мають велику пластичність і порівняно невелике зміцнення при центральному розтягу і стиску руйнівна сила визначається рівністю:

$$\left[F_\text{р}\right] = \sigma_\text{т} \cdot \text{А}. \tag{1.7}$$

Для крихких матеріалів замість границі текучості треба взяти границю міцності:

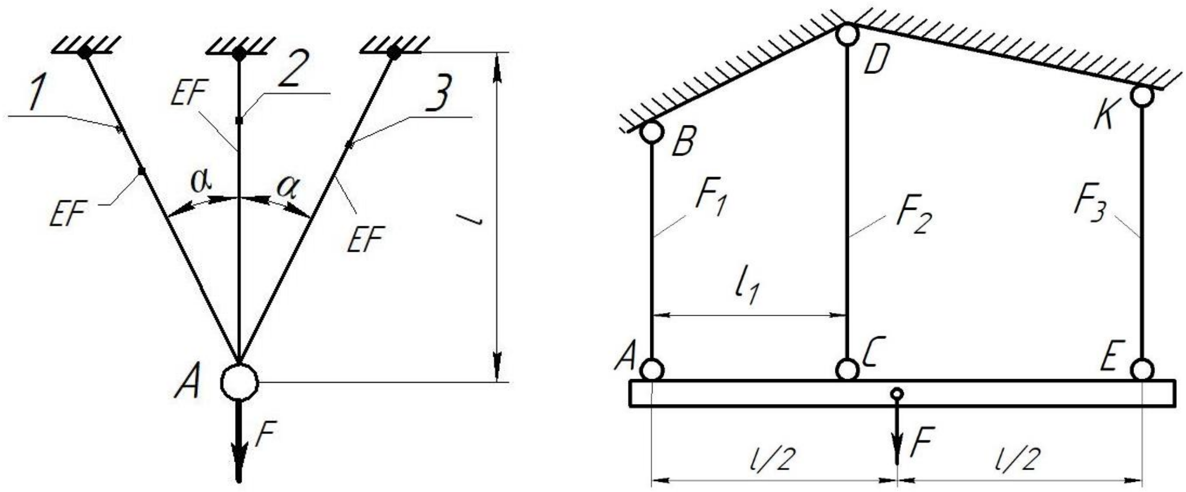
$$\left[F_\text{р}\right] = \sigma_\text{в} \cdot \text{А}. \tag{1.8}$$

У статично невизначених системах, що складаються з пластичних матеріалів поява текучості тільки в одному найбільш навантаженому елементі не призводить систему до руйнування.

Так, наприклад, якщо в статично невизначеній системі, яка зображена на рисунку 1.1.а, при збільшенні сили F напруження, що дорівнюють границі текучості, з'являться спочатку в середньому або крайніх стержнях, це ще не виводить конструкцію з ладу, так як в інших стержнях напруження будуть менші за границю текучості. Для повного руйнування конструкції необхідно, щоб текучість з'явилася у всіх стержнях. В цьому випадку руйнуюча сила $F_\text{р}$ визначиться з умови рівноваги конструкції:

$$F_\text{р} = 2N_1 cos\alpha + N_2 = \ 2F_1\sigma_\text{т} cos\alpha + F_2\sigma_\text{т}.$$

Більш складно визначити руйнівне навантаження для схеми, що показана на рисунку 1.1.б, де нескінченно жорсткий брус утримується трьома стержнями.



а) б)

Рисунок 1.1 – Приклади схем статично невизначених стержневих систем: а) вантаж підтримується трьома стержнями; б) абсолютно жорсткий брус підтримується трьома стержнями.

Тут сила $F_р$ визначається з умови текучості принаймні двох стержнів. Так, якщо стержень АВ менш напружений, а в двох інших стержнях CD і ЕК з'явилася текучість, то $F_р$ визначиться з умови рівності нулю суми моментів відносно точки А.

$$\sum \mathrm{M_A} = F_р \cdot \frac{\ell}{2} - A_2 \cdot \sigma_т \cdot \ell_1 - A_3 \cdot \sigma_т \cdot \ell.$$

Аналогічно можна скласти ще два рівняння, якщо припустити, що текучість з'явиться у двох стержнях АВ і ЕК або стержнях АВ і CD.

З трьох знайдених значень навантажень в розрахунок вводиться найменша сила, яка і вважається руйнівною.

1.2.2. Метод допустимих напружень

За методом допустимих напружень потрібно, щоб максимальне напруження в стержні не перевищувало так званого допустимого $[\sigma]$.

Із умови міцності (1.1) припускаючи, що діюче напруження дорівнює допустимому, отримаємо:

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]. \tag{1.9}$$

З цього рівняння можна визначити необхідну площу при заданому навантаженні або, навпаки, силу, що допускається при заданих розмірах перетину. При цьому допустимі напруження визначають за формулою (1.5).

Необхідність введення коефіцієнтів запасу міцності пояснюється наступними обставинами:

а) діапазоном у величинах $\sigma_{\text{гр}}$ або $\sigma_{\text{в}}$ для даного матеріалу;

б) неможливістю точно встановити діючі навантаження;

в) неточністю прийнятих методів розрахунку (наприклад, неврахуванням місцевих напружень);

г) неточністю виготовлення деталей.

При призначенні коефіцієнтів запасу, а значить і допустимих напружень, крім перерахованих вище міркувань необхідно також враховувати й інші чинники:

1) якість і ступінь однорідності матеріалу. Наприклад, для сталі коефіцієнт запасу приймається ~ 1,5, для бетону ~ 3, для природного каменю, матеріалу досить неоднорідного, коефіцієнт запасу приймається ~ 10;

2) довговічність і значимість споруди або машини. Якщо, наприклад, із однакової сталі виготовляється постійний міст з терміном служби 50 - 70 років і тимчасовий міст з терміном служби 3 - 5 років, то, природно, в останньому випадку коефіцієнт запасу повинен бути менше;

3) рівень розвитку техніки. З розвитком техніки підвищуються якість виготовлення матеріалу і точність обробки деталей, точність розрахунків. Тому з часом коефіцієнти запасу зменшуються, а допустимі напруження збільшуються.

1.2.3. Метод граничних станів

Одним коефіцієнтом запасу міцності важко врахувати численні фактори, які для різних споруд можуть проявлятися в різних поєднаннях.

Для більш повного врахування впливу різних чинників будівельні конструкції в даний час розраховуються за більш прогресивним методом граничних станів.

Граничним станом називається такий стан конструкції, при якому вона перестає задовольняти заданим експлуатаційним вимогам.

Метод розрахунку за граничним станом має на меті не допускати настання граничних станів при експлуатації і зведенні конструкцій. Граничні стани поділяються на дві групи.

Перша група – за втратою несучої здатності (внаслідок руйнування) або непридатності до експлуатації (внаслідок текучості матеріалу, зсувів у з'єднаннях та інших чинників).

Друга група – за непридатністю до нормальної (без обмежень) експлуатації (внаслідок неприпустимих переміщень, коливань і тріщин).

Класифікація граничних станів прийнята за ознакою їх відповідальності за ступенем втрати експлуатаційної здатності.

Розглянемо розрахунок конструкцій за першою групою граничних станів внаслідок втрати несучої здатності при розтягуванні.

Перевірка міцності проводиться за формулою розрахункового напруження

$$\sigma_{\text{розрах}} = \frac{N}{A} \leq R, \tag{1.10}$$

де R – розрахунковий опір матеріалу - опір, що приймається при розрахунку даної конструкції:

$$R = \frac{R_{\text{н}}}{k} \leq R, \tag{1.11}$$

де $R_{\text{н}}$ – нормативний опір матеріалу, який встановлюється нормами проектування з урахуванням умов контролю і статистичної мінливості. Величина нормативного опору може дорівнювати величині контрольної або бракувальної характеристики матеріалу (границі текучості або границі міцності), яка встановлюється державним стандартом;

k – коефіцієнт безпеки по матеріалу (приймається не менше 1,1), що враховує можливі відхилення опору матеріалу від нормативного. Значення коефіцієнтів безпеки встановлюються нормами проектування в залежності від властивостей матеріалу, їх статистичної мінливості і нестатистичних факторів (наприклад, відмінність опору матеріалу в конструкції і зразках, допуски в розмірах профілів та ін.);

N – розрахункове зусилля, що прийняте при розрахунку елементів конструкції:

$$N = N_{н1} \cdot n_1 + N_{н2} \cdot n_2 + \cdots,$$

де $N_{н1}$, $N_{н2}$, ... – зусилля, що виникають в елементах конструкції від різних видів нормативних навантажень, які встановлюються нормами проектування;

n_1, n_2, ... – коефіцієнти перевантаження, що враховують випадкові відхилення навантажень від нормативних значень внаслідок мінливості навантажень або відступів від умов нормальної експлуатації. Значення коефіцієнтів перевантаження встановлюються нормами проектування для кожного виду граничного стану з урахуванням значущості споруд та умов їх експлуатації;

A – геометрична характеристика перерізу (при розтягуванні і стисканні - площа перерізу).

При необхідності розрахунковий опір ще зменшують шляхом введення коефіцієнтів умов роботи m, що враховують особливості роботи матеріалу і конструкції, які знайшли відображення в розрахунку прямим шляхом (наприклад, наближеність розрахункової схеми і передумов розрахунку, температура, вологість і агресивність середовища, тощо) і коефіцієнтів надійності $k_н$, що враховують ступінь відповідальності та капітальності конструкції, а також значущості настання даного граничного стану.

2. Алгоритм вирішення статично невизначених стержневих систем

Розглянемо стержневу систему, яка наведена на рисунку 1.1,а. Для збільшення вантажопідйомності вона має 3 стержні. Нехай стержні 1 та 3 – однакові й мають жорсткість E_1A_1, а другий – виготовлений з іншого матеріалу і має жорсткість E_2A_2. Також відомі допустимі напруження для матеріалів цих стержнів, відповідно $[\sigma_1]$ та $[\sigma_2]$. Треба знайти максимально допустиме навантаження $\boldsymbol{F}$. Знайдемо сили, які діють у стержнях. Для цього розглянемо рівновагу точки *A (*рис. 2.1).

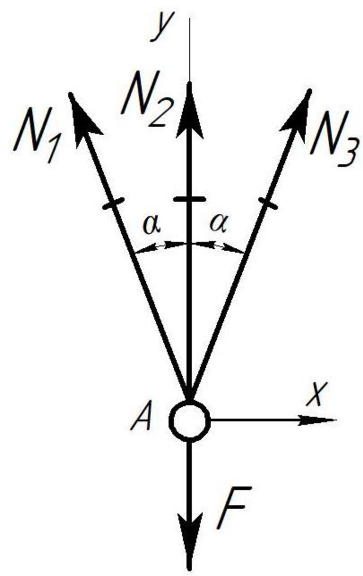


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема сил.

Складемо систему рівнянь рівноваги:

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0\,; & (2.1) \\ \sum Y = N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha + N_2 - F = 0\,; & (2.2) \\ \sum M_A = 0. & (2.3) \end{cases}$$

Система рівнянь має три невідомих, а кількість рівнянь статики для такої системи – можна скласти два. Отже, одне невідоме – «зайве». *Кількість «зайвих» невідомих визначає ступінь статичної невизначеності*.

Система, яку розглядаємо, є один раз статично невизначеною.

Із рівняння (2.1) отримаємо:

$$N_1 = N_3.$$

Тоді рівняння (2.2) прийме вигляд:

$$N_2 + 2N_1 \cos\alpha - F = 0. \tag{2.4}$$

Для подальшого розв'язання задачі в доповнення до процесу рівноваги треба розглянути переміщення в системі (рис. 2.2). Точка А переміститься в положення A_1, при цьому, враховуючи гіпотезу про малі деформації, можна вважати, що кут α при точці А не змінює своєї величини.

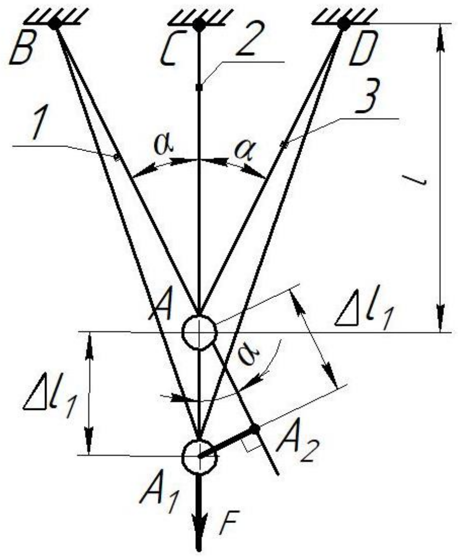


Рисунок 2.2 – Схема деформацій заданої конструкції.

Для визначення подовження першого або третього (вони ідентичні) стержня з точки A_1 опустимо $\perp$ A_1A_2 на BA (взагалі потрібно було б радіусом, що дорівнює BA_1, відтяти таку ж довжину на BA, але внаслідок зникаючої малості кута α це буде практично одне й те ж саме).

Тоді відрізок AA_2 і буде подовженням Δl_1 першого стержня, а відрізок AA_1 – подовженням другого стержня Δl_2.

Запишемо співвідношення між ними:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha. \tag{2.5}$$

Це рівняння називають *рівнянням сумісності деформацій*. Таких рівнянь потрібно записати стільки (розглядаючи відповідні переміщення), скільки є «зайвих» невідомих (тобто за ступенем статичної невизначеності).

Рівняння сумісності деформацій записане у вигляді (2.5) не може бути розв'язане сумісно з системою рівнянь (2.1-2.3) Тому спочатку потрібно, використавши закон Гука, переписати рівняння (2.5) у такому вигляді:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}\cos\alpha, \tag{2.6}$$

де: l_1 – довжина першого стержня, $l_1 = \frac{l}{cos\alpha}$;

l_2 – довжина другого стержня, $l_2 = l$.

Виразимо із (2.6) спочатку N_1, а потім N_2:

$$N_1 = N_2 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} cos^2\alpha, \tag{2.7}$$

$$N_2 = N_1 \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 \cdot cos^2\alpha}. \tag{2.8}$$

А тепер, підставляючи по черзі рівняння (2.7) та (2.8) у рівняння (2.4), після невеличких перетворень отримаємо:

$$N_1 = N_3 = \frac{F E_1 A_1 \cdot cos^2\alpha}{2 E_1 A_1 cos^3\alpha + E_2 A_2}, \tag{2.9}$$

$$N_2 = \frac{F E_2 A_2}{2 E_1 A_1 cos^3\alpha + E_2 A_2}. \tag{2.10}$$

З виразів (2.9) та (2.10) витікає, що сили в елементах статично невизначеної системи залежать не тільки від системи зовнішніх сил та геометрії системи, як у випадку статично визначеної системи, але й від співвідношення жорсткості цих елементів, причому чим більшу жорсткість має стержень, тим більшу частину навантаження він бере на себе.

Далі від внутрішніх зусиль переходимо до напружень:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F E_1 cos^2\alpha}{2 E_1 A_1 cos^3\alpha + E_2 A_2}, \tag{2.11}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F E_2}{2 E_1 A_1 cos^3\alpha + E_2 A_2}. \tag{2.12}$$

Розрахунок за допустимими напруженнями.

Запишемо умови міцності відповідно:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{FE_1 cos^2\alpha}{2E_1A_1cos^3\alpha + E_2A_2} \leq [\sigma], \tag{2.13}$$

$$\sigma_2 = \frac{FE_2}{2E_1A_1cos^3\alpha + E_2A_2} \leq [\sigma]. \tag{2.14}$$

З цих двох виразів отримаємо два значення допустимого навантаження $[F]$ Для подальших розрахунків виберемо, безумовно, *найменше* з цих двох значень.

Цікавим буде випадок, коли жорсткість середнього стержня така ж сама, як і жорсткість крайніх стержнів.

Тобто $E_1 = E_2 = E, A_1 = A_2 = A$.

Тоді формули (2.9) – (2.14) набудуть такого вигляду:

$$N_2 = \frac{F}{2cos^3\alpha + 1}, \tag{2.15}$$

$$N_1 = \frac{Fcos^2\alpha}{2cos^3\alpha + 1}, \tag{2.16}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A(2cos^3\alpha + 1)}, \tag{2.17}$$

$$\sigma_1 = \frac{Fcos^2\alpha}{A(2cos^3\alpha + 1)}. \tag{2.18}$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $\sigma_2 \geq \sigma_1$, тому що $cos^3\alpha \leq 1$. Тоді умова міцності буде виглядати так:

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{F}{A(2cos^3\alpha + 1)} \leq [\sigma]. \tag{2.19}$$

Розглянутий метод розрахунку статично невизначених систем називають *розрахунком за допустимими напруженнями.*

Температурні напруження.

Зміна температури стержнів статично невизначених систем викликає температурні деформації, які, як правило, не задовольняють умовам сумісності деформацій. Тому в стержнях виникають пружні напруження і відповідні їм пружні деформації. Загальні деформації, що складаються з пружних і температурних повинні задовольняти рівнянням сумісності деформацій.

Розглянемо стержень, жорстко закріплений з обох кінців (рис. 2.3).

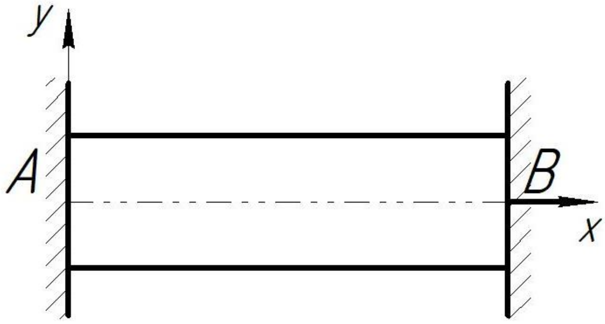


Рисунок 2.3 – Стержень, жорстко закріплений з обох кінців.

Нехай відомі його механічні параметри: довжина $-$ l, площа поперечного перерізу $-$ A, модуль пружності I роду $-$ E, коефіцієнт лінійного температурного розширення $-$ α_t.

Цей стержень закріплено при температурі t_0 в опорах А і В, після чого температура піднялася на Δt. Необхідно розрахувати напруження, які при цьому виникають у стержні.

Внаслідок температурного впливу стержень намагається розширитися, але це йому не вдається завдяки жорсткому закріпленню кінців (рис. 2.4).

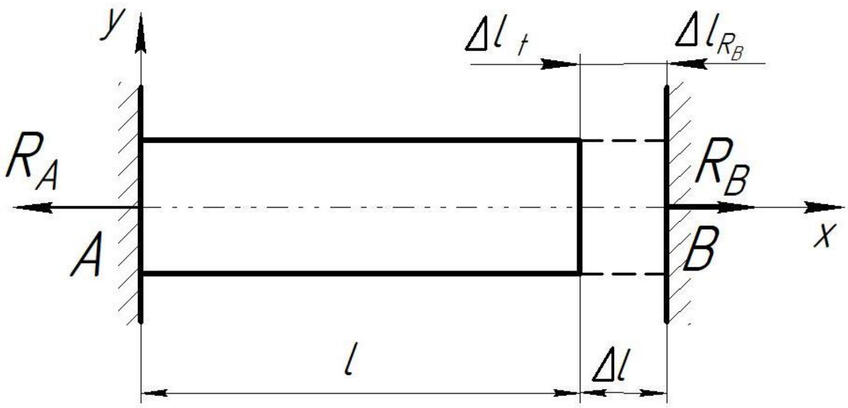


Рисунок 2.4 – Стержень під час температурного розширення та сили, що виникають при нагріванні.

Якщо стержень від температури нагрівається, то необхідно визначати напруження від температурного розширення.

Розглянемо визначення опорних реакцій, які виникають в стержнях $R_{\text{А}}$ та $R_{\text{В}}$ під час нагрівання (рис. 2.4).

Розглядаючи рівновагу за допомогою рівнянь статистики, запишемо:

$$\sum X = R_{\text{А}} - R_{\text{В}} = 0. \tag{2.20}$$

Звідси отримаємо: $R_{\text{А}} = R_{\text{В}}.$

Рівняння статистики одне, а невідомих – два. Система один раз статично невизначена. Складаємо рівняння сумісності деформації, розглядаючи можливі температурні деформації Δl_t та деформації за рахунок реакції $R_{\text{В}}$ $-\Delta l(R_{\text{В}})$.

$$\Delta l_t = \Delta l(R_{\text{В}}).$$

Або

$$\alpha_t \cdot l \cdot \Delta t = \frac{R_{\text{В}} l}{E\text{А}}. \tag{2.21}$$

Виразимо з рівняння (2.21) значення для $R_{\text{В}}$. Тоді отримаємо:

$$R_{\text{В}} = E\text{А} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t. \tag{2.22}$$

Визначимо напруження в стержнях від температурного нагріву з урахуванням (2.22):

$$\sigma = \frac{R_{\text{В}}}{\text{А}} = E\alpha_t \Delta t. \tag{2.23}$$

Цікавим є те, що напруження в даному випадку не залежать від довжини стержня.

Монтажні напруження.

Монтажними (початковими) напруженнями називають напруження, що виникають під час збирання статично невизначеної конструкції внаслідок відмінності дійсних геометричних розмірів її елементів від їх проектних розмірів.

Розглянемо систему (рис. 2.5), в якій один із елементів зроблено не за розміром (середній стержень коротший, ніж треба), але всі стержні треба з'єднати в одній точці ***B***. Складемо схему розподілу сил, що виникають у стержнях (рис. 2.6). Нехай стержні зроблено з одного й того ж матеріалу і мають однаковий поперечний переріз.

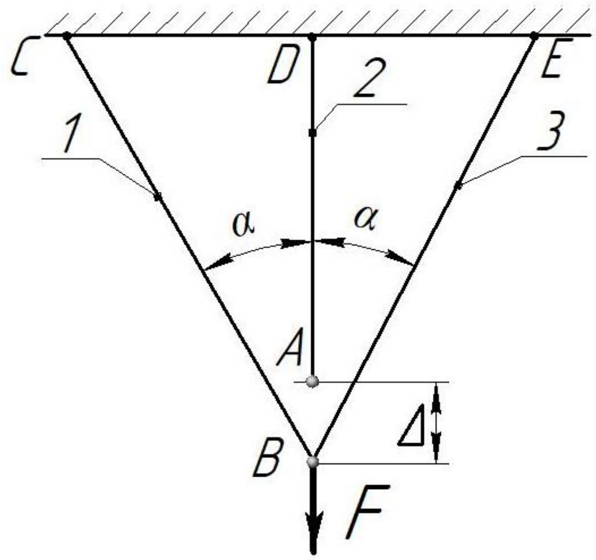


Рисунок 2.5 – Система, в якій виникають монтажні напруження

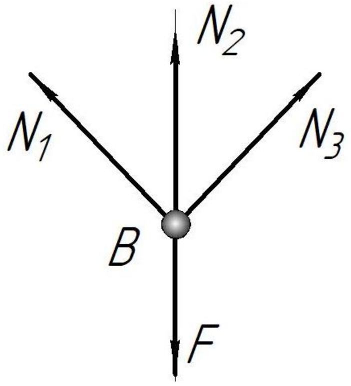


Рисунок 2.6 – Схема розподілу сил

Розглядаючи т. **В**, в якій з’єднуються всі три стержні при монтажі, можна скласти три рівняння статики:

$$\begin{cases} \sum X = -N_1 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0; \\ \sum Y = N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha - N_2 = 0; \\ \sum M_{\text{В}} = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Очевидно, що система є один раз статично невизначеною. Розглянемо сумісність деформацій стержнів.

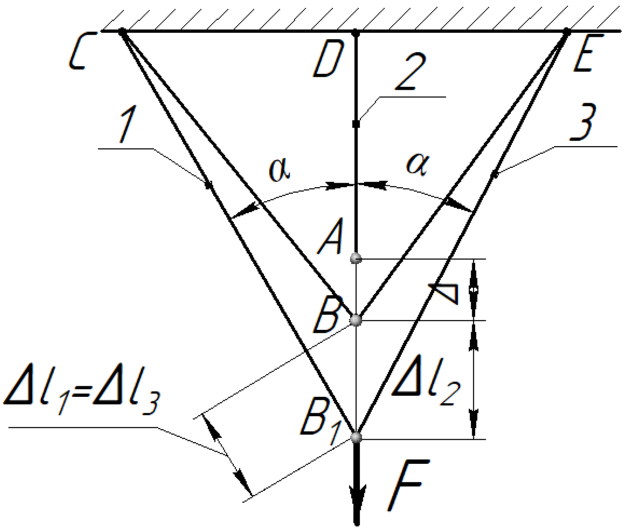


Рисунок 2.6 – Схема деформацій в системі

З рисунку 2.6 видно, що:

$$\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} + \Delta l_2 = \Delta. \qquad (2.25)$$

Використовуючи закон Гука, отримуємо ще одне рівняння:

$$\frac{N_1 l_1}{EF\cos\alpha} + \frac{N_2 l_2}{EF} = \Delta. \qquad (2.26)$$

Яке розв’язуватиметься разом із системою (2.24). Таким чином, можна зробити висновок, що розв’язок наведених задач зводиться до розгляду статично невизначних систем.

3. Приклади розв'язання задач

Задача 3.1 Розрахунок стержневої системи з прямими стержнями

Жорсткий брус (рис. 3.1.1) підтримується неподатливою опорою А і двома стержнями. **Необхідно визначити:**

1. Зусилля у стержнях при навантаженні бруса зосередженою силою.

2. Нормальні напруження в перерізах стержнів.

Вихідні дані: F = 50кН; a = 4м; b = c = 2м; A = 10см^2.

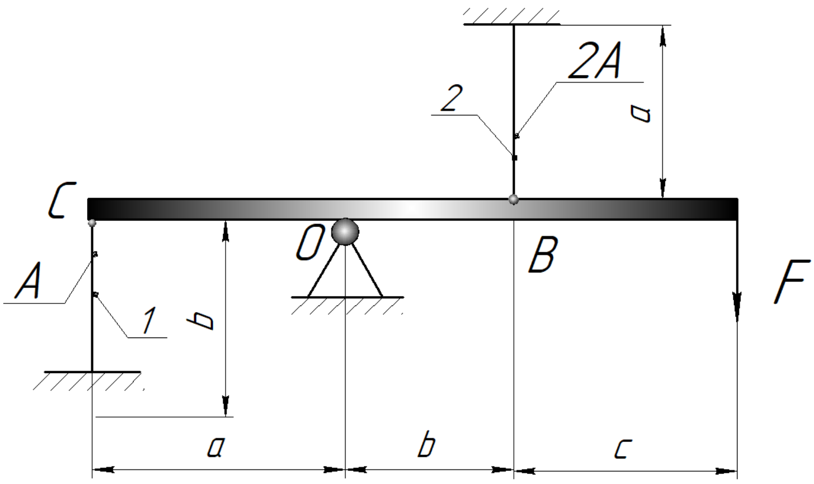


Рисунок 3.1.1 – Розрахункова схема

Розв'язання.

1) Звільняємо систему від зв'язків та складаємо схему сил (рис.3.1.2,б);

2) Визначаємо ступінь статичної невизначеності.

Задача один раз статично невизначена, бо, маючи чотири невідомих (два зусилля в стержнях N_1 та N_2 і дві складові реакції опори R_{ay} та R_{ax}), можна скласти лише три рівняння статики.

$$\boldsymbol{W = H - P = 4 - 3 = 1},$$

де: Н – кількість невідомих, Н = 4;

Р – кількість рівнянь статики, Р = 3;

Оскільки реакції на опорі нас не цікавлять, використаємо лише одне рівняння статики – рівняння моментів відносно опорної точки А.

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot b - F \cdot (b + c) = 0 \qquad (3.1.1)$$

3) Складаємо схему деформацій (рис.3.2, в).

Рівняння сумісності деформацій складемо, розглядаючи переміщення бруса. Використовуючи подібність трикутників, дістанемо необхідне для розв'язання задачі друге рівняння:

$$\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1;$$

$$\frac{\mathrm{CC_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}.$$

Приймаючи до уваги, що

$$\mathrm{CC_1} = \Delta\, l_1; \qquad \mathrm{AC} = \mathrm{a} = 4\text{м}$$

$$\mathrm{BB_1} = \Delta\, l_2; \qquad \mathrm{AB} = b = 2\text{м}$$

Отримаємо:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta\, l_1}{\Delta\, l_2} = \frac{4}{2}}; \quad \text{або} \quad \boldsymbol{\Delta\, l_1 = 2\Delta\, l_2}.$$

Підставивши в це рівняння замість Δl_1 і Δl_2 їх вирази, згідно з законом Гука матимемо друге рівняння:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot 2A}.$$

$$\frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A} = 2\frac{N_2 \cdot a}{E \cdot 2A};$$

$$\frac{N_1 \cdot 2}{E \cdot A} = 2\frac{N_2 \cdot 4}{E \cdot 2A};$$

$$N_1 = 2N_2. \tag{3.1.2}$$

Розв'язавши систему двох складених рівнянь (3.1.1) і (3.1.2) знайдемо внутрішні зусилля в стержнях N_1 і N_2;

$$\begin{cases} N_1 \cdot a + N_2 \cdot b - F \cdot (b + c) = 0; \\ N_1 = 2 \cdot N_2. \end{cases}$$

$$2 \cdot N_2 \cdot 4 + N_2 \cdot 2 - 50 \cdot (2 + 2) = 0;$$

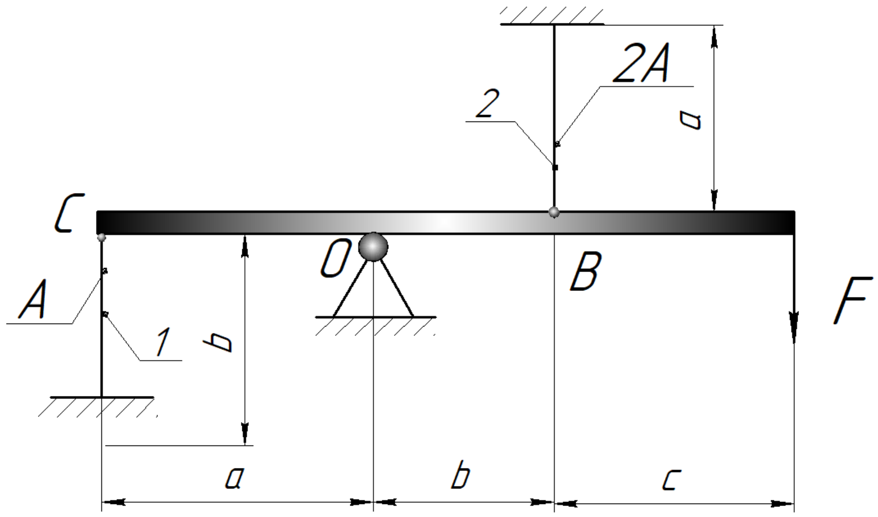
$$8 \cdot N_2 + 2 \cdot N_2 = 200.$$

$$N_2 = \frac{200}{10} = 20 \text{ кН};$$

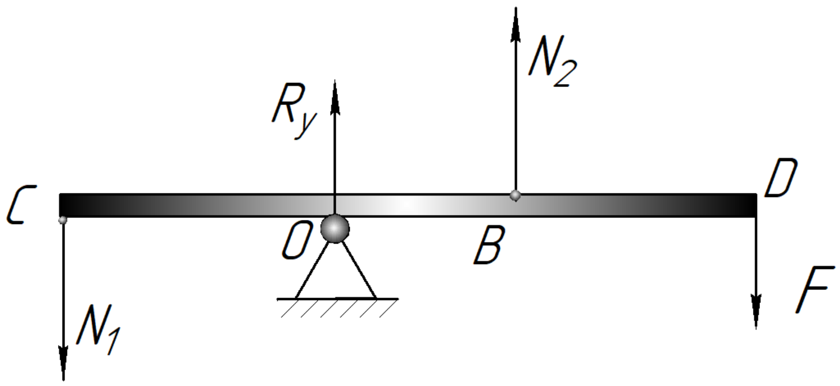
$$N_1 = 2 \cdot N_2 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ кН};$$

$$N_2 = 20 \text{ кН};$$

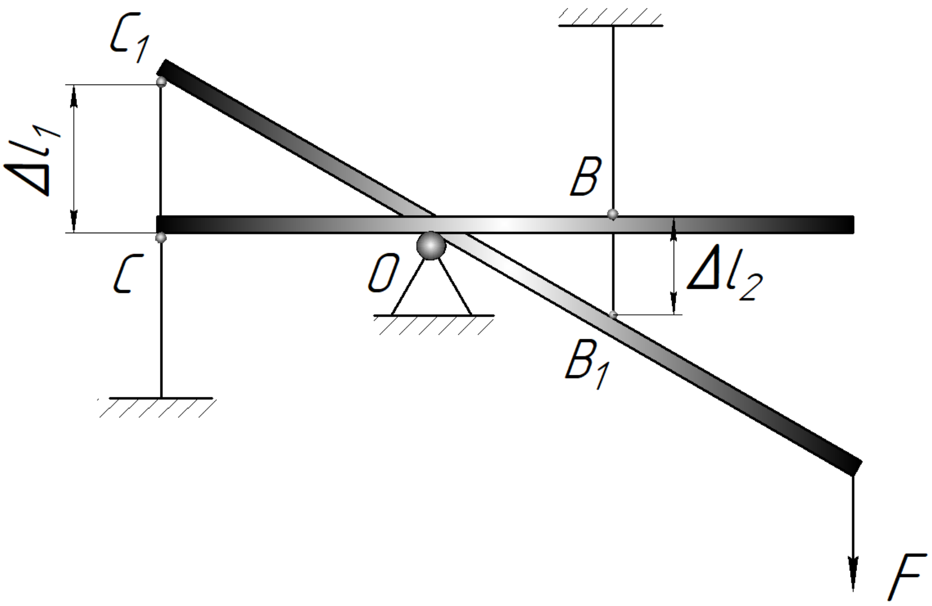
$$N_1 = 40 \text{ кН}.$$



а)



б)



в)

Рисунок 3.1.2 – До розрахунку задачі:

а - розрахункова схема; б - схема сил; в - схема деформацій.

4) Визначаємо нормальні напруження

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 40\text{МПа}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_2}{2 \cdot A} = \frac{20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2} = 10\text{МПа}$$

<u>Висновок</u>: У результаті розрахунку знайдено значення зусиль в стержнях, які забезпечують достатню міцність: $N_1 = 40$ кН, $N_2 = 20$ кН та нормальні напруження, що виникають в поперечних перерізах стержнів: $\sigma_1 = 40\text{МПа}$, $\sigma_1 = 10\text{МПа}$.

Задача 3.2 Розрахунок стержневої системи з одним нахиленим стержнем

Абсолютно жорсткий брус прикріплений до двох стержнів за допомогою шарнірів та спирається на шарнірно-нерухому опору (рис. 3.2.1).

Необхідно визначити*:*

1) внутрішні зусилля в стержнях N_1, N_2;

2) площі поперечного перерізу стержнів A_1, A_2;

3) розрахункове напруження σ_p.

Вихідні дані: F = 1,9 кН, $\alpha = 45^0$, $[\sigma] = 160\text{МПа}$, а = 2,0 м, в = 2,4 м, с = 0,9 м.

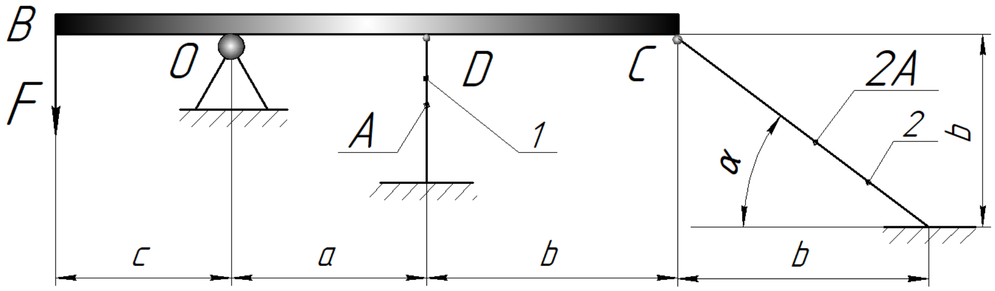


Рисунок 3.2.1 – Розрахункова схема

Розв’язання

1) Визначаємо внутрішні зусилля в стержнях N_1, N_2.

1.1) Складемо додаткове рівняння сумісності деформацій. Приймемо позначення: Δl_1– подовження стержня №1; Δl_2 – подовження стержня №2.

З подібності трикутників Δ ОДД₁ та Δ ОСС₁ (рис. 3.2.2,в) складемо рівняння співвідношення сторін:

$$\frac{\Delta l_2}{\sin 45^{\circ}(a+b)} = \frac{\Delta l_1}{a}.$$

Звідки виразимо подовження стержня Δl_1:

$$\Delta l_1 = \frac{a}{(a+b)\sin 45^{\circ}} \cdot \Delta l_2 = \frac{2}{(2+2{,}4)\cdot 0{,}707} \cdot \Delta l_2 = 0{,}643 \cdot \Delta l_2$$

Отримаємо рівняння сумісності деформацій стержнів:

$$\Delta l_1 = 0{,}643 \cdot \Delta l_2 \qquad (3.2.1)$$

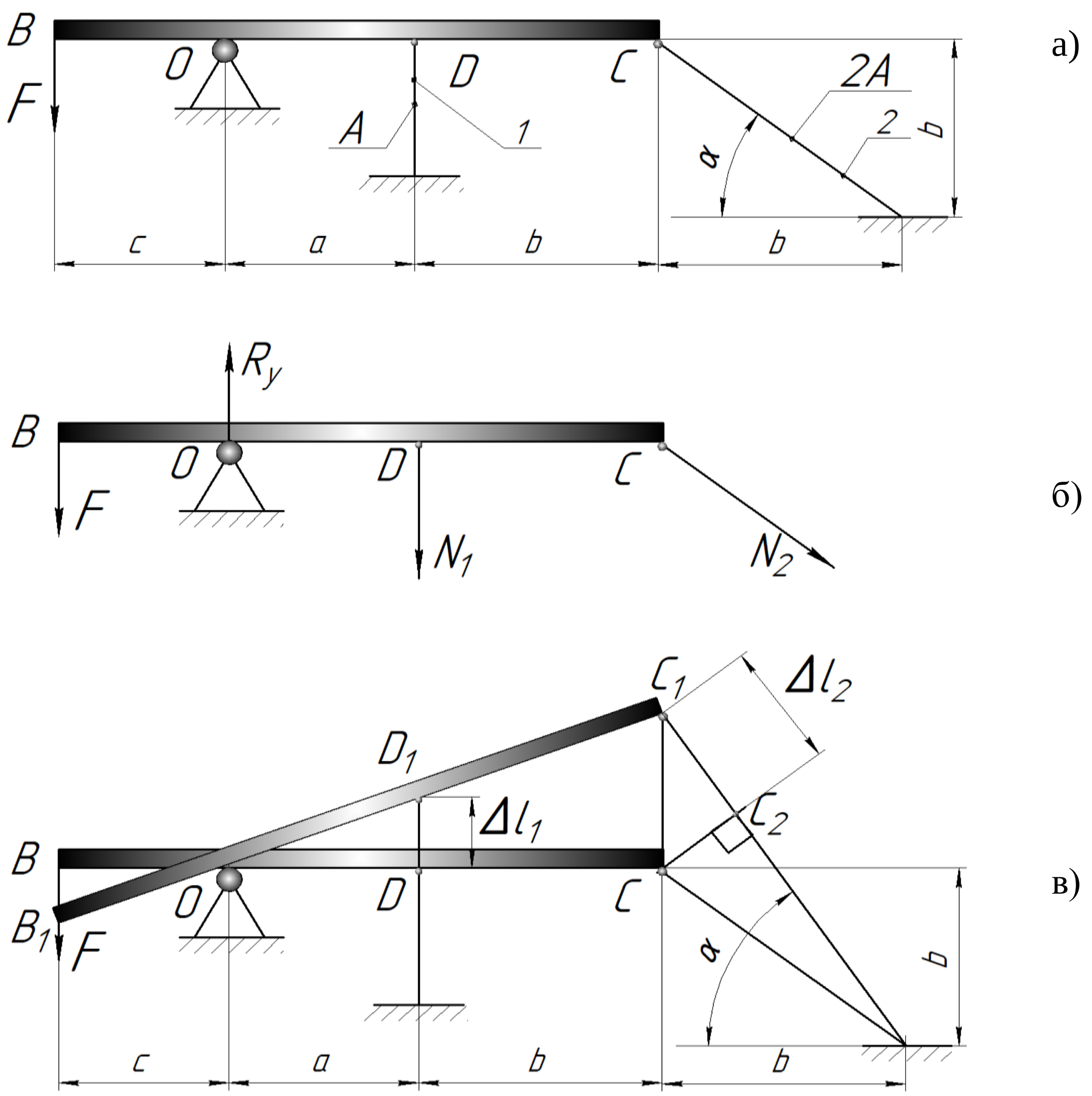


Рисунок 3.2.2 – До розрахунку задачі:

а – розрахункова схема; б – схема сил; в – схема деформацій.

1.2) Виразимо подовження стержнів за законом Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A} = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_2 \cdot l_2}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot b\sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot A}.$$

1.3) Підставимо отримані вирази в рівняння (3.2.1), отримаємо:

$$\frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A} = 0{,}643 \cdot \frac{N_2 \cdot b \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot E \cdot A}.$$

Звідки

$$N_1 = 0{,}643 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_2 = 0{,}455 \cdot N_2. \qquad (3.2.2)$$

1.4) Замінимо стержні 1 та 2 їх внутрішніми зусиллями ($N_1; N_2$) (рис.3.2.2,б) та складемо рівняння статики відносно точки О:

$$\sum M_{(0)} = 0;$$

$$-F \cdot c + N_1 \cdot a + N_2 \cdot sin45^{\circ} \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{1}{a} \cdot [F \cdot c - N_2 \cdot \sin 45^{\circ} \cdot (a + b)];$$

$$N_1 = \frac{1}{2}[1{,}9 \cdot 0{,}9 - N_2 \cdot 0{,}7 \cdot (2 + 2{,}4)] = 0{,}855 - 1{,}555 \cdot N_2$$

1.5) Отриманий вираз підставимо в рівняння (3.2.2):

$$0{,}455 \cdot N_2 = 0{,}855 - 1{,}555 \cdot N_2 \Rightarrow N_2 = \frac{0{,}855}{0{,}455 + 1{,}555} = 0{,}425\text{кН}$$

$$N_1 = 0{,}455 \cdot N_2 = 0{,}455 \cdot 0{,}425 = 0{,}193\text{кН}$$

$$N_2 > N_1$$

$$0{,}425 > 0{,}193 \text{ кН}$$

1.6) Перевіримо розрахунки шляхом підстановки в рівняння статики:

$$\sum M_{(0)} = 0;$$

$$-1{,}9 \cdot 0{,}9 - 0{,}193 \cdot 2 - 0{,}425 \cdot 0{,}707 \cdot (2 - 2{,}4) = -1{,}70 - 1{,}708 \approx 0$$

Розрахунок правильний.

2) Визначимо площі поперечного перерізу стержнів.

2.1) Розрахунок площі поперечного перерізу стержня № 2:

$$2 \cdot A = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{0{,}425 \cdot 10^{-3}}{160} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$$

$$A = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-6}}{2} = 1{,}35 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$$

2.2) Розрахунок площі поперечного перерізу стержня № 1:

$$A = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{0{,}193 \cdot 10^{-3}}{160} = 1{,}21 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$$

За умови задачі маємо, що площа першого стержня $A_1 = A$, а площа другого стержня $A_1 = 2A$. Тому приймемо:

$$\text{A}_1 = 1{,}35 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$$

$$\text{A}_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$$

3) Визначимо нормальні напруження в стержнях.

3.1) Розрахунок нормального напруження в стержні №1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{0{,}193 \cdot 10^{-3}}{1{,}35 \cdot 10^{-6}} = 145\text{МПа}$$

$$\sigma_1 = 145\text{МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

3.2) Розрахунок нормального напруження в стержні №2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{0{,}425 \cdot 10^{-3}}{2{,}7 \cdot 10^{-6}} = 157{,}4\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = 145\text{МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Висновок: Для обох стержнів умова міцності виконується**.** Знайдено значення площі поперечного перерізу обох стержнів $\text{A}_1 = 1{,}35 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$, $\text{A}_2 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\text{м}^2$, які забезпечують достатню міцність.

Задача 3.3 Розрахунок стержневої системи з одним нахиленим стержнем по допустимим напруженням і допустимим навантаженням

Абсолютно жорсткий брус прикріплений до двох стержнів за допомогою шарнірів та спирається на шарнірно-нерухому опору (рис. 3.3.1).

Необхідно визначити:

1) знайти зусилля і напруження в стержнях, виразивши їх через силу F;

2) знайти допустиме навантаження $[F]$, прирівнявши більше з напружень в двох стержнях допустимому напруженню [σ] = 160МПа;

3) знайти граничну вантажопідйомність системи і допустиме навантаження $[F]$, якщо задано границю текучості і коефіцієнт запасу міцності;

4) порівняти величину $[F]$, що отримана при розрахунку за методом допустимих напружень та за методом допустимих навантажень.

Вихідні дані: $\text{A} = 16с\text{м}^2, a = 2{,}6\text{м}, b = 2{,}6\text{м}, c = 1{,}6 \text{ м}, F = 1600H,$

$\sigma_{т} = 240$МПа; $n = 1{,}5$.

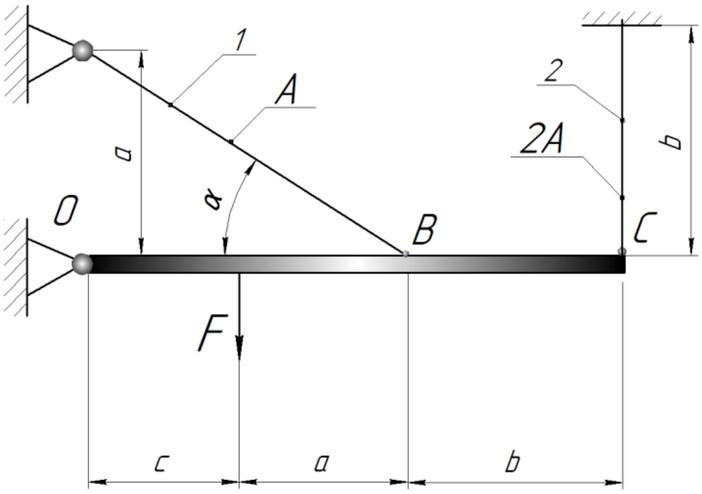


Рисунок 3.3.1 – Схема конструкції

Розв'язання

1) Визначаємо внутрішні зусилля в стержнях N_1, N_2.

1.1) Складемо розрахункову схему і покажемо внутрішні зусилля в стержнях (рис.3.3.2, а і б).

1.2) Визначимо ступінь статичної невизначеності:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{H} - \text{Р} = \mathbf{4} - \mathbf{3} = \mathbf{1},$$

де: Н - кількість невідомих реакцій, Н = 4;

Р - кількість рівнянь статики, Р = 3.

Система статично невизначена 1 раз, отже, необхідно скласти одне додаткове рівняння для вирішення заданої системи.

1.3) Складемо рівняння статики. Для початку розкладемо силу N_1 на складові:

$$N_1^B = N_1 \cdot sin\alpha; \qquad N_1^Г = N_1 \cdot cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{a}{(a+b)} = \frac{2{,}6}{(2{,}6+2{,}6)} = 0{,}5 \quad \rightarrow$$

$$\alpha = 26{,}565^0$$

Складемо рівняння рівноваги відносно т. А:

$$\sum M_A = 0;$$

$$N_1 \cdot sin\alpha \cdot (a + b) + N_2 \cdot (a + b + c) - F \cdot a = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad 2{,}34N_1 + 6{,}8N_2 = 2{,}6F \qquad (3.3.1)$$

1.4) Складемо додаткове рівняння сумісності деформацій і переміщень. Для цього зобразимо розрахункову схему в деформованому вигляді (рис.3.3.2, в).

Розглянемо два трикутника:

$$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1.$$

У подібних трикутників співвідношення сторін рівні:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CC_1}}.$$

Приймаючи до уваги, що

$$\mathrm{CC_1} = \Delta\, l_2; \qquad \mathrm{AC} = \mathrm{a} + b + c = 2{,}6 + 2{,}6 + 1{,}6 = 6{,}8\text{м}$$

$$\mathrm{BB_1} = \frac{\Delta\, l_1}{sin\alpha}; \qquad \mathrm{AB} = a + b = 2{,}6 + 2{,}6 = 5{,}2\text{м}$$

Отримаємо:

$$\frac{(a+b)sin\alpha}{\Delta\, l_1} = \frac{\mathrm{a} + b + c}{\Delta\, l_2};$$

$$\Delta\, l_1 = \frac{\Delta\, l_2 (a+b) sin\alpha}{\mathrm{a} + b + c} = \frac{2{,}107 \Delta\, l_2}{6{,}8} = 0{,}34 \Delta\, l_2.$$

Або:

$$\boldsymbol{\Delta\, l_1 = 0{,}34 \cdot \Delta\, l_2}.$$

(3.3.2)

Згідно з законом Гука матимемо:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A \cdot sin\alpha}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A}.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння (3.3.2):

$$\frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A \cdot sin\alpha} = 0{,}34 \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A},$$

$$\frac{N_1 \cdot 2{,}6}{0{,}45} = 0{,}34 \frac{N_2 \cdot 2{,}6}{2},$$

$$N_1 = 0{,}076 N_2. \qquad (3.3.3)$$

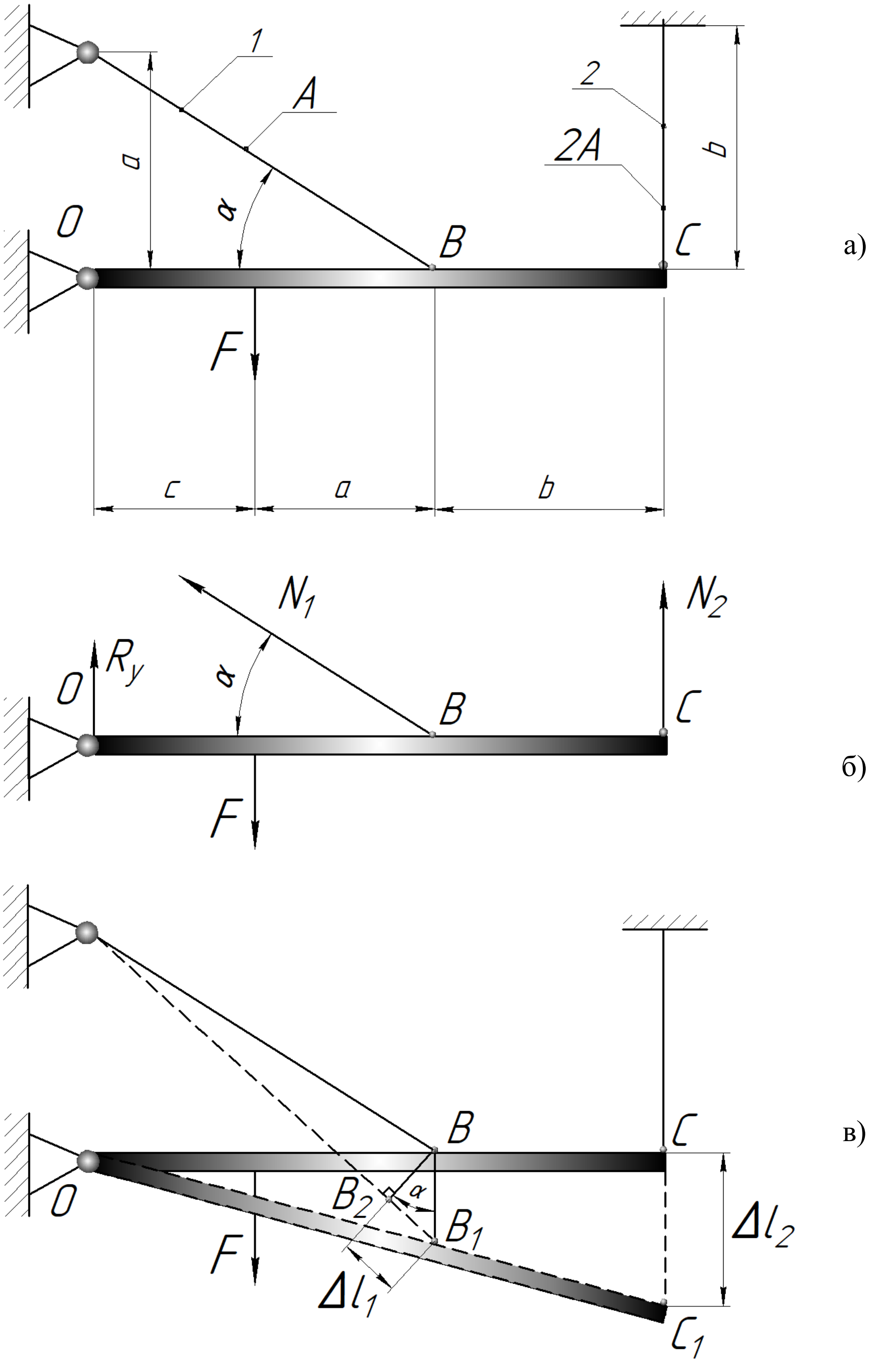


Рис. 3.3.2 – До розрахунку задачі:

а – розрахункова схема; б – схема сил; в – схема деформацій.

Вирішимо систему рівнянь (3.3.1) і (3.3.3):

$$\begin{cases} 2{,}34N_1 + 6{,}8N_2 = 2{,}6F \\ N_1 = 0{,}076N_2 \end{cases}$$

$$2{,}34 \cdot 0{,}076N_2 + 6{,}8N_2 = 2{,}6F$$

$$1{,}18N_2 + 6{,}8N_2 = 2{,}6F$$

$$N_2 = 0{,}375F$$

$$N_1 = 0{,}076N_2 = 0{,}076 \cdot 0{,}375F = 0{,}03F$$

В результаті отримаємо:

$$N_2 = 0{,}375F;$$

$$N_1 = 0{,}03F$$

2) Визначаємо напруження в стержнях:

- Для першого стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{0{,}03F}{16 \cdot 10^{-4}}; \Rightarrow \sigma_1 = 18{,}75F$$

- Для другого стержня:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2F} = \frac{0{,}375F}{32 \cdot 10^{-4}}; \Rightarrow \sigma_2 = 117{,}2F$$

3) Визначаємо допустиме навантаження $F_{доп}$:

Так як е другому стержні напруження більше ніж е першому, то розрахунок проведемо для другого стержня:

$$\sigma_{max} = \sigma_2 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{max} = 117{,}2F \leq 160;$$

$$[F] = 1365187\text{Н} = 1365\text{кН}$$

4) Визначаємо значення вантажопідйомності з розрахунку по методам допустимих напружень та руйнівних навантажень при одному і тому ж коефіцієнті запасу міцності.

4.1) Вантажопідйомність з розрахунку за методом допустимих напружень.

Вантажопідйомність за методом допустимих напружень визначимо за умови, що найбільше напруження не повинно перевищувати допустиме напруження.

Найбільше напруження у другому стержні:

$$\sigma_{max} = 117{,}2\mathrm{A} \leq [\sigma];$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n} = \frac{240}{1{,}5} = 160\text{МПа}$$

$$[F_\sigma] = 1365187\text{Н} = 1365\text{кН}$$

Вантажопідйомність системи складає:

$$[F_\sigma] = 1365\text{кН}$$

4.2) Вантажопідйомність з розрахунку за методом руйнівних навантажень.

Повного вичерпання несучої здатності даної системи відповідає поява текучості в обох стержнях. Руйнівне навантаження визначимо з рівняння моментів відносно точки $\boldsymbol{O}$:

$$\sum M_{\mathrm{O}} = 0;$$

$$\sigma_{\text{т}} \cdot N_1 \cdot sin\alpha \cdot (a + b) + \sigma_{\text{т}} \cdot N_2 \cdot (a + b + c) - F_p \cdot a = 0;$$

$$\sigma_{\text{т}} \cdot N_1 \cdot 2{,}34 + \sigma_{\text{т}} \cdot N_2 \cdot 6{,}8 - F_p \cdot 2{,}6 = 0;$$

$$F_p = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot (2{,}34 \cdot 16 \cdot 10^{-4} + 6{,}8 \cdot 32 \cdot 10^{-4})}{2{,}6} = 2354215\text{Н} = 2354\text{кН}$$

Допустиме навантаження буде дорівнювати:

$$[F_p] = \frac{F_p}{n} = \frac{2354}{1{,}5} = 1569\text{кН}$$

Співставимо отримані результати:

$$[F] = \frac{[F_p]}{[F_\sigma]} = \frac{1569}{1365} = 1{,}15$$

Висновок: Вантажопідйомність за методом руйнівних навантажень більше вантажопідйомності за методом допустимих напружень у 1,15 рази.

Задача 3.4 Розрахунок стержневої системи з урахуванням неточностей монтажу та температурного розширення.

Для схеми, зображеної на рис. 3.4.1. **необхідно визначити**:

1) Площу поперечного перерізу стержнів при дії навантаження F і підібрати кутову нерівнополичну сталь, за умови, що поперечний переріз одного зі стержнів в два рази більше, ніж інший.

2) Напруження в стержнях:

- від дії навантаження F;

- від неточності монтажу, якщо вважати, що один зі стержнів виконано коротше на величину **Δ**;

- від зміни температури, якщо задано коефіцієнт температурного розширення α.

3) Сумарні напруження від дії зовнішніх сил, неточності монтажу і від зміни температури.

4) Підрахувати недонапруження або перенапруження в стержнях.

Вихідні дані: $F = 100$кН, $\mathrm{a} = 1{,}2$м, $b = 0{,}8$м, $\Delta = 0{,}2$мм, $\Delta t = 20°$С,

$$\mathrm{E} = 2{\cdot}10^5\text{МПа}, \alpha = 125{\cdot}10^{-7}\frac{1}{\text{гр}}, [\sigma] = 100\text{МПа}.$$

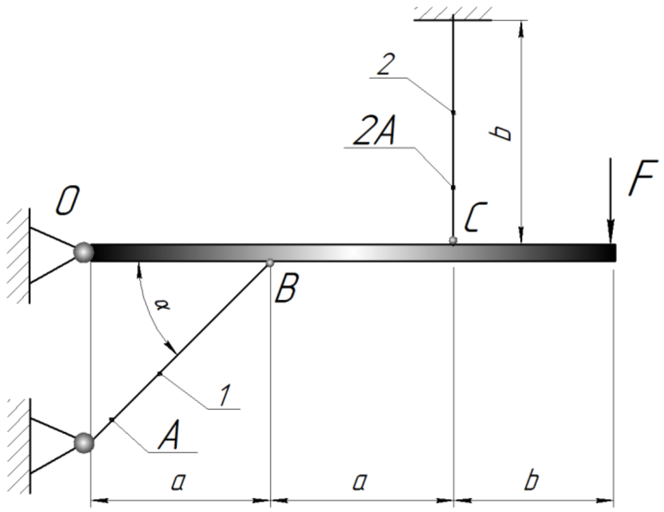


Рисунок 3.4.1. – Схема конструкції

Розв'язання

1. Визначаємо площу поперечного перерізу стержнів

1.1) Для визначення необхідної за умовою міцності площі поперечного перерізу стержнів звернемося до рис. 3.4.2.

1.2) Визначимо ступінь статичної невизначеності:

W = Н – Р = 4 – 3 = 1,

де: Н - кількість невідомих, Н=4;

Р - кількість рівнянь статики, Р=3.

1.3) Складаємо рівняння статики, розглядаючи схему сил для заданої конструкції (рис. 3.4.2,б) – статична сторона задачі:

$$\begin{cases} \sum X = 0\,; \quad N_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A = 0\,; \\ \sum Y = 0\,; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ + Y_A + N_2 - F = 0\,; \\ \sum M_A = 0\,; \quad N_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0 \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

1.4) Розглянемо конструкцію у деформованому стані (рис. 3.4.2,в). Виходячи із правила подібності трикутників $\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$, складемо додаткове рівняння сумісності деформацій – геометрична сторона задачі:

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC};$$

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^0}; \qquad CC_1 = \Delta l_2$$

$$AB = a; \qquad AC = 2a$$

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \cos 45^0} = \frac{\Delta l_2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta l_1}{\cos 45^0} = \frac{\Delta l_2}{2}.$$

1.4) Виразимо подовження через закон Гука - фізична сторона задачі:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E\mathrm{A}_1} = \frac{N_1 \cdot a}{E\mathrm{A} \cdot \cos 45^0};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E\mathrm{A}_2} = \frac{N_2 \cdot b}{E2\mathrm{A}}.$$

1.5) Підставами вирази, які було отримано при вирішенні фізичної сторони задачі, у вирази з геометричного боку завдання:

$$\frac{N \cdot a}{E\mathrm{A} \cdot (\cos 45^0)^2} = \frac{N_2 \cdot b}{4E\mathrm{A}};$$

$$8N_1 a = N_2 b;$$

$$N_1 = \frac{N_2 b}{8a}. \qquad (3.4.2)$$

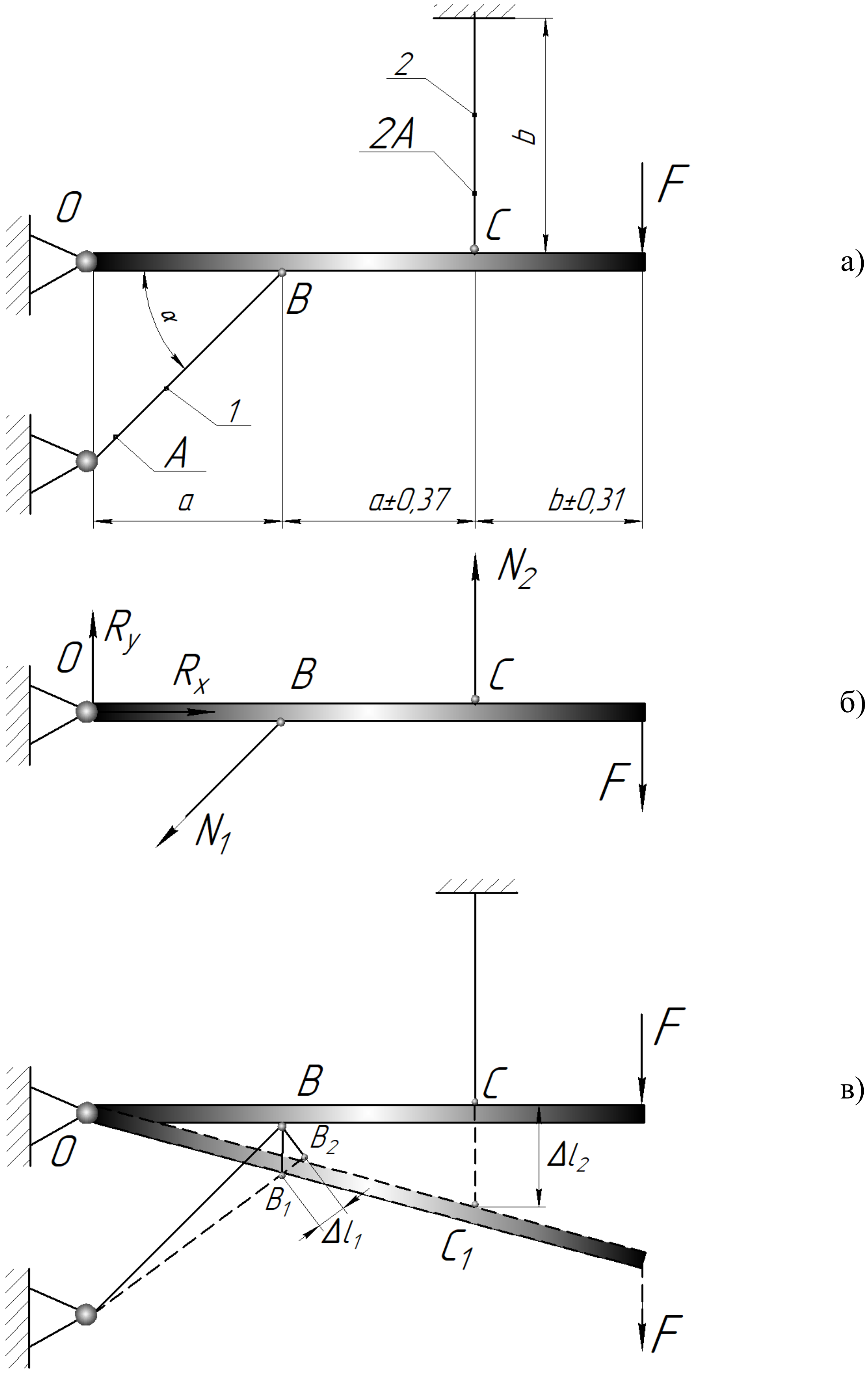


Рисунок 3.4.2. – До розрахунку задачі:

а – розрахункова схема; б – схема сил; в – схема деформацій.

1.6) Вирішимо разом систему рівнянь (3.4.1) і (3.4.2):

$$\begin{cases} N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a+b) = 0; \\ N_1 = \dfrac{N_2 b}{8a} \end{cases}$$

$$\frac{N_2 b}{8a} \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a+b) = 0$$

$$2{,}471 N_2 = 320$$

$$N_2 = 129{,}5 \text{ кН}$$

$$N_1 = \frac{129{,}5 \cdot 0{,}8}{8 \cdot 1{,}2} = 10{,}8\text{кН}$$

1.7) Визначимо площу поперечного перерізу стержнів.

Спочатку визначимо, який із стержнів навантажений сильніше:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\text{A}} = \frac{10{,}8}{\text{A}}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2\text{A}} = \frac{129{,}5}{2\text{A}} = \frac{64{,}8}{\text{A}}$$

Другий стержень є більш навантаженим, так як $\sigma_2 > \sigma_1$**,** тому запишемо для нього умову міцності і визначимо площу поперечного перерізу:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2\text{A}} \le [\sigma] \Rightarrow \text{A} \ge \frac{N_2}{2[\sigma]} = \frac{129{,}5 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 6{,}48 \cdot 10^{-4}\text{м}^2 = 6{,}48\text{см}^2$$

Підбираємо за довідником сортаменту кутову рівнополичну сталь № 70×5 згідно з ГОСТ8509-86 (A = 6,86 см^2).

2) Визначаємо напруження в стержнях від зовнішніх сил

$$\sigma_{1(F)} = \frac{N_1}{\text{A}_2} = \frac{10{,}8 \cdot 10^3}{6{,}86 \cdot 10^{-4}} = 1{,}57 \cdot 10^7\text{Па} = 15{,}7\text{МПа}$$

$$\sigma_{2(F)} = \frac{N_2}{2\text{A}_2} = \frac{129{,}5 \cdot 10^3}{2 \cdot 6{,}86 \cdot 10^{-4}} = 9{,}44 \cdot 10^7\text{Па} = 94{,}4\text{МПа}$$

Перший стержень працює на стиск, а другий - на розтяг.

3) Визначимо напруження в стержнях від неточності монтажу.

Будемо вважати, що короткий стержень виконаний коротше на величину Δ (рис. 3.4.3).

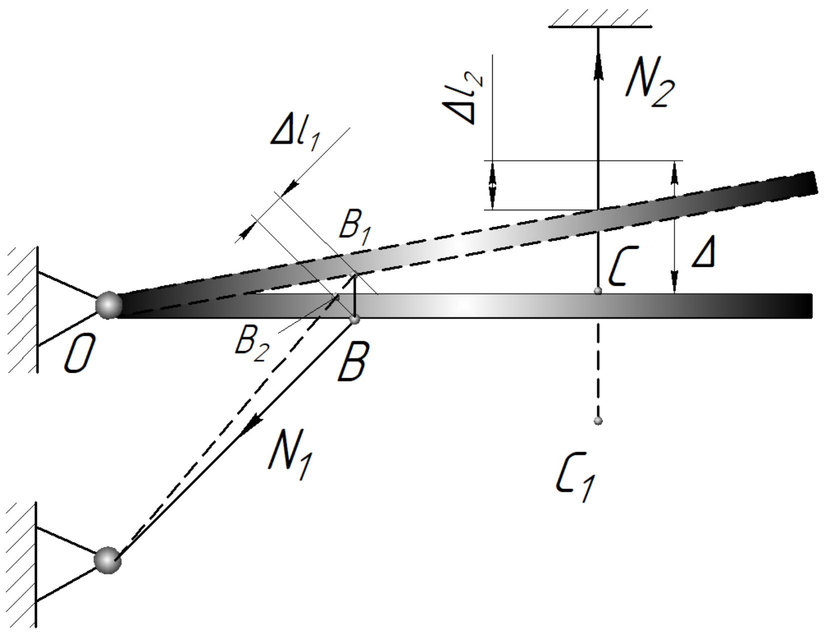


Рисунок 3.4.3. – Схема деформацій від неточності монтажу.

3.1) Статична сторона задачі:

$\sum X = 0; \quad -N_1 . \cos 45^{\circ} + X_A = 0;$

$\sum Y = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 45^{\circ} + Y_A + N_2 = 0;1$

$\sum M_A = 0; \quad -N_1 \cdot \sin 45^{\circ} \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0.$

3.2) Геометрична сторона задачі:

$$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$$

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^0}$$

$$CC_1 = \Delta - \Delta l_2$$

$$AB = a; \qquad AC = 2a$$

$$\frac{\Delta l_1}{\cos 45^0} = \frac{\Delta - \Delta l_2}{2}$$

3.3) Фізична сторона задачі:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E\text{A}} = \frac{N_1 \cdot a}{E\text{A}_2 \cdot \cos 45^0}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E\text{A}} = \frac{N_2 \cdot 2b}{2E\text{A}_2}$$

3.4) Сінтез:

$$\frac{N_1 \cdot a}{(\cos 45^0)^2 E\mathrm{A}_2} = \frac{\Delta - \dfrac{N_2 \cdot 2b}{2E\mathrm{A}_2}}{2}$$

$$N_1 = \frac{\Delta E\mathrm{A}_2}{4a} - \frac{N_2 b}{8a}$$

Підставимо в отриманий вираз дані з умови задачі і отримаємо:

$$N_1 = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6{,}86 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 1{,}2} - \frac{N_2 \cdot 0{,}8}{8 \cdot 1{,}2} = 5716{,}7 - 0{,}083 N_2$$

$$\begin{cases} -N_1 \cdot \sin 45^{\circ} \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0 \\ N_1 = 5716{,}7 - 0{,}083 N_2 \end{cases}$$

$$-(5716{,}7 - 0{,}083 N_2) 0{,}71 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}2 \cdot N_2 = 0$$

$$2{,}471 N_2 = 4850{,}8$$

$$N_2 = 1963 H$$

$$N_1 = 5716{,}7 - 0{,}083 \cdot 1963 = 5554 H$$

3.5) Визначимо напруження в стержнях:

$$\sigma_{1(\Delta)} = \frac{N_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{5254}{6{,}86 \cdot 10^{-4}} = 8{,}1 \cdot 10^6 \text{Па} = 8{,}1 \text{МПа}$$

$$\sigma_{2(\Delta)} = \frac{N_2}{2\mathrm{A}_2} = \frac{1963}{2 \cdot 6{,}86 \cdot 10^{-4}} = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{Па} = 1{,}4 \text{МПа}$$

Обидва стержня працюють на розтяг.

4) Визначимо напруження в стержнях від зміни температури.

Будемо вважати, що температура системи підвищується. Тоді обидва стержня будуть подовжуватися від підвищення температури (рис. 3.4.4). При подовженні стержнів, вони будуть впливати один на одного через недеформований стержень АС. Внаслідок цього, в обох стержнях будуть виникати додаткові сили стиснення.

4.1) Статична сторона задачі

$\sum X = 0; \quad N_1 \cdot \cos 45^{\circ} + X_A = 0;$

$\sum Y = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^{\circ} + Y_A - N_2 = 0;$

$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^{\circ} \cdot a - N_2 \cdot 2a = 0.$

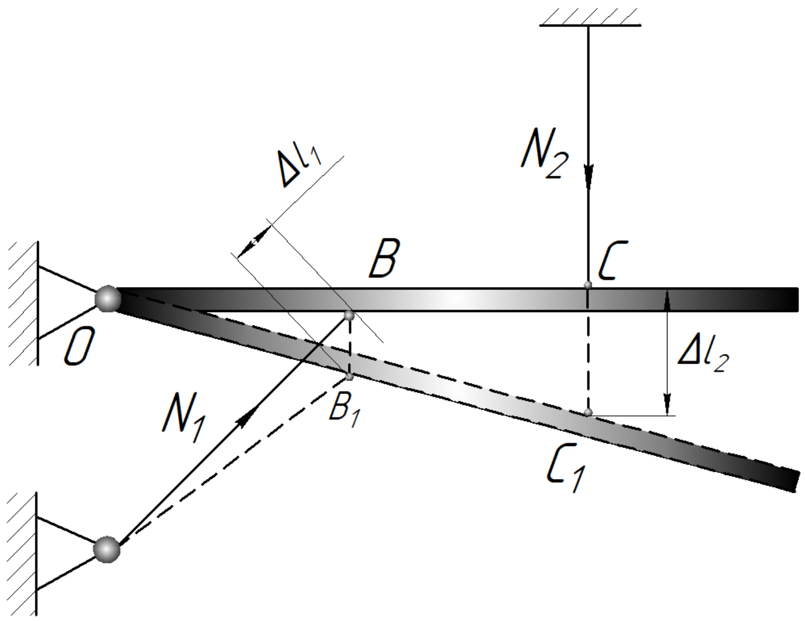


Рисунок 3.4.4. – Схема деформацій від зміни температури.

4.2) Геометрична сторона задачі:

$$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$$

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^0}; \qquad CC_1 = \Delta l_2$$

$$AB = a; \qquad AC = 2a$$

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \cos 45^0} = \frac{\Delta l_2}{2a}$$

4.3) Фізична сторона задачі:

$$\Delta l_{1(\Delta)} = \alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{ES_1} = \frac{\alpha a \Delta t}{\cos 45^0}$$

$$\Delta l_{2(\Delta)} = \alpha l_2 \Delta t - \frac{N_2 l_2}{ES_2} = \alpha b \Delta t - \frac{N_2 b}{E2S}$$

4.4) Сінтез:

$$\frac{\alpha \Delta t a}{(\cos 45^0)^2} - \frac{N_1 a}{(\cos 45^0)^2 ES} = \frac{\alpha \Delta t b}{2} - \frac{N_2 b}{4ES}$$

$$2\alpha \Delta t a ES - 2N_1 a = \frac{2\alpha \Delta t b ES - N_2}{4}$$

$$\begin{cases} N_1 = \alpha \Delta t E S\left(1 - \dfrac{b}{4a}\right) + \dfrac{N_2 b}{8a} \\ N_1 \cdot \sin 45^0 \cdot a - N_2 \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \Delta t a E S(1 - \frac{b}{4a}) \sin 45^0 + \frac{N_2 b \sin 45^0}{8a} - 2N_2 = 0$$

Вирішивши рівняння, отримаємо:

$$N_2 = 10412H;$$

$$N_1 = \frac{2N_2}{\sin 45^0} = \frac{2 \cdot 10412}{0{,}71} = 29450H$$

4.5) Визначимо напруження в стержнях:

$$\sigma_{1(\Delta t)} = \frac{N_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{29450}{6{,}86 \cdot 10^{-2}} = 42{,}9 \cdot 10^2\text{Па} = 42{,}9\text{МПа}$$

$$\sigma_{2(\Delta t)} = \frac{N_2}{2\mathrm{A}_2} = \frac{10412}{2 \cdot 6{,}86 \cdot 10^{-4}} = 7{,}6 \cdot 10^6\text{Па} = 7{,}6\text{МПа}$$

Обидва стержні працюють на стиск.

5) Визначимо сумарні напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \sigma_{1(F)} + \sigma_{1(\Delta)} + \alpha_{1(\Delta t)} = -15{,}7 + 8{,}1 - 45{,}9 = -50{,}5\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2(F)} + \sigma_{2(\Delta)} + \sigma_{2(\Delta t)} = 94{,}4 + 1{,}4 - 7{,}6 = 88{,}2\text{МПа}$$

6) Знайдемо недонапруження або перенапруження в стержнях:

$$\delta_1 = \frac{|[\sigma] - \sigma_1|}{[\sigma]} = \frac{|100 - 50{,}5|}{100} 100\% = 49{,}5\% - \text{ недонапруження}$$

$$\delta_2 = \frac{|[\sigma] - \sigma_2|}{[\sigma]} = \frac{|100 - 88{,}2|}{100} 100\% = 11{,}8\% - \text{ недонапруження.}$$

Висновок: Визначено площі поперечного перерізу стержнів, напруження в стержнях від дії зовнішніх сил, неточностей монтажу та впливу температури, а також сумарні напруження від вказаних факторів. Встановлено, що перший стержень у результаті стискається і в ньому виникають напруження $\sigma_1 = 50{,}5$МПа, а другий стержень розтягується і в ньому виникають напруження $\sigma_2 = 88{,}2$МПа.

4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які внутрішні силові фактори виникають в перетинах елемента конструкції, що зазнає деформацію розтягуванні-стисканні?
2. Як визначаються нормальні напруження в стержні?
3. Сутність методу перерізів.
4. Яка геометрична характеристика поперечного перерізу використовується при визначенні напружень при розтягуванні-стисканні?
5. Запишіть умову міцності при розтягуванні-стисканні.
6. Чим визначається жорсткість поперечного перерізу при розтягуванні-стисканні?
7. Що таке абсолютна лінійна деформація?
8. Що таке відносна лінійна деформація?
9. Як пов'язані відносна деформація і напруження при розтягуванні-стисканні?
10. Що таке допустиме напруження?
11. Як визначається допустиме напруження для пластичних матеріалів?
12. Як визначається допустиме напруження для крихких матеріалів?
13. У чому полягає суть методу розрахунку на міцність по допустимому напруженні?
14. Які завдання називаються статично невизначеними?
15. Як визначається ступінь статичної невизначеності?
16. Як формулюється закон Гука?
17. Які деформації називаються пружними?
18. Які деформації називаються пластичними?

ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 590 с.

2. Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій: навч. посібник / І.А. Цурпал – К.: Аграрна освіта, 2005. -367 с

3. Степин П.А. Сопротивление материалов: учебник / П.А. Степин. – Изд. 7-е. – М.: Высшая школа, 1983. – 303 с.

4. Ободовский Б.А. Спротивление материалов в примерах и задачах / Б.А. Ободовский – М.: Высшая школа, 1981. – 260 с.

5. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко – К.: Вища школа, 1988. – 243 с.

6. Миролюбов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов – К.: Наукова думка, 1985. – 218 с.

РОЗТЯГ-СТИСК.
РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Методичні вказівки
до практичного заняття
з дисципліни «Інженерна механіка.
Механіка матеріалів і конструкцій»

Укладачі:

Бондаренко Лариса Юріївна**,**
Вершков Олександр Олександрович
Антонова Галина Володимирівна

Формат 60×84 1/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Наклад 30 примірників